Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. К. Юлдашев, Предельная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений с двухточечными смешанными максимумами, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 1(), 15–22

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu567>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:11:21

УДК 517.91

Т. К. Юлдашев

ПРЕДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУХТОЧЕЧНЫМИ СМЕШАННЫМИ МАКСИМУМАМИ

Изучается разрешимость предельной задачи для системы интегро-дифференциальных уравнений с двухточечными смешанными максимумами. При этом используется метод последовательных приближений в сочетании с методом сжимающих отображений.

В последние 35–40 лет началось систематическое изучение нового класса функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) с отклоняющимся аргументом, правая часть которых, наряду с обычным аргументом t , зависит и от конструкции

$$\max \left\{ x(\tau) \mid \tau \in [\delta_1(t); \delta_2(t)] \right\}, \quad 0 \leq \delta_1(t) \leq \delta_2(t) < \infty.$$

Изучению такого класса ФДУ с максимумами посвящено много работ, например [1–8].

В приложениях максимум появляется всякий раз, когда закон управления соответствует максимальному отклонению регулируемой величины. Если в законе управления учитывается также максимальное значение отклонения рассматриваемой величины, то процесс регулируется с помощью уравнения с максимумами [1, 5, 9]. В работах [6, 7] на основе простейших примеров показано, что ФДУ с максимумами имеют специфические особенности в вопросе разрешимости и осциллируемости решений.

ФДУ, правая часть которых зависит от конструкции

$$\max \left\{ x(\tau) \mid \tau \in [\delta_1(t) \mp \delta_2(t)] \right\}, \quad 0 \leq \delta_i(t) < \infty, \quad i = 1, 2,$$

где $[\delta_1(t) \mp \delta_2(t)] \equiv [\min \{\delta_1(t); \delta_2(t)\}; \max \{\delta_1(t); \delta_2(t)\}]$, назовём ФДУ со смешанными максимумами.

Рассмотрим особенности решений ФДУ со смешанными максимумами в вопросе разрешимости на конкретных примерах.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим уравнение

$$x'(t) = (1 - \alpha)^{-1} \max \left\{ x(\tau) \mid \tau \in [t \mp t^\alpha] \right\}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{а})$$

с начальным нулевым условием

$$x(0) = 0, \quad (\text{б})$$

где $0 < \alpha < 1$.

Уравнение (а) при начальном условии (б) имеет решение $x(t) = t^{(1-\alpha)^{-1}}$ на отрезке $[0; 1]$. Данное уравнение имеет другое решение $x(t) = C \cdot \exp \left\{ (1 - \alpha)^{-1} t \right\}$ на полуинтервале $[1; \infty)$, где $C > 0$ — константа. Из условия (б) определить неизвестный коэффициент C не возможно. Для его определения требуется дополнительное условие.

Если зададим условие

$$x(+t) \Big|_{t=1} = x(-t) \Big|_{t=1}, \quad (\text{в})$$

то получаем, что $C = \exp \left\{ -(1 - \alpha)^{-1} \right\}$, т. е. решение уравнения (а) на полуинтервале $[1; \infty)$ имеет вид

$$x(t) = \exp \left\{ (1 - \alpha)^{-1} (t - 1) \right\}, \quad t \in [1; \infty).$$

Отметим, что решение уравнения (а) по характеру условия (в) непрерывно на полуоси $[0; \infty)$. Но, нельзя говорить о гладкости этого решения. Она нарушается в точке $t = 1$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим уравнение

$$x'(t) = \frac{\exp \{t\}}{(1 + \exp \{t\})^2} \cdot \frac{1 + \exp \left\{ \left(1 + (-1)^{[t]} \right) t \right\}}{\exp \left\{ \left(1 + (-1)^{[t]} \right) t \right\}} \times \max \left\{ x(\tau) \mid \tau \in \left[t \mp \left(1 + (-1)^{[t]} \right) t \right] \right\}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{г})$$

с положительным начальным условием

$$x(0) = x^0 > 0, \quad (д)$$

где $[t]$ — целая часть t .

Уравнение (г) имеет решение

$$x(t) = C_i \frac{\exp \{t\}}{1 + \exp \{t\}}, \quad C_i > 0, \quad i = 1, 3, 5, 7, \dots$$

на множестве $T_1^\infty = [0; 1] \cup [2; 3] \cup [4; 5] \cup \dots$

Кроме того, уравнение (г) имеет другое решение

$$x(t) = C_j \exp \left\{ -2 \left(1 + \exp \{t\} \right)^{-1} \right\}, \quad C_j > 0, \quad j = 2, 4, 6, \dots$$

на множестве $T_2^\infty = [1; 2] \cup [3; 4] \cup [5; 6] \cup \dots$

С помощью начального условия (д) определяется только первый коэффициент: $C_1 = 2x^0$. Для того, чтобы определить последующие коэффициенты $C_2, C_3, C_4, C_5, \dots$ требуется задание дополнительных условий в точках t_k ($k \in \mathbb{N}$).

Рассматривается система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений вида

$$x'(t) = F \left(t, x(t), \int_{-\infty}^t H \left(t, s, \max \left\{ x(\tau) \mid \tau \in [\delta_1(s); \delta_2(s)] \right\} \right) ds \right), \quad t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

с предельным условием

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x^{-\infty} < \infty, \quad (2)$$

где $F(t, x, y)$ и $H(t, s, x)$ — векторные функции размерности $n \times 1$ и $m \times 1$, соответственно, определённые в областях $D_1 \equiv \{t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m\}$ и $D_2 \equiv \{t \in \mathbb{R}, -\infty < s \leq t, x \in \mathbb{R}^n\}$, непрерывные по t, x, y в области D_1 и по t, s, x в области D_2 ; $x(t)$ — искомая векторная функция размерности $n \times 1$; $\delta_i(t) \in C(\mathbb{R})$ ($i = 1, 2$), $\delta_1(t) \neq \delta_2(t)$ при $t \in \mathbb{R}$, исключением являются только две точки t_1 и t_2 , в которых $\delta_1(t_i) = \delta_2(t_i)$ ($i = 1, 2$) $t_1 < t_2$; $x^{-\infty}$ — заданный конечный $n \times 1$ -мерный постоянный вектор.

Изучим случай, когда $\delta_1(t) \leq \delta_2(t)$ на интервале $T_1 \cup T_3$ и $\delta_2(t) \leq \delta_1(t)$ на отрезке $T_2 \equiv [t_1; t_2]$; $T_1 \equiv (-\infty; t_1]$, $T_3 \equiv [t_2; \infty)$; $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \equiv \mathbb{R} \equiv (-\infty; \infty)$.

Отметим, что данная работа является дальнейшим развитием работ [10–12].

Однозначную разрешимость задачи (1), (2) будем изучать с помощью следующих непрерывных условий склеивания:

$$x(+t_i) = x(-t_i), \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Задача (1)–(3) эквивалентна совокупности следующих трёх систем нелинейных функционально-интегральных уравнений (ФИУ) следующего вида:

$$x(t) = A_1(x; t) \equiv x^{-\infty} + \int_{-\infty}^t F \left(s, x(s), \int_{-\infty}^s H \left(s, \theta, \max \left\{ x(\tau) \mid \tau \in [\delta_1(\theta); \delta_2(\theta)] \right\} \right) d\theta \right) ds, \quad t \in T_1, \quad (4)$$

$$x(t) = A_2(x; t) \equiv A_1(x; t_1) + \int_{t_1}^t F \left(s, x(s), \int_{-\infty}^{t_1} H \left(s, \theta, \max \left\{ x(\tau) \mid \tau \in [\delta_1(\theta); \delta_2(\theta)] \right\} \right) d\theta + \int_{t_1}^s H \left(s, \theta, \max \left\{ x(\tau) \mid \tau \in [\delta_2(\theta); \delta_1(\theta)] \right\} \right) d\theta \right) ds, \quad t \in T_2, \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 x(t) = A_3(x; t) \equiv & A_2(x; t_2) + \int_{t_2}^t F \left(s, x(s), \int_{-\infty}^{t_1} H \left(s, \theta, \max \left\{ x(\tau) \mid \tau \in [\delta_1(\theta); \delta_2(\theta)] \right\} \right) d\theta + \right. \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} H \left(s, \theta, \max \left\{ x(\tau) \mid \tau \in [\delta_2(\theta); \delta_1(\theta)] \right\} \right) d\theta + \\
 & \left. + \int_{t_2}^s H \left(s, \theta, \max \left\{ x(\tau) \mid \tau \in [\delta_1(\theta); \delta_2(\theta)] \right\} \right) d\theta \right) ds, \quad t \in T_3. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Для дальнейшего изложения сути данной работы примем следующие обозначения: $C(D)$ — пространство непрерывных функций по всем аргументам в области D ; $\text{Bnd}(M)$ — класс функций, ограниченных по норме числом M ; $\text{Lip}(L|_{u,v,\dots})$ — класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменным $u, v, \dots$ с коэффициентом L , а для функции одной переменной индекс будем опускать.

ЛЕММА 1. Пусть неотрицательная функция $u(t) \in C(T_1)$ удовлетворяет интегральному неравенству

$$u(t) \leq C(t) + \int_{-\infty}^t \left[v(s)u(s) + \int_{-\infty}^s \omega(s, \theta)u(\theta) d\theta \right] ds, \quad t \in T_1, \quad (7)$$

где $C(t)$, $v(t)$, $\omega(t, s)$ — неотрицательные функции из $C(T_1)$, $-\infty < s \leq t$; причём интеграл

$$\int_{-\infty}^t \omega(t, s) \varphi(s) ds,$$

где $\varphi(t)$ может означать любую из трёх следующих функций: $u(t)$, $C(t)$, 1, сходится по t на интервале T_1 , сходится равномерно на любом его конечном отрезке и

$$\int_{-\infty}^t \left[v(s)\varphi(s) + \int_{-\infty}^s \omega(s, \theta)\varphi(\theta) d\theta \right] ds < \infty, \quad t \in T_1.$$

Тогда справедливо неравенство

$$u(t) \leq \exp \left\{ \int_{-\infty}^t v(\eta) d\eta \right\} \left[T(t) + \int_{-\infty}^t W(s) \exp \left\{ \int_s^t V(\eta) d\eta \right\} ds \right], \quad t \in T_1, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned}
 T(t) &\equiv C(t) \exp \left\{ - \int_{-\infty}^t v(\eta) d\eta \right\} + \int_{-\infty}^t v(s) C(s) \exp \left\{ - \int_{-\infty}^s V(\eta) d\eta \right\} ds, \\
 W(t) &\equiv \int_{-\infty}^t \omega_0(t, \theta) T(\theta) d\theta, \quad \omega_0(t, \theta) \equiv \omega(t, \theta) \exp \left\{ - \int_{\theta}^t v(\eta) d\eta \right\}, \quad V(t) \equiv \int_{-\infty}^t \omega_0(t, \theta) d\theta.
 \end{aligned}$$

Доказательство. Обозначим

$$U_0(t) \equiv \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s \omega(s, \theta) u(\theta) d\theta ds, \quad U(t) \equiv \int_{-\infty}^t v(s) u(s) ds + U_0(t).$$

Тогда в силу (7) имеем

$$u(t) \leq C(t) + U(t), \quad t \in T_1. \quad (9)$$

Дифференцируя функцию $U(t)$ и используя (9), получаем

$$U'(t) \leq v(t)U(t) + v(t)C(t) + U_0'(t), \quad t \in T_1. \quad (10)$$

Решая дифференциальное неравенство (10) с предельным условием $\lim_{t \rightarrow -\infty} U(t) = 0$ и учитывая (9), имеем

$$u_0(t) \leq T(t) + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s \omega_0(s, \theta) u_0(\theta) d\theta ds, \quad t \in T_1, \quad (11)$$

где $u_0(t) \equiv u(t) \exp \left\{ - \int_{-\infty}^t v(\eta) d\eta \right\}.$

Обозначая правую часть интегрального неравенства (11) без $T(t)$ через $U_1(t)$, имеем

$$u_0(t) \leq T(t) + U_1(t), \quad t \in T_1. \quad (12)$$

Используя (12) и монотонную неубываемость функции $U_1(t)$ на T_1 , получаем

$$U_1'(t) \leq V(t)U_1(t) + W(t), \quad t \in T_1. \quad (13)$$

Решая дифференциальное неравенство (13) с предельным условием $\lim_{t \rightarrow -\infty} U_1(t) = 0$ и учитывая (12), окончательно получим (8). $\square$

ЛЕММА 2. Пусть выполняются следующие условия:

1) $F(t, x, y) \in \text{Lip} \left(L_{11}(t)|_x; L_{12}(t)|_y \right)$, $L_{1i}(t) \in C(T_1; \mathbb{R}_+)$, $i = 1, 2$;

2) $H(t, s, x) \in \text{Lip} \left(L_{13}(t, s)|_x \right)$, $L_{13}(t, s) \in C(T_1^2; \mathbb{R}_+)$;

3) интегралы $\int_{-\infty}^t H(t, \theta, 0) d\theta$, $\int_{-\infty}^t L_{13}(t, \theta) d\theta$ сходятся по t на интервале T_1 и сходятся равномерно на его любом конечном отрезке;

4) $\int_{-\infty}^t \left[L_{11}(s) + L_{12}(s) \int_{-\infty}^s L_{13}(s, \theta) d\theta \right] ds < \infty$, $t \in T_1$;

5) интеграл $f(t) \equiv A_1(0; t) - x^{-\infty}$ существует при любом $t \in T_1$;

6) $f(t) \in S^1(T_1; \mathbb{R}^n)$.

Тогда система ФИУ (4) имеет единственное решение в классе $S^1(T_1; \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющее неравенству

$$\|x(t)\| \leq M_1(t), \quad t \in T_1, \quad (14)$$

где

$$M_1(t) \equiv \exp \left\{ \int_{-\infty}^t L_{11}(\eta) d\eta \right\} \left[T^1(t) + \int_{-\infty}^t V_1(s, 0, T^1) \exp \left\{ \int_s^t V_1(\eta, 0, 1) d\eta \right\} ds \right],$$

$$T^1(t) \equiv C_1(t) \exp \left\{ - \int_{-\infty}^t L_{11}(\eta) d\eta \right\} + \int_{-\infty}^t L_{11}(s) C_1(s) \exp \left\{ - \int_{-\infty}^s L_{11}(\eta) d\eta \right\} ds,$$

$C_1(t) \equiv \|x^{-\infty} + f(t)\|$, а V_1 определяется из следующего обозначения:

$$V_i(t; \alpha_1, \alpha_2) \equiv L_{11}(t)\alpha_1(t) + L_{12}(t) \int_{-\infty}^t L_{13}(t, \theta) \exp \left\{ -i \cdot \int_{\theta}^t L_{11}(\eta) d\eta \right\} \alpha_2(\theta) d\theta \quad (i = 0, 1),$$

$\alpha_j(t) \in C(T_1; \mathbb{R}_+)$ ($j = 0, 1$), причём интеграл в $V_0(t; \alpha_1, \alpha_2)$ сходится по t на интервале T_1 и сходится равномерно на любом его конечном отрезке.

Для различных двух решений $x(t)$ и $y(t)$ системы ФИУ (4) в классе $S^1(T_1; \mathbb{R}^n)$ с предельными векторами $x^{-\infty}$ и $y^{-\infty}$, соответственно, справедлива оценка

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x^{-\infty} - y^{-\infty}\| \exp \left\{ \int_0^t V_1(s; 1, 1) ds \right\}, \quad t \in T_1. \quad (15)$$

Кроме того, если

$$f_0 = \sup \{\|f(t)\| : t \in T_1\} < \infty, \quad (16)$$

то это решение ограничено на T_1 .

Доказательство. Сначала докажем существование решения $x(t) \in C^1(T_1; \mathbb{R}^n)$ системы ФИУ (4), для которого интеграл $\int_{-\infty}^t L_{13}(t, \theta) \|x(\theta)\| d\theta$ сходится по t на интервале T_1 и сходится равномерно на любом его конечном отрезке и

$$\int_{-\infty}^t \left[L_{11}(s) \|x(s)\| + L_{12}(s) \int_{-\infty}^s L_{13}(s, \theta) \|x(\theta)\| d\theta \right] ds < \infty, \quad t \in T_1.$$

Этот класс $x(t) \in C^1(T_1; \mathbb{R}^n)$ в условиях леммы обозначен через $S^1(T_1; \mathbb{R}^n)$.

Для системы ФИУ (4) построим последовательные приближения:

$$\begin{cases} x_0(t) = 0, & t \in T_1, \\ x_{k+1}(t) = A_1(x_k; t), & t \in T_1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (17)$$

В силу условий леммы и, используя монотонную неубываемость на T_1 функций

$$G_1(t) \equiv \int_{-\infty}^t V_0(s; C_1, C_1) ds \quad \text{и} \quad G_2(t) \equiv \int_{-\infty}^t V_0(s; 1, 1) ds,$$

из последовательных приближений (17) получаем

$$\|x_1(t)\| \leq C_1(t), \quad t \in T_1, \quad x_1(t) \in S^1(T_1; \mathbb{R}^n);$$

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq \frac{1}{(k-2)!} G_1(t) (G_2(t))^{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad t \in T_1; \quad (18)$$

$$\|x_k(t)\| \leq C_1(t) + G_1(t) \sum_{\nu=0}^{k-2} \frac{1}{\nu!} (G_2(t))^\nu, \quad k = 2, 3, \dots, \quad t \in T_1, \quad x_k(t) \in S^1(T_1; \mathbb{R}^n); \quad (19)$$

$$\|x(t)\| \leq C_1(t) + G_1(t) \cdot \exp \{G_2(t)\}, \quad t \in T_1.$$

Из (18) следует, что последовательность $\{x_k(t)\}$ сходится на интервале T_1 и сходится равномерно на его конечном отрезке к некоторой $n \times 1$ векторной функции $x(t)$, которая принадлежит классу $C(T_1; \mathbb{R}^n)$. Переходя в (17) к пределу при $k \rightarrow \infty$ и учитывая (19), получаем, что $x(t)$ удовлетворяет системе ФИУ (4), $x(t) \in S^1(T_1; \mathbb{R}^n)$.

Покажем единственность этого решения на T_1 . Пусть система ФИУ (4) имеет два решения $x(t) \in S^1(T_1; \mathbb{R}^n)$ и $y(t) \in S^1(T_1; \mathbb{R}^n)$. Тогда получим следующую оценку:

$$u(t) \leq \int_{-\infty}^t V_0(s; u(s); u(s)) ds$$

или в развёрнутом виде —

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \int_{-\infty}^t \left[L_{11}(s) \|x(s) - y(s)\| + L_{12}(s) \int_{-\infty}^s L_{13}(s, \theta) \|x(\theta) - y(\theta)\| d\theta \right] ds, \quad t \in T_1.$$

Отсюда, применяя лемму 1, получаем, что $u(t) \equiv \|x(t) - y(t)\| \equiv 0$. Следовательно, решение $x(t) \in S^1(T_1; \mathbb{R}^n)$ системы ФИУ (4) единственно.

Оценки (14) и (15) получаются в результате применения леммы 1. Устойчивость решения $x(t) \in S^1(T_1; \mathbb{R}^n)$ системы ФИУ (4) относительно предельного данного $x^{-\infty}$ следует из оценки (15). При этом число $\delta > 0$ в зависимости от заданного числа $\varepsilon > 0$ определяется из неравенства

$$\delta < \varepsilon \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{t_1} V_1(t; 1; 1) dt \right\}.$$

В силу условия (16) имеем

$$C_1^0 = \sup [C_1(t) : t \in T_1] = \|x^{-\infty}\| + f_0 < \infty, \quad T^1(t) \leq C_1^0, \quad t \in T_1,$$

$$M_1(t) \leq C_1^0 \exp \left\{ \int_{-\infty}^t V_1(s; 1; 1) ds \right\}, \quad t \in T_1.$$

Отсюда из (14) следует ограниченность решения системы ФИУ (4) на T_1 . $\square$

ЛЕММА 3. Пусть выполняются следующие условия:

- 1) выполняются все условия леммы 2;
- 2) $F(t, x, y) \in \text{Bnd}(M_2(t))$, $0 \leq M_2(t) < \infty$, $t \in T_2$;
- 3) $F(t, x, y) \in \text{Lip}(L_{21}(t)|_x; L_{22}(t)|_y)$, $L_{2i}(t) \in C(T_2; \mathbb{R}_+)$, $i = 1, 2$;
- 4) $H(t, s, x) \in \text{Lip}(L_{23}(t, s)|_x)$, $L_{23}(t, s) \in C(T_2^2; \mathbb{R}_+)$;
- 5) $q_1 < 1$, где $q_1 = \int_{-\infty}^{t_1} V_0(t; 1; 1) dt + \int_{t_1}^t V_2(s) ds$, $V_2(t) \equiv L_{21}(t) +$

$$+ L_{22}(t) \left[\int_{-\infty}^{t_1} L_{13}(\xi, \theta) d\theta + \int_{t_1}^t L_{23}(t, s) ds \right].$$

Тогда система ФИУ (5) имеет единственное решение в классе $C(T_2; \mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Воспользуемся методом последовательных приближений в сочетании с методом сжимающих отображений. При этом положим

$$\begin{cases} x_0(t) = t_1, & t \in T_2, \\ x_{k+1}(t) = A_2(x_k; t), & k = 0, 1, 2, \dots, \quad t \in T_2. \end{cases} \quad (20)$$

В силу условий леммы, из (20) получим

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \leq C_1(t) + M_2(t), \quad t \in T_2, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| &\leq \|A_1(x_k; t_1) - A_1(x_{k-1}; t_1)\| + \int_{t_1}^t V_2(s) ds \cdot \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| \leq \\ &\leq q_1 \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\|, \quad t \in T_2. \end{aligned} \quad (22)$$

В силу пятого условия леммы из оценок (21) и (22) следует, что оператор $A_2(x; t)$ в правой части системы (5) является сжимающим. Следовательно, система ФИУ (5) имеет единственное решение в классе $C(T_2; \mathbb{R}^n)$. $\square$

ЛЕММА 4. Пусть выполняются следующие условия:

- 1) выполняются все условия леммы 3;
- 2) $F(t, x, y) \in \text{Bnd}(M_3(t))$, $0 \leq M_3(t) < \infty$, $t \in T_3$;
- 3) $F(t, x, y) \in \text{Lip}(L_{31}(t)|_x; L_{32}(t)|_y)$, $L_{3i}(t) \in C(T_3; \mathbb{R}_+)$, $i = 1, 2$;
- 4) $H(t, s, x) \in \text{Lip}(L_{33}(t, s)|_x)$, $L_{33}(t, s) \in C(T_3^2; \mathbb{R}_+)$;
- 5) $q_2 < 1$, $q_2 = q_1 + \int_{t_2}^t V_3(s) ds$, $V_3(t) \equiv L_{31}(t) +$

$$+ L_{32}(t) \left[\int_{-\infty}^{t_1} L_{13}(\xi, \theta) d\theta + \int_{t_1}^{t_2} L_{23}(s, \theta) d\theta + \int_{t_2}^t L_{33}(t, s) ds \right].$$

Тогда система ФИУ (6) имеет единственное решение в классе $C(T_3; \mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Опять воспользуемся методом последовательных приближений в сочетании с методом сжимающих отображений. Положим

$$\begin{cases} x_0(t) = t_2, & t \in T_3, \\ x_{k+1}(t) = A_3(x_k; t), & k = 0, 1, 2, \dots, \quad t \in T_3. \end{cases} \quad (23)$$

В силу условий леммы, из (23) получаем, что

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \leq C_1(t_1) + M_2(t_2) + M_3(t), \quad t \in T_3, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| &\leq \|A_2(x_k; t_2) - A_2(x_{k-1}; t_2)\| + \int_{t_2}^t V_3(s) ds \cdot \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| \leq \\ &\leq q_2 \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\|, \quad t \in T_3. \end{aligned} \quad (25)$$

В силу пятого условия леммы, из (24) и (25) следует, что оператор $A_3(x; t)$ в правой части системы (6) является сжимающим. Следовательно, система ФИУ (6) имеет единственное решение в классе $C(T_3; \mathbb{R}^n)$. $\square$

Из доказанных выше трёх последних лемм следует, что справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть выполняются условия леммы 4. Тогда задача (1)–(3) имеет единственное решение $x(t) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, которое представимо в виде

$$x(t) \equiv \begin{cases} A_1(x; t), & t \in T_1, \\ A_2(x; t), & t \in T_2, \\ A_3(x; t), & t \in T_3. \end{cases}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Магомедов, А. Р. Обыкновенные дифференциальные уравнения с максимумами [Текст] / А. Р. Магомедов. — Баку: Элм, 1991. — 220 с.
2. Мунтян, В. И. К вопросу о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра [Текст] / В. И. Мунтян, В. П. Шпакович / В кн.: Вопросы устойчивости интегральных многообразий в уравнениях математической физики. — Киев: Наукова думка, 1987. — С. 49–55.
3. Петухов, В. Р. Вопросы качественного исследования решений уравнений с максимумами [Текст] / В. Р. Петухов // Изв. вузов. Математика. — 1964. — № 3. — С. 116–119.
4. Voulov, H. D. On the asymptotic stability of differential equations with maxima [Text] / H. D. Voulov, D. D. Bainov // Rend. Circ. Math. Palermo. Ser. 2. — 1991. — Vol. 40, No 3. — P. 385–420.

5. Bainov, D. D. Justification of the averaging method for functional differential equations with maxima [Text] / D. D. Bainov, S. D. Milisheva // Nouvelle Serie. — 1984. — Vol. 38 (52) — P. 149–152.
6. Yuldashev, T. K. Introduction to the theory of nonlinear functional differential equations with maxima [Text] / Т. К. Юлдашев, К. Н. Шабадиков. — Bishkek: Inst. of Math. of KNAS, 1998. — 128 p.
7. Иманалиев, М. И. Основы качественной теории нелинейных динамических систем с максимумами [Текст] / М. И. Иманалиев, Т. К. Юлдашев. — Ош: КУУ, 1999. — 198 с.
8. Юлдашев, Т. К. Некоторые уравнения с отражающими отклонениями [Текст] / Т. К. Юлдашев. — Ош: ОшГУ, 2005. — 104 с.
9. Юлдашев, Т. К. Об одной динамической системе экономики [Текст] / Т. К. Юлдашев, Ж. А. Токошева / Актуальные проблемы современной науки: Тр. 5-й междунаро. конф. молодых учёных. (7–9 сентября 2004, Самара). — Самара: СамГТУ, 2004. — Ч. 1, 2: Математика, Мат. моделирование. — С. 124–125.
10. Yuldashev, T. K. Initial value problem for a system of nonlinear functional differential equations with mixed maxima [Text] / Т. К. Yuldashev // Складі системи і процеси. — 2004. — № 1–2. — С. 9–12.
11. Yuldashev, T. K. On a random system of nonlinear functional differential equations with nonlinear mixed random maxima [Text] / Т. К. Yuldashev / Abstract book of 16 th international conf. of Jangjeon Math. Society (4–6 July 2005, Antalya, Turkey). — Antalya: Akdeniz univ., 2005. — P. 63.
12. Yuldashev, T. K. On a system of nonlinear functional differential equations with mixed maxima [Text] / Т. К. Yuldashev / Тез. докл. 9-ой междунаро. науч. конф. по проблемам аэрокосмических систем (11–12 ноября 2005, Красноярск). — Красноярск: Сиб. аэрокосм. ун-т, 2005. — С. 205–206.

Кыргызская государственная юридическая академия, г. Ош
tursunbay@rambler.ru

Поступила 12.04.2006

T. K. Yuldashev

LIMIT VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TWO POINT MIXED MAXIMUMS

We studied the solvability of limit value problem for a system of integro-differential equations with two points mixed maximums. The method of successive approximations in combination it with the method of compressing mapping used.

Kyrgyz state law academy, Osh city
tursunbay@rambler.ru

Received 12.04.2006