Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Немировский, А. П. Янковский, Равнонапряженное армирование безмоментных металлокомпозитных оболочек волокнами постоянного поперечного сечения, работающих в условиях установившейся ползучести, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 1(), 23–32

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu568>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 11:38:36

Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.376

Ю. В. Немировский, А. П. Янковский

РАВНОНАПРЯЖЁННОЕ АРМИРОВАНИЕ БЕЗМОМЕНТНЫХ МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ВОЛОКНАМИ ПОСТОЯННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ, РАБОТАЮЩИХ В УСЛОВИЯХ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Сформулирована задача равнонапряжённого армирования трёхслойных безмоментных оболочек волокнами постоянного поперечного сечения, работающих в условиях установившейся ползучести. Проведён анализ систем разрешающих уравнений. Построен ряд аналитических решений осесимметричной задачи равнонапряжённого армирования оболочек вращения. Показана возможность существования нескольких альтернативных решений поставленной задачи, которыми можно управлять за счёт варьирования краевых значений плотностей армирования. Проанализированы конкретные решения.

Введение. Безмоментное состояние является тем (иногда, к сожалению, недостижимым) идеалом, к которому следует стремиться при проектировании конструкций типа оболочек и их опор. Ввиду этого при проектировании тонкостенных конструкций, состоящих из оболочек, всегда большое внимание уделяется удовлетворению требований безмоментной теории. Так как в армированных оболочках обеспечить такое состояние можно, как правило, за счёт управления структурой армирования, то для наиболее полного использования несущей способности силовых элементов — арматуры — целесообразно потребовать, чтобы армирующие волокна (проволоки) вдоль их траекторий были равнонапряжены. Кроме того, в [1] показано: в материале с равнонапряжённой арматурой в первом приближении отсутствует вытягивание волокон из связующего, что дополнительно повышает эффективность таких структур.

При длительной эксплуатации изделия в случае статического термосилового нагружения подавляющую часть времени металлокомпозитная конструкция работает в условиях установившейся ползучести [2], поэтому актуальной является проблема равнонапряжённого армирования (РА) тонких безмоментных оболочек, работающих в условиях установившейся ползучести всех фаз композиции, с учётом технологически важного условия постоянства поперечных сечений волокон. Изучению этого вопроса посвящено настоящее исследование.

1. Система исходных уравнений. Рассмотрим тонкую трёхслойную металлокомпозитную оболочку симметричной относительно срединной поверхности структуры. Внутренний слой переменной или постоянной толщины h_* армирован N семействами волокон (проволок), причём армирование может осуществляться по эквидистантным поверхностям или же расстояния между элементарными армированными слоями изменяются пропорционально изменению h_* . Структура армирования по толщине этого слоя является регулярной и квазиоднородной. Внешние изотропные слои, играющие, например, роль защитных покрытий, изготовлены из одного материала и имеют переменную или постоянную толщину $\frac{h_0}{2}$ каждый. Как обычно [3, 4], предполагается, что напряжённое состояние во всех слоях является плоским и оболочка подчиняется гипотезам Кирхгофа—Лява. Оболочка рассматривается в криволинейной ортогональной системе координат x_1, x_2, x_3 ; поверхность $x_3 = 0$ совмещена со срединной поверхностью оболочки до деформирования; x_1, x_2 — главные координаты срединной поверхности; переменная x_3 определяет расстояние от точек оболочки до срединной поверхности. Предполагается, что к рассматриваемому моменту времени деформации ползучести получили настолько значительное развитие, что по сравнению с ними можно пренебречь начальными упругими и пластическими деформациями [2].

Для формулировки и анализа рассматриваемой задачи РА безмоментных оболочек в рамках геометрически линейной постановки необходимо использовать общеизвестные уравнения равновесия

безмоментной теории [3, 4]:

$$(A_j T_{ii})_{,i} + (A_i T_{ij})_{,j} + A_{i,j} T_{ij} - A_{j,i} T_{jj} = -A_1 A_2 p_i(x_1, x_2, \omega, h_*, h_0),$$

$$\kappa_1 T_{11} + \kappa_2 T_{22} = p_3(x_1, x_2, \omega, h_*, h_0), \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2 \quad (\omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}); \quad (1)$$

$$p_i \equiv P_i(x_1, x_2) + h_0 p_{0i} + h_* \left((1 - \Omega) p_{*i} + \sum_k \omega_k p_{ki} \right), \quad \Omega = \sum_k \omega_k, \quad i = 1, 2, 3; \quad (2)$$

связь между осреднёнными мембранными («цепными») напряжениями в слоях тонкой оболочки и тангенциальными усилиями T_{ij} [3, 4]:

$$T_{ij} = h_* \sigma_{ij} + h_0 \sigma_{0ij}, \quad i, j = 1, 2; \quad (3)$$

кинематические соотношения (используется теория течения [2]), связывающие скорости мембранных деформаций ξ_{ij} и параметров изменения кривизн $\dot{\kappa}_{ij}$ срединной поверхности со скоростями v_i перемещения точек этой поверхности [3]:

$$\xi_{ii} = A_i^{-1} v_{i,i} + (A_1 A_2)^{-1} A_{i,j} v_j + \kappa_i v_3, \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2;$$

$$\xi_{12} = \frac{1}{2} \left[A_1 A_2^{-1} (v_1/A_1)_{,2} + A_2 A_1^{-1} (v_2/A_2)_{,1} \right], \quad \xi_{21} = \xi_{12}; \quad (4)$$

$$\dot{\kappa}_{ii} = -A_i^{-1} (v_{3,i} A_i^{-1} - \kappa_i v_i)_{,i} - (A_1 A_2)^{-1} A_{i,j} \left(v_{3,j} A_j^{-1} - \kappa_j v_j \right), \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2;$$

$$\dot{\kappa}_{12} = - (A_1 A_2)^{-1} (v_{3,12} - A_1^{-1} A_{1,2} v_{3,1} - A_2^{-1} A_{2,1} v_{3,2}) +$$

$$+ \kappa_1 A_1 A_2^{-1} (v_1/A_1)_{,2} + \kappa_2 A_2 A_1^{-1} (v_2/A_2)_{,1}, \quad \dot{\kappa}_{21} = \dot{\kappa}_{12}; \quad (5)$$

условия совместности скоростей деформаций [3]:

$$(A_i \dot{\kappa}_{ii})_{,j} - A_{i,j} \dot{\kappa}_{jj} - (A_j \dot{\kappa}_{ij})_{,i} - A_{j,i} \dot{\kappa}_{ij} = \kappa_j \left[(A_i \xi_{ii})_{,j} - 2 (A_j \xi_{ij})_{,i} - \right.$$

$$\left. - A_{i,j} \xi_{jj} \right] - 2 \kappa_i A_{j,i} \xi_{ij}, \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2;$$

$$\kappa_2 \dot{\kappa}_{11} + \kappa_1 \dot{\kappa}_{22} = - (A_1 A_2)^{-1} \left\{ \left[A_1^{-1} (A_2 \xi_{22,1} + A_{2,1} (\xi_{22} - \xi_{11}) - A_1 \xi_{12,2} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - 2 A_{1,2} \xi_{12} \right) \right]_{,1} + \left[A_2^{-1} (A_1 \xi_{11,2} + A_{1,2} (\xi_{11} - \xi_{22}) - A_2 \xi_{12,1} - 2 A_{2,1} \xi_{12}) \right]_{,2} \right\}; \quad (6)$$

структурные соотношения во внутреннем слое (используется модель армированного слоя из [5]), связывающие величины осреднённых мембранных напряжений σ_{ij} в нём с напряжениями в связующем σ_{*ij} и волокнах k -го семейства σ_k :

$$\sigma_{ij} = (1 - \Omega) \sigma_{*ij} + \sum_k \sigma_k \omega_k l_{ki} l_{kj} \quad (i, j = 1, 2), \quad l_{k1} = \cos \psi_k, \quad l_{k2} = \sin \psi_k; \quad (7)$$

определяющие уравнения в фазах композиции армированного слоя [2, 5]:

$$\xi_{ii} = \frac{1}{6} f(T) (2\sigma_{*ii} - \sigma_{*jj}), \quad \xi_{ij} = \frac{1}{2} f(T) \sigma_{*ij}, \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2; \quad (8)$$

$$\sigma_{*ii} = 2g(H) (2\xi_{ii} + \xi_{jj}), \quad \sigma_{*ij} = 2g(H) \xi_{ij}, \quad j = 3 - i, \quad i, j = 1, 2; \quad (9)$$

$$H = 2\sqrt{\xi_{11}^2 + \xi_{11}\xi_{22} + \xi_{22}^2 + \xi_{12}^2}, \quad H = f(T) T,$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_{*11}^2 - \sigma_{*11}\sigma_{*22} + \sigma_{*22}^2 + 3\sigma_{*12}^2}, \quad T = g(H) H; \quad (10)$$

$$\xi_k = f_k(\sigma_k) = \xi_{11} l_{k1}^2 + \xi_{22} l_{k2}^2 + 2\xi_{12} l_{k1} l_{k2}, \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad (11)$$

определяющие уравнения для внешних изотропных слоёв [5]:

$$\sigma_{0ii} = 2g_0(H) (2\xi_{ii} + \xi_{jj}), \quad \sigma_{0ij} = 2g_0(H) \xi_{ij}, \quad j = 3 - i, \quad i, j = 1, 2; \quad (12)$$

условия равнонапряжённости арматуры k -го семейства:

$$\sigma_k = \text{const}, \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad (13)$$

условия постоянства площадей поперечных сечений волокон k -го семейства, которые для тонкого слоя переменной толщины h_* имеют следующий вид [6]:

$$(A_2 h_* \omega_k \cos \psi_k)_{,1} + (A_1 h_* \omega_k \sin \psi_k)_{,2} = 0 \quad (14)$$

(при армировании среднего слоя по эквидистантным поверхностям в (4) следует формально принять $h_* = 1$ [6]).

Температура конструкции предполагается однородной (в противном случае пришлось бы решать связанные задачи определения РА-структуры и теплопроводности, что выходит за рамки настоящего исследования).

На кромках оболочки должны быть заданы общеизвестные статические и кинематические [3, 4] граничные условия, обеспечивающие отсутствие на кромках моментов и перерезывающих сил. (Не будем здесь подробно выписывать эти граничные условия, так как в каждой конкретной задаче, как правило, требуется самостоятельное проектирование подкрепляющих опор и колец, обеспечивающих безмоментное состояние на кромках [3, 4].) Кроме того, на части кромки (обозначим её Γ_k), на которой волокна k -го семейства входят в оболочку, для однозначного интегрирования уравнения (4) необходимо задать краевое условие [6]

$$\omega_k(\Gamma_k) = \omega_{0k}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (15)$$

Решение задачи РА тонких оболочек должно удовлетворять физическим ограничениям [6]:

$$0 \leq \omega_k \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad \Omega \leq \omega_* \leq 1, \quad h_0 \geq 0, \quad h_* \geq 0, \quad h_* + h_0 \leq \bar{h}_* = \text{const}. \quad (16)$$

В уравнениях и соотношениях (1)–(6) приняты обозначения: A_i, κ_i — параметры Ламе и главные кривизны срединной поверхности оболочки соответственно; p_i — приведённые внешние распределённые нагрузки; P_i — компоненты распределённой поверхностной нагрузки, приложенной к лицевым поверхностям оболочки; p_{0i}, p_{*i}, p_{ki} — компоненты распределённых массовых нагрузок, действующих на внешние слои, связующее и волокна k -го семейства армированного слоя соответственно; ω_k, ψ_k — интенсивность и угол (отсчитываемый от направления координатной линии x_1) армирования внутреннего слоя волокнами k -го семейства; $\bar{h}_*$ — предельно допустимая толщина оболочки, при которой она может рассматриваться как тонкая; $\omega_* = \text{const}$ — предельно допустимая суммарная плотность армирования (на практике $\omega_* \approx 0,7$); ξ_k — скорость деформации ползучести волокон k -го семейства, связанная с напряжением в арматуре σ_k известной зависимостью: $\xi_k = f_k(\sigma_k)$; $g_0(H)$ — заданная функция, являющаяся коэффициентом пропорциональности между интенсивностью касательных напряжений T_0 и интенсивностью скоростей деформаций H во внешних слоях: $T_0 = g_0(H)H$ (T_0 имеет выражение, аналогичное (10), где следует заменить σ_{*ij} на σ_{0ij}), аналогичный смысл для связующего внутреннего слоя имеют заданные функции $f(T), g(H)$ в (8)–(10); ω_{0k} — заданные на Γ_k краевые значения ω_k ; суммирование производится от 1 до N ; нижний индекс после запятой означает частное дифференцирование по соответствующей переменной x_i .

2. Системы разрешающих уравнений задачи равнонапряжённого армирования безмоментных оболочек. Для упрощения и удобства дальнейшего изложения и анализа предположим, что распределённые нагрузки p_i в уравнениях равновесия (1) известны, т. е. в (2) формально примем $p_i = P_i(x_1, x_2)$. (Такое допущение справедливо, когда объёмные нагрузки p_{0i}, p_{*i}, p_{ki} пренебрежимо малы по сравнению с поверхностными нагрузками P_i : $|P_i| \gg \bar{h}_* \max(|p_{0i}|, |p_{*i}|, |p_{1i}|, |p_{2i}|, \dots, |p_{Ni}|)$, $i = 1, 2, 3$.) Тогда система (1) полностью совпадает с системой уравнений равновесия классической безмоментной теории оболочек. Вопросы существования решения этой системы и корректной краевой задачи для неё, не приводящие к геометрически изменяемой поверхности оболочки, подробно изучены, и аналитические методы решения системы (1) хорошо разработаны [3, 4]. Поэтому далее будем предполагать, что система (1) при известных правых частях проинтегрирована и усилия T_{ij} известны.

Используя соотношения (3), (7), (9), (12), выразим напряжения σ_{*ij} через усилия T_{ij} :

$$\sigma_{*ij} = [h_* (1 - \Omega) + h_0 G(T)]^{-1} \left[T_{ij} - h_* \sum_k \sigma_k \omega_k l_{ki} l_{kj} \right], \quad i, j = 1, 2, \quad (17)$$

где, согласно (10),

$$G(T) \equiv g_0(H)/g(H) = g_0(f(T)T)/g(f(T)T). \quad (18)$$

Подставим выражения (7) в соотношения (8), а последние — в (11), тогда после элементарных преобразований с учётом (13) получим

$$\begin{aligned} & \cos^2 \psi_m \left[2(2T_{11} - T_{22}) - h_* \sum_k \sigma_k \omega_k (1 + 3 \cos 2\psi_k) \right] + \sin^2 \psi_m \times \\ & \times \left[2(2T_{22} - T_{11}) - h_* \sum_k \sigma_k \omega_k (1 - 3 \cos 2\psi_k) \right] + 3 \left(2T_{12} - h_* \sum_k \sigma_k \omega_k \sin 2\psi_k \right) \times \\ & \times \sin 2\psi_m = 12 \left[h_* \left(1 - \sum_k \omega_k \right) + h_0 G(T) \right] \xi_m / f(T), \\ & \xi_m = f_m(\sigma_m) = \text{const}, \quad m = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (19)$$

Далее для решения рассматриваемой задачи будем использовать итерационный процесс, соответствующий идее метода «секущего модуля» [2]. Пусть на некоторой l -й итерации известно приближение интенсивности касательных напряжений $T^{(l)}$, тогда в (19) известны функции $G(T^{(l)})$, $f(T^{(l)})$ (см. (18)), и при заданных толщинах h_* , h_0 слоёв и произвольном количестве семейств волокон N задача РА безмоментной оболочки на каждой итерации описывается системой $2N$ уравнений (14), (19), замкнутой относительно l -х приближений параметров РА $\psi_k^{(l)}$, $\omega_k^{(l)}$. Очевидно, что в силу существенной нелинейности уравнений (19) относительно углов армирования ψ_k задача РА может иметь несколько альтернативных решений, которыми можно управлять за счёт варьирования функций ω_{0k} ($k = 1, 2, \dots, N$) в краевых условиях (15). Если функции $\psi_k^{(l)}$, $\omega_k^{(l)}$ определены, то из (17) получим l -е приближения напряжений $\sigma_{*ij}^{(l)}$, а затем, из (10) — $(l + 1)$ -е приближение интенсивности касательных напряжений $T^{(l+1)}$ и т. д. Сходимость метода «секущего модуля» доказана [2], поэтому и предложенный итерационный процесс будет сходиться.

Систему (19) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений, замкнутую относительно ω_k . Выразив из неё по правилу Крамера функции ω_k , последние можно исключить из уравнений (14), после чего получим систему N дифференциальных уравнений первого порядка относительно приближений углов РА $\psi_k^{(l)}$ ($1 \leq k \leq N$). Однако при произвольном N такая система чрезвычайно громоздка, поэтому не будем её выписывать. При $N = 1$ она редуцируется в одно уравнение:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\sigma_1 - 3\xi_1 / f(T^{(l)}) \right)^{-1} A_2 \cos \psi_1^{(l)} \left[T_{11} + T_{22} + 3(T_{11} - T_{22}) \cos 2\psi_1^{(l)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 6T_{12} \sin 2\psi_1^{(l)} - 12 \left(h_* + h_0 G(T^{(l)}) \right) \xi_1 / f(T^{(l)}) \right] \right\}_{,1} + \left\{ \left(\sigma_1 - 3\xi_1 / f(T^{(l)}) \right)^{-1} \times \right. \\ & \times A_1 \sin \psi_1^{(l)} \left[T_{11} + T_{22} + 3(T_{11} - T_{22}) \cos 2\psi_1^{(l)} + 6T_{12} \sin 2\psi_1^{(l)} - \right. \\ & \left. \left. - 12 \left(h_* + h_0 G(T^{(l)}) \right) \xi_1 / f(T^{(l)}) \right] \right\}_{,2} = 0, \quad \xi_1 = f_1(\sigma_1) = \text{const}, \end{aligned} \quad (20)$$

при этом

$$\begin{aligned} \omega_1^{(l)} = & \left[4h_* \left(\sigma_1 - 3\xi_1 / f(T^{(l)}) \right) \right]^{-1} \left[T_{11} + T_{22} + 3(T_{11} - T_{22}) \cos 2\psi_1^{(l)} + \right. \\ & \left. + 6T_{12} \sin 2\psi_1^{(l)} - 12 \left(h_* + h_0 G(T^{(l)}) \right) \xi_1 / f(T^{(l)}) \right], \quad \xi_1 = f_1(\sigma_1) = \text{const}. \end{aligned} \quad (21)$$

Краевые условия для уравнения (20) можно получить, если в (21) подставить краевые значения ω_{01} , заданные на кромке Γ_1 (см. (15)), тогда

$$\begin{aligned} 3(T_{11} - T_{22}) \cos 2\psi_{01}^{(l)} + 6T_{12} \sin 2\psi_{01}^{(l)} = & 4h_* \left(\sigma_1 - 3\xi_1 / f(T^{(l)}) \right) \omega_{01} + \\ & + 12 \left(h_* + h_0 G(T^{(l)}) \right) \xi_1 / f(T^{(l)}) - T_{11} - T_{22}, \quad \psi_{01}^{(l)} \equiv \psi_1^{(l)}(\Gamma_1), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_1. \end{aligned} \quad (22)$$

Трансцендентное относительно $\psi_{01}^{(l)}$ уравнение (22) задаёт краевые значения для функции $\psi_1^{(l)}$, определяемой квазилинейным уравнением в частных производных первого порядка (20). После элементарных тригонометрических преобразований уравнение (22) можно привести к виду

$$\cos(2\psi_{01}^{(l)} - \psi) = \left(3\sqrt{(T_{11} - T_{22})^2 + 4T_{12}^2}\right)^{-1} \left[4h_* \left(\sigma_1 - 3\xi_1/f(T^{(l)})\right) \omega_{01} + 12 \left(h_* + h_0 G(T^{(l)})\right) \xi_1/f(T^{(l)}) - T_{11} - T_{22}\right], \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_1, \quad (23)$$

где угол ψ известен на Γ_1 и определяется равенствами

$$\cos \psi = \frac{T_{11} - T_{22}}{\sqrt{(T_{11} - T_{22})^2 + 4T_{12}^2}}, \quad \sin \psi = \frac{2T_{12}}{\sqrt{(T_{11} - T_{22})^2 + 4T_{12}^2}}.$$

Если правая часть уравнения (23) по модулю не превосходит единицы, то оно может иметь два альтернативных решения относительно $\psi_{01}^{(l)}$ (остальные решения будут отличаться от уже указанных на значения $\pm\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) и с практической точки зрения не представляют интереса). Следовательно, для уравнения (20) можно получить два альтернативных краевых условия. Методы интегрирования краевых задач для таких уравнений хорошо разработаны, поэтому не будем останавливаться на этом вопросе более подробно. Однако в силу единственности решения краевой задачи для уравнения (20) в конечном итоге получим, что два альтернативных краевых условия для функции $\psi_1^{(l)}$, удовлетворяющих уравнению (23), порождают две различные РА-структуры безмоментной оболочки. Это наглядно указывает на возможность существования нескольких решений задачи РА, которые зависят от выбора ω_{01} в силу параметрической зависимости $\psi_{01}^{(l)}$ от ω_{01} (см. (23)). Варьируя ω_{01} , можно управлять соответствующими РА-проектами.

При проектировании безмоментных оболочек вращения, подверженных осесимметричному нагружению, их целесообразно армировать также осесимметрично. При этом решение задачи РА зависит только от меридиональной координаты x_1 , а система исходных уравнений состоит из (1)–(14), в которых следует опустить производные по окружной координате x_2 , а под дифференцированием по x_1 нужно понимать обычную производную. Отметим, что из сравнения предпоследних равенств (14), (15) в осесимметричном случае вытекает

$$\dot{\kappa}_{12} = 2\kappa_2 \xi_{12}, \quad (24)$$

т. е. при наличии скорости мембранной сдвиговой деформации ξ_{12} в кирхгофской оболочке вращения в осесимметричном случае возникает скорость деформации кручения $z\dot{\kappa}_{12} = 2z\kappa_2 \xi_{12}$ ($|z| \leq \frac{h_* + h_0}{2}$), а значит, моменты M_{ij} в оболочках с симметричной относительно срединной поверхности структурой не будут тождественно равны нулю [7]. Однако в рамках гипотез Кирхгофа–Лява в тонких ($(h_* + h_0)\kappa_2 \leq \frac{1}{30}$ [7]) оболочках вращения скорость деформации кручения пренебрежительно мала по сравнению со скоростью мембранной сдвиговой деформации: $\dot{\epsilon}_{12} = \xi_{12} + z\dot{\kappa}_{12} = \xi_{12}(1 + 2z\kappa_2) \approx \xi_{12}$. Поэтому при решении осесимметричной задачи РА тонких оболочек их можно рассматривать как безмоментные, если пренебрежительно малы и скорости деформаций изгиба $\dot{\kappa}_{11}$, $\dot{\kappa}_{22}$.

Если по-прежнему считать, что уравнения равновесия (1) проинтегрированы независимо от остальных решений задачи РА, то замкнутая система разрешающих уравнений состоит из (19) и соотношений

$$A_2 h_* \omega_k \cos \psi_k = A_2 (x_1^0) h_* (x_1^0) \omega_{0k} \cos \psi_{0k} = \Omega_{k*} = \text{const}, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (25)$$

где Ω_{k*} — задаваемые постоянные интегрирования, имеющие смысл суммарной площади поперечных сечений арматуры k -го семейства [6]; x_1^0 — значение переменной x_1 , определяющее кромку оболочки, на которой волокна k -го семейства входят в конструкцию. (Соотношения (25) получаются после интегрирования в осесимметричном случае уравнений (14).)

Для окончательного преобразования подсистемы (19), (25) исключим из уравнений (19) за счёт

(25) функции ω_k , тогда получим

$$\begin{aligned} \cos^2 \psi_m \left[2A_2 (2T_{11} - T_{22}) - \sum_k \sigma_k \Omega_{k*} (1 + 3 \cos 2\psi_k) / \cos \psi_k \right] + \sin^2 \psi_m \times \\ \times \left[2A_2 (2T_{22} - T_{11}) - \sum_k \sigma_k \Omega_{k*} (1 - 3 \cos 2\psi_k) / \cos \psi_k \right] + 6 \sin 2\psi_m \times \\ \times \left(A_2 T_{12} - \sum_k \sigma_k \Omega_{k*} \sin \psi_k \right) = 12 \left[A_2 h_* - \sum_k \Omega_{k*} / \cos \psi_k + h_0 G(T) \right] \xi_m / f(T), \\ \xi_m = f_m(\sigma_m) = \text{const}, \quad m = 1, 2, \dots, N; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\omega_k(x_1) = \Omega_{k*} / \left[A_2(x_1) h_*(x_1) \cos \psi_k(x_1) \right], \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (27)$$

Таким образом, в осесимметричном случае решение задачи РА безмоментных оболочек сводится к последовательному определению из (1) усилий в конструкции, а затем к решению на каждой итерации метода «секущего модуля» системы уравнений (26) относительно приближений углов армирования $\psi_k^{(l)}$. Если из замкнутой системы (26) определены функции $\psi_k^{(l)}$, то приближения интенсивностей армирования $\omega_k^{(l)}$ задаются соотношениями (27), а приближения $\sigma_{*ij}^{(l)}$ мембранных напряжений в связующем армированного слоя — равенствами (17), после чего с учётом (10), (18) можно построить следующее уточнение неизвестных функций $\psi_k^{(l+1)}$, $\omega_k^{(l+1)}$, $\sigma_{*ij}^{(l+1)}$ и т. д., пока итерационный процесс не сойдётся с требуемой точностью.

В частном случае, при $N = 1$ система (26) редуцируется в уравнение

$$\begin{aligned} 3A_2 (T_{11} - T_{22}) \cos^3 \psi_1 + \left\{ A_2 (2T_{22} - T_{11}) - 6 \left[A_2 h_* + h_0 G(T) \right] \xi_1 / f(T) \right\} \cos \psi_1 - \\ - 2\Omega_{1*} \left[\sigma_1 - 3\xi_1 / f(T) \right] = -6A_2 T_{12} \cos^2 \psi_1 \sin \psi_1, \end{aligned} \quad (28)$$

которое возведением в квадрат можно привести к алгебраическому уравнению 6-го порядка относительно $\cos \psi_1$ с коэффициентами, зависящими от Ω_{1*} . Следовательно, на каждой итерации метода «секущего модуля» уравнение (28) может иметь несколько решений, которые параметрически зависят от количества арматуры, внедряемой в конструкцию (от Ω_{1*}).

При отсутствии внешних нагрузок в окружном направлении ($T_{12}(x_1^0) = 0$, $p_2 \equiv 0$) в безмоментную оболочку целесообразно внедрять два семейства арматуры ($N = 2$), изготовленных из одного материала ($f_2(\sigma) = f_1(\sigma)$, $\sigma_2 = \sigma_1$) и уложенных меридионально-симметрично ($\psi_2 = -\psi_1$) с одинаковой интенсивностью ($\omega_2 = \omega_1$, $\Omega_{2*} = \Omega_{1*}$), что позволяет исключить возникновение скоростей сдвиговых деформаций установившейся ползучести ($\xi_{12} = 0$, см. (8), (17)). При этом в силу $T_{12} = 0$ и указанных особенностей армирования система двух уравнений (26) эквивалентна одному алгебраическому уравнению 4-го порядка относительно $\cos \psi_1$:

$$\begin{aligned} 4\sigma_1 \Omega_{1*} (3 \cos^4 \psi_1 - 3 \cos^2 \psi_1 + 1) - 3A_2 (T_{11} + T_{22}) \cos^3 \psi_1 - \left\{ A_2 (2T_{22} - T_{11}) - \right. \\ \left. - 6 \left[A_2 h_* + h_0 G(T) \right] \xi_1 / f(T) \right\} \cos \psi_1 = 12\Omega_{1*} \xi_1 / f(T), \quad \xi_1 = f_1(\sigma_1) = \text{const}. \end{aligned} \quad (29)$$

Уравнение (29) на каждой итерации также может иметь несколько решений относительно приближения $\psi_1^{(l)}$, параметрически зависящего от Ω_{1*} .

Если рассматривается задача о скручивании оболочки вращения ($T_{12} \neq 0$, $T_{11} = T_{22} = 0$), то в конструкцию по-прежнему целесообразно внедрять два семейства арматуры, изготовленных из одного материала ($f_1(\sigma) = f_2(\sigma)$, $f_k(\sigma) = -f_k(-\sigma)$, $k = 1, 2$) и уложенных меридионально-симметрично ($\psi_2 = -\psi_1$) с одинаковой интенсивностью ($\omega_2 = \omega_1$, $\Omega_{2*} = \Omega_{1*}$), причём напряжения в волокнах разных семейств противоположны по знаку и постоянны ($\sigma_2 = -\sigma_1 = \text{const}$). В этом случае получаем $\xi_{11} = \xi_{22} = 0$, а система двух уравнений (19) эквивалентна одному квадратному уравнению относительно $\sin 2\psi_1$:

$$h_* \sigma_1 \omega_1 \sin^2 2\psi_1 - T_{12} \sin 2\psi_1 + 2 \left[h_* (1 - 2\omega_1) + h_0 G(T) \right] \xi_1 / f(T) = 0. \quad (30)$$

Исключим из (30) за счёт (27) функцию ω_1 , тогда получим

$$\sigma_1 \Omega_{1*} (\cos^2 \psi_1 - \cos^4 \psi_1) + [A_2 h_* + h_0 G(T)] \xi_1 \cos \psi_1 / f(T) - \\ - 2\xi_1 \Omega_{1*} / f(T) = A_2 T_{12} \cos^2 \psi_1 \sin \psi_1, \quad \xi_1 = f_1(\sigma_1) = \text{const}, \quad \psi_2 = -\psi_1. \quad (31)$$

Возведением в квадрат уравнение (31) можно привести к алгебраическому уравнению 8-го порядка относительно $\cos \psi_1$, коэффициенты которого зависят от Ω_{1*} . Следовательно, уравнение (31) также может иметь несколько решений, которые параметрически зависят от количества арматуры, внедряемой в конструкцию.

Если рассмотреть уравнение (30) на кромке $x_1 = x_1^0$, где заданы краевые условия (15) для плотностей армирования, то на каждой итерации метода «секущего модуля» уравнение (30) замкнуто относительно приближения угла армирования $\psi_1^{(l)}$. Так как это уравнение является квадратным относительно $\sin 2\psi_1^{(l)}$, то при положительности его дискриминанта может иметь два корня $\psi_{[1]}^{(l)}, \psi_{[2]}^{(l)}$. Еще два корня, удовлетворяющие уравнению (30) при $\omega_1 = \omega_{01}$, получаются из равенств $\bar{\psi}_{[i]}^{(l)} = \frac{\pi}{2} - \psi_{[i]}^{(l)}$ ($i = 1, 2$). Следовательно, при скручивании безмоментной оболочки вращения на её кромке, где заданы краевые условия (15), можно получить четыре альтернативных РА-структуры.

Из всех решений системы (26) или уравнений (28)–(31) (с учётом (27)) решениями задачи РА будут только те действительные функции, которые удовлетворяют неравенствам $|\cos \psi_k| \leq 1$ или $|\sin 2\psi_k| \leq 1$ и физическим ограничениям (16). Варьируя в (26)–(31) величины ω_{0k}, Ω_{k*} , можно управлять РА-проектами безмоментных оболочек.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для начала реализации метода «секущего модуля» необходимо задать исходное приближение интенсивности касательных напряжений $T^{(0)}$. Это приближение можно получить по формулам (10), если положить, что скорости деформаций ползучести оболочки в нулевом приближении имеют порядок скоростей деформаций в равнонапряжённой арматуре, которые известны и определяются из (11) с учётом (13).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Выше был использован классический подход к проблеме безмоментного состояния оболочек, т. е. из рассмотрения были исключены уравнения совместности скоростей деформаций (6). Поэтому в таких оболочках в общем случае не может быть реализовано строго безмоментное состояние: $\dot{\kappa}_{ij} = 0$. Действительно, если задача РА оболочки решена и скорости мембранных деформаций ξ_{ij} известны из (8), то правые части уравнений (6) в общем случае будут отличны от нуля. А значит, замкнутая относительно $\dot{\kappa}_{ij}$ ($i, j = 1, 2$) линейная неоднородная система (6) (формально совпадающая при замене переменных $T_{11} = -\dot{\kappa}_{22}, T_{22} = -\dot{\kappa}_{11}, T_{12} = \dot{\kappa}_{12}$ с системой (1), общее решение которой известно [3, 4]) не может иметь нулевого решения даже при нулевых краевых условиях, заданных на кромках оболочки. Однако практическую пригодность результатов, полученных в настоящем параграфе, можно обосновать следующим образом. Воспользуемся возможностью управления РА-структурой оболочки за счёт варьирования функций ω_{0k} в краевых условиях (15) (или величин ω_{0k}, Ω_{k*} в (26)–(31)), тогда за счёт соотношений (8), (17) можно управлять и правыми частями уравнений (6), а следовательно, и скоростями изгибных деформаций на лицевых поверхностях оболочки ($z = \pm \frac{h_* + h_0}{2}$). Если удастся подобрать функции ω_{0k} (или величины $\Omega_{k*}, 1 \leq k \leq N$) так, чтобы скорости изгибных деформаций были пренебрежительно малы по сравнению со скоростями мембранных деформаций ($\max |\xi_{ij}| \gg \max \left| \frac{h_* + h_0}{2} \dot{\kappa}_{ij} \right|$), то можно считать, что в оболочке реализуется состояние, близкое к безмоментному, и результаты настоящей параграфа могут быть использованы на практике при проектировании безмоментных РА-оболочек, работающих в условиях установившейся ползучести. (Пример такого целевого управления РА-структурой безмоментной упругопластической оболочки приведён в [8]. Так как определяющие уравнения деформационной теории пластичности, использованной в [8], формально совпадают с соответствующими уравнениями теории течения установившейся ползучести, то аналогичная задача целевого управления может быть решена и в исследуемом случае установившейся ползучести оболочек.)

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В настоящем параграфе не учитывалось влияние массовых нагрузок. Для некоторых металлокомпозиций (таких, как медь – стальная проволока, никель – молибденовая проволока и др. [9]) объёмные плотности материалов фаз композиции отличаются незначительно. В таких случаях в правой части первого равенства (2) можно выделить малый параметр — относительную разность объёмных плотностей материалов фаз. Так как задача РА при этом становится регулярно возмущённой, то для её решения можно использовать общеизвестные методы теории возмущений,

причём в первом приближении получим распределённые массовые нагрузки в (1), (2), соответствующие однородному материалу одной из фаз композиции. После этого результаты настоящего параграфа могут быть использованы для определения соответствующих приближений решений задачи РА по методу теории возмущений.

3. Обсуждение результатов расчётов. В качестве примера рассмотрим задачу РА скручиваемой оболочки. (Такие элементы конструкций встречаются, например, в торсионных механизмах.) Пусть тонкая однослойная ($h_0 = 0$) оболочка вращения постоянной толщины $h_* = \text{const}$ скручивается усилиями, приложенными к её кромкам ($p_2 = 0$), тогда в (30), (31) с учётом (3) следует принять

$$T_{12} = h_* \sigma_{12}(x_1), \quad A_2 = R(x_1), \quad \sigma_{12} = \frac{R_0^2 \sigma_{12}^0}{R^2(x_1)},$$

где $R(x_1)$ — текущий радиус срединной поверхности оболочки; x_1 — осевая координата; σ_{12}^0 — значение мембранного напряжения σ_{12} на кромке $x_1 = x_1^0$; R_0 — значение радиуса оболочки на той же кромке. Предполагается, что в условиях установившейся ползучести поведение материалов всех фаз композиции подчиняется степенному закону $\xi = B\sigma^m$, связывающему скорость деформации ξ и напряжение σ в материале соответствующей фазы. При этом в (30), (31) следует учесть зависимости [2]

$$f(T) = B_0 T^{m_0-1}, \quad f_1(\sigma_1) = B_1 \sigma_1^{m_1}, \quad (32)$$

где B_0, m_0, B_1, m_1 — известные характеристики материалов связующего и арматуры.

Для проведения конкретных расчётов примем: $R_0 = 0,1$ м, $\sigma_1 = 200$ МПа, $\sigma_{12}^0 = 50$ МПа, $\omega_{01} = 0,3$, $m_0 = 2,16$, $B_0 = 3,19 \cdot 10^{-8}$ МПа $^{-m_0} \cdot \text{ч}^{-1}$, $m_1 = 6,24$, $B_1 = 6,32 \cdot 10^{-21}$ МПа $^{-m_1} \cdot \text{ч}^{-1}$ (характеристики материалов композиции соответствуют медной оболочке, армированной стальной проволокой [9, 10]).

Решение задачи РА скручиваемой цилиндрической оболочки			
№ решения	ψ_1 , рад	ω_1	ξ_{12} , ч $^{-1}$
1	0,4417	0,3	$0,1867 \cdot 10^{-5}$
2	1,129	0,3	$0,1867 \cdot 10^{-5}$
3	$0,1346 \cdot 10^{-2}$	0,3	$0,5359 \cdot 10^{-3}$
4	1,569	0,3	$0,5359 \cdot 10^{-3}$

В таблице приведены решения задачи РА для скручиваемой цилиндрической оболочки ($R(x_1) = R_0 = \text{const}$). Так как в этом случае напряжённое состояние в оболочке является однородным ($\sigma_{12}(x_1) = \sigma_{12}^0 = \text{const}$), то и решение задачи РА является однородным и определяется уравнением (30). При используемых входных данных задачи удалось получить все четыре решения уравнения (30), причём, как видно из последнего столбца таблицы, в третьем и четвёртом решениях скорость деформации ползучести (определяемая равенством $\xi_{12} = \frac{\dot{\epsilon}_1}{\sin 2\psi_1}$) на два порядка больше, чем в первом и втором решениях, хотя общий расход арматуры во всех проектах одинаков, так как $\omega_1 = 0,3$ для всех решений.

Если уравнение (30) обезразмерить делением на $h_* \sigma_1$, то в нём с учётом (32) можно выделить малый параметр $\lambda = \frac{B_1}{B_0}$. Исследование поведения корней уравнения (30) в зависимости от значений λ показывает, что при $\lambda \rightarrow 0$ скорость деформации ползучести ξ_{12} , соответствующая двум решениям, имеет конечный предел (эти решения задачи РА, согласно [8], будем называть «регулярными»; в таблице им соответствуют первое и второе решения), а ξ_{12} , соответствующая оставшимся двум решениям, неограниченно возрастает по модулю. Для последних решений уравнения (30) имеем: $\sin 2\psi_1 \rightarrow 0$ ($\psi_1 \rightarrow 0$ или $\psi_1 \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$) при $\lambda \rightarrow 0$, и, как следствие этого, $|\xi_{12}| \rightarrow \infty$ (такие решения условимся называть «сингулярными»; в таблице им соответствуют третье и четвёртое решения).

Аналогичными свойствами обладают и решения уравнений (28), (29), (31).

Так как в сингулярных решениях задачи РА скорость деформаций ползучести, как правило, существенно больше, чем в регулярных решениях, то с точки зрения длительности срока эксплуатации конструкции целесообразно использовать регулярные решения.

В качестве следующего примера рассмотрим решение задачи РА скручиваемой усеченной конической оболочки с углом конусности $\alpha = 0,1$ рад, имеющей длину в осевом направлении $L = 13R_0$. Остальные входные данные задачи оставим прежними. При этом $x_1^0 = \frac{R_0}{\text{tg}(\alpha/2)}$, $R(x_1) = x_1 \text{tg}(\alpha/2)$ ($x_1 \geq x_1^0$), x_1 — осевая координата.

На рис. 1–3 изображены зависимости $\psi_1(x)$, $\omega_1(x)$, $\xi_{12}(x)$ соответственно, где $x = \frac{x_1 - x_1^0}{R_0}$ — безразмерная осевая координата. Так как в случае конической оболочки напряжённое состояние неоднородно ($\sigma_{12}(x_1) \neq \text{const}$), то и структура РА является неоднородной по длине оболочки (см. рис. 1, 2).

Рис. 1. Зависимости углов армирования конической оболочки от продольной координаты

Рис. 2. Зависимости плотностей армирования конической оболочки от продольной координаты

Рис. 3. Зависимости скоростей деформации сдвига в конической оболочке от продольной координаты

В этом случае решение задачи определяется уравнениями (30), (31), причём на кромке $x_1 = x_1^0$ ($x = 0$) решение характеризуется значениями, приведёнными в таблице (номера кривых на рисунках соответствуют номерам решений в таблице).

Как видно из рисунков, для рассматриваемой конической оболочки существует лишь три (из четырёх возможных) решений задачи РА. Четвёртое решение существует лишь в малой окрестности кромки $x_1 = x_1^0$ (при $0 \leq x < 0,1$), т. е. может быть реализовано только в очень коротких оболочках. Если же угол конусности задать достаточно малым ($\alpha \ll 0,1$), то все четыре возможных решения реализуются и в длинных оболочках.

Так как кривая 2 на рис. 2 лежит ниже остальных линий, то второму решению соответствует оболочка с минимальным (из рассматриваемого множества решений) расходом арматуры. Согласно рис. 3, этому же решению соответствует РА-структура, обеспечивающая наименьшую скорость деформации ползучести конструкции. (На рис. 3 кривая 3 изображена не полностью, так как в окрестности кромки $x = 0$ скорость деформации в этом случае весьма велика; см. значение ξ_{12} в таблице, соответствующее третьему решению.)

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-08-00152-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Работнов, Ю. Н.* Введение в механику разрушения [Текст] / Ю. Н. Работнов. — М.: Наука. Физматлит, 1987. — 80 с.
2. *Качанов, Л. М.* Теория ползучести [Текст] / Л. М. Качанов. — М.: Физматгиз, 1960. — 456 с.
3. *Новожилов, В. В.* Линейная теория тонких оболочек [Текст] / В. В. Новожилов, К. Ф. Черных, Е. И. Михайловский. — Л.: Политехника, 1991. — 656 с.
4. *Огибалов, П. М.* Оболочки и пластины [Текст] / П. М. Огибалов, М. А. Колтунов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969. — 695 с.
5. *Немировский, Ю. В.* Ползучесть однородных и композитных оболочек [Текст] / Ю. В. Немировский // Актуальные проблемы механики оболочек: Тр. междунар. конф., посвящённой 100-летию проф. Х. М. Муштари, 90-летию проф. К. З. Галимова и 80-летию проф. М. С. Корнишина (Казань, 26–30 июня 2000 г.). — Казань: Новое знание, 2000. — С. 42–49.
6. *Немировский, Ю. В.* О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного попе-

речного сечения [Текст] / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский // Механика композиционных материалов и конструкций. — 1997. — Т. 3, № 2. — С. 20–40.

7. Григоренко, Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жёсткости [Текст] / Я. М. Григоренко. — Киев: Наук. думка, 1973. — 228 с.
8. Немировский, Ю. В. Рациональное проектирование армированных конструкций [Текст] / Ю. В. Немировский, А. П. Янковский. — Новосибирск: Наука, 2002. — 488 с.
9. Композиционные материалы. Справочник [Текст] / Под ред. Д. М. Карпиноса. — Киев: Наук. думка, 1985. — 592 с.
10. Писаренко Г. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие [Текст] / Г. С. Писаренко, Н. С. Можаровский. — Киев: Наук. думка, 1981. — 496 с.

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича
СО РАН, Новосибирск, Россия
nemirov@itam.nsc.ru

Поступила 06.02.2008

Yu. V. Nemirovskii, A. P. Yankovskii

EQUAL-STRESS REINFORCING MOMENTLESS METAL-COMPOSITES SHELLS FIBERS OF THE CONSTANT CROSS-SECTION, ACTING IN CONDITIONS OF THE STEADY-STATE CREEP

The problem equal-stress reinforcements of three-layer momentless shells by fibers of the constant cross-section, acting in conditions of the steady-state creep, is formulated. The analysis of systems of the solving equations is lead. A series of analytical solutions of an axially symmetric problem equal-stress reinforcements of envelopes of rotation is constructed. The possibility of existence of several alternative solutions of a task in view with which can be operated due to a variation of boundary values of compactness of reinforcing is shown. Concrete solutions are analysed.

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia
nemirov@itam.nsc.ru

Received 06.02.2008