Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Р. Гайсина, Аналог задачи Бицадзе–Самарского для гиперболического уравнения с двумя линиями вырождения, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2001, выпуск 12, 24–29

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu57>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 18:13:04

АНАЛОГ ЗАДАЧИ БИЦАДЗЕ - САМАРСКОГО ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

Для вырождающегося гиперболического уравнения поставлена и изучена краевая задача с нелокальным условием, содержащим обобщенный оператор дробного интегродифференцирования, носителем которого является характеристическая часть границы области. Используя преобразование Меллина, свойства композиции операторов дробного интегродифференцирования и теорию интегрального уравнения Вольтерра второго рода, доказана однозначная разрешимость исследуемой задачи.

Настоящая работа является продолжением исследований задач для гиперболического уравнения с двумя линиями вырождения, рассмотренных [1-6].

Характерной особенностью данной задачи является наличие в краевом условии обобщенного оператора дробного интегродифференцирования, введенного М.Сайго [7], имеющего следующий вид:

$$I_{0+}^{\alpha, \beta, \gamma} f(x) = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1-\frac{t}{x}\right) f(t) dt, \alpha > 0, \\ \frac{d^n}{dx^n} I_{0+}^{\alpha+n, \beta-n, \eta-n} f(x), \alpha \leq 0, n = [1-\alpha], \end{cases}$$

где $[a]$ - целая часть a .

Рассмотрим уравнение

$$xU_{xx} + yU_{yy} + \alpha U_x + \beta U_y = 0, \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1, \quad 1 < \beta < \frac{3}{2} \quad (1)$$

в области D , ограниченной характеристиками $AC: x+y=0; y \leq 0$; $BC: \sqrt{x} + \sqrt{-y} = 1$ и отрезком $[0,1]$.

Примем обозначения: $q_0(x)$ - аффикс, то есть точка пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки $(x,0)$, с характеристикой AC .

Аналог задачи Б-С (Бицадзе – Самарского):

Найти решение уравнения (1) из класса $U(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$U(x,0) = t(x), \quad x \in [0,1],$$

$$A(x)(I_{0+}^{a, \frac{3-\alpha-\beta}{2}, c} U[\theta_0(t)])(x) = B(x)U_y(x,0) + \varphi(x), \quad x \in (0,1), \quad (2)$$

где $t(x), j(x), A(x), B(x)$ - заданные функции, причем

$$A(x) = x^A A_1(x), \quad B(x) \neq 0, \quad \text{для } \forall x \in (0,1),$$

$$\tau(x), \varphi(x), A_1(x), B(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1),$$

$$\frac{1}{2} - \beta < a + 2c < \frac{\beta - \alpha - 1}{2}, \quad a > \frac{7}{2} - \beta, \quad \Delta \geq a + 2 - \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (3)$$

В характеристических координатах $\xi = \sqrt{x} - \sqrt{-y}$, $\eta = \sqrt{x} + \sqrt{-y}$ уравнение (1) выглядит следующим образом:

$$U_{\xi\eta} - \frac{\beta - \frac{1}{2}}{\xi - \eta} (U_{\xi} - U_{\eta}) + \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{\xi + \eta} (U_{\xi} + U_{\eta}) = 0.$$

Это обобщенное уравнение Эйлера-Дарбу-Пуассона. Для него решение задачи Коши:

$$U(x,0) = t(x), \quad x \in [0,1]; \quad \lim_{y \rightarrow 0-0} (-y)^b U_y(x,y) = n(x), \quad x \in (0,1)$$

имеет вид [8]:

$$\begin{aligned}
U(\xi, \eta) &= \gamma_1 (\eta - \xi)^{2-2\beta} (\eta + \xi)^{\frac{1}{2}-\alpha} \int_{\xi}^{\eta} \tau_1(t) t^{\alpha-\frac{1}{2}} [(t-\xi)(\eta-t)]^{\beta-\frac{3}{2}} \times \\
&\times F\left(\frac{3}{2}-\alpha, \alpha-\frac{1}{2}; \beta-\frac{1}{2}; \sigma\right) dt - \gamma_2 (\xi + \eta)^{\frac{1}{2}-\alpha} \int_{\xi}^{\eta} v_1(t) t^{\alpha-\frac{1}{2}} [(t-\xi)(\eta-t)]^{\frac{1}{2}-\beta} \times \\
&\times F\left(\alpha-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\alpha; \frac{3}{2}-\beta; \sigma\right) dt.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $\gamma_1 = \frac{2^{\alpha-\frac{1}{2}} \Gamma(2\beta-1)}{\Gamma^2(\beta-\frac{1}{2})}$, $\gamma_2 = \frac{2^{2\beta+\alpha-\frac{3}{2}} \Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(\frac{3}{2}-\beta)}$, $\sigma = \frac{(\eta-t)(t-\xi)}{2t(\xi+\eta)}$, $t_1(t) = t(t^2)$, $n_1(t) = n(t^2)$.

Воспользовавшись формулой [9]

$$F(a, 1-a; c; z) = (1-z)^{c-1} F\left(\frac{c-a}{2}, \frac{c+a-1}{2}; c; 4z(1-z)\right),$$

и соотношением [10]

$$I_{0+}^{a,b,c} f(x) = x^{-a-b-c} I_{0+}^{a,-a-c,-a-b} f(x),$$

на основании (4) находим

$$U[\theta_0(x)] = K_1 x^{1-\beta} \left(I_{0+}^{\beta-\frac{1}{2}, \frac{\alpha-\beta-1}{2}, \frac{\alpha-\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta-3}{2}} \tau(t) \right)(x) + K_2 \left(I_{0+}^{\frac{3}{2}-\beta, \frac{\alpha+\beta-3}{2}, \frac{\alpha+\beta-2}{2}, \frac{\alpha-\beta-1}{2}} t^{\frac{1}{2}-\beta} v(t) \right)(x), \tag{5}$$

где $K_1 = \gamma_1 2^{\frac{1}{2}-\beta} \Gamma(\beta-\frac{1}{2})$, $K_2 = -\gamma_2 2^{\beta-\frac{3}{2}} \Gamma(\frac{3}{2}-\beta)$.

Сведение к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода и разрешимость аналога задачи Б-С.

Подставляя (5) в краевое условие (2) и учитывая равенство [16]

$$I_{0+}^{a,b,c} \left(I_{0+}^{a,-b,g} f \right)(x) = x^{-a-g} \left(I_{0+}^{a+a,b-a,c-g-a} t^{b+g} f(t) \right)(x),$$

получим уравнение Вольтерра 2-го рода:

$$n_2(x) + \int_0^x K(x,t) n_2(t) dt = f(x), \tag{6}$$

где

$$K(x,t) = -\frac{A(x)}{B(x)} \frac{K_2 x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-a-2}}{\Gamma\left(a-\beta+\frac{3}{2}\right)} (x-t)^{a-\beta+\frac{1}{2}} F\left(3-\frac{\alpha+3\beta}{2}, \frac{1+\alpha-\beta}{2}-c; a-\beta+\frac{3}{2}; 1-\frac{t}{x}\right),$$

$$v_2(x) = x^{\frac{\alpha-\beta}{2}} v(x),$$

$$f(x) = -\frac{\varphi(x) x^{\frac{\alpha-\beta}{2}}}{B(x)} + \frac{A(x) K_1}{B(x)} x^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \left(I_{0+}^{a, \frac{3-\alpha-\beta}{2}, c} t^{1-\beta} \left(I_{0+}^{\beta-\frac{1}{2}, \frac{\alpha-\beta-1}{2}, \frac{\alpha-\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta-3}{2}} s^{\frac{1}{2}-\beta} \tau(s) \right)(t) \right)(x).$$

Соотношение (6) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно функции $n(x)$. Исследуем вопрос о его разрешимости.

При выполнении условий (3) с учетом известных свойств гипергеометрической функции [9] имеем ядро $K(x,t)$, непрерывное в квадрате $0 \leq x, t < 1$.

Выясним поведение правой части $f(x)$ уравнения (6). С этой целью рассмотрим интеграл:

$$\begin{aligned}
J_1(x) &= A(x) x^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \left(I_{0+}^{a, \frac{3-\alpha-\beta}{2}, c} t^{1-\beta} \left(I_{0+}^{\beta-\frac{1}{2}, \frac{\alpha-\beta-1}{2}, \frac{\alpha-\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta-3}{2}} s^{\frac{1}{2}-\beta} \tau(s) \right)(t) \right)(x) = \\
&= A(x) \frac{x^{\frac{\alpha-\beta}{2}-a}}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-t)^{a-1} F\left(a+\frac{3-\alpha-\beta}{2}, -c; a; 1-\frac{t}{x}\right)^{1-\beta} dt \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{t^{\frac{2-\alpha-\beta}{2}}}{\Gamma\left(\beta - \frac{1}{2}\right)} \int_0^t (t-s)^{\beta-\frac{3}{2}} F\left(\frac{\alpha+\beta-2}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}; \beta - \frac{1}{2}; 1 - \frac{s}{t}\right) s^{\frac{\alpha+\beta-3}{2}} \tau(s) ds = \\
& = A(x) \frac{x^{\frac{3}{2}-a}}{\Gamma(a)\Gamma\left(\beta - \frac{1}{2}\right)} \int_0^x s^{\frac{\alpha+\beta-3}{2}} \tau(s) ds \int_s^x t^{\frac{4-\alpha-3\beta}{2}} (x-t)^{a-1} (t-s)^{\beta-\frac{3}{2}} \times \\
& \times F\left(a + \frac{3-\alpha-\beta}{2}, -c; a; 1 - \frac{t}{x}\right) F\left(\frac{\alpha+\beta-2}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}; \beta - \frac{1}{2}; 1 - \frac{s}{t}\right) dt.
\end{aligned}$$

В силу равенства [9]

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-b} F(c-a, b; c; \frac{z}{z-1})$$

и замены $\sigma = \frac{x}{s}, t = xz$ имеем

$$\begin{aligned}
J_1(x) &= A(x) \frac{x^{\frac{5}{2}-a}}{\Gamma(a)\Gamma\left(\beta - \frac{1}{2}\right)} \int_0^x \tau(s) ds \sigma^{3-\alpha-\beta} \int_{\frac{1}{\sigma}}^1 z^{2-\alpha-\beta} (1-z)^{a-1} (z\sigma-1)^{\beta-\frac{3}{2}} \times \\
& \times F\left(a + \frac{3-\alpha-\beta}{2}, -c; a; 1-z\right) F\left(\frac{1-\alpha+\beta}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}; \beta - \frac{1}{2}; 1-z\sigma\right) dz.
\end{aligned}$$

Для вычисления внутреннего интеграла применим методику, разработанную О.И.Маричевым [11]. С этой целью введем в рассмотрение функцию:

$$K(\sigma) = \sigma^{3-\alpha-\beta} \int_0^\infty z^{2-\alpha-\beta} f_1(z\sigma) f_2(z) dz, \quad (7)$$

где

$$f_1(z\sigma) = (z\sigma-1)_+^{\beta-\frac{3}{2}} F\left(\frac{1-\alpha+\beta}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}; \beta - \frac{1}{2}; 1-z\sigma\right),$$

$$f_2(z) = (1-z)_+^{a-1} F\left(a + \frac{3-\alpha-\beta}{2}, -c; a; 1-z\right),$$

$$x_+^a = \begin{cases} x^a, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Для вычисления (7) используем свойство преобразования Меллина [11,12]

$$x^a \int_0^\infty t^b f_1(xt) f_2(t) dt \leftrightarrow f_1^*(s+a) f_2^*(1-s-a+b),$$

на основании которого

$$K^*(s) = f_1^*(s+3-a-b) f_2^*(-s).$$

Далее, применяя формулы [12]

$$(x-1)_+^{c-1} F(a, b; c; 1-x) \leftrightarrow \Gamma(c) \Gamma\left[\begin{matrix} 1+a-c-s, 1+b-c-s \\ 1-s, 1+a+b-c-s \end{matrix}\right],$$

$$\operatorname{Re} c > 0, \operatorname{Re} s < 1 + \operatorname{Re}(a-c), 1 + \operatorname{Re}(b-c),$$

$$(1-x)_+^{c-1} F(a, b; c; 1-x) \leftrightarrow \Gamma(c) \Gamma\left[\begin{matrix} s, c-a-b+s \\ c-a+s, c-b+s \end{matrix}\right],$$

$$\operatorname{Re} c > 0, \operatorname{Re} s > 0, \operatorname{Re}(s+c-a-b) > 0,$$

находим функцию

$$K^*(s) = \Gamma(a)\Gamma\left(\beta - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left[\frac{\alpha + \beta}{2} - 1 - s, -s, \frac{\alpha + \beta - 3}{2} - c - s\right] \\ \left[\alpha + \beta - 2 - s, \beta - 1 - s, a + c - s\right].$$

Используя последовательно соотношения [12]

$$x^\alpha g(x) \leftrightarrow g^*(s + \alpha),$$

$$(x-1)_+^{c-1} F_3(a, a', b, b'; c; 1-x; 1-\frac{1}{x}) \leftrightarrow \Gamma(c)\Gamma\left[\frac{1-a'-b'-s, 1+a-c-s, 1+b-c-s}{1-a'-s, 1-b'-s, 1+a+b-c-s}\right]$$

при $\operatorname{Re} c > 0, \operatorname{Re} s < 1 - \operatorname{Re}(a' + b'), 1 + \operatorname{Re}(a - c), 1 + \operatorname{Re}(b - c)$, имеем

$$K(\sigma) = \frac{\Gamma(a)\Gamma\left(\beta - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a + 2c + \beta - \frac{1}{2}\right)} \sigma^{\frac{3}{2} - a - 2c - \frac{\alpha + \beta}{2}} (\sigma - 1)_+^{a + 2c + \beta - \frac{3}{2}} \times \\ \times F_3\left(\frac{\beta - \alpha}{2}, c + \frac{\alpha + \beta - 1}{2}, \beta - 1, a + 2c - \frac{\alpha + \beta - 3}{2}; a + 2c + \beta - \frac{1}{2}; 1 - \sigma; 1 - \frac{1}{\sigma}\right), \quad (8)$$

где

$$F_3(a, a', b, b'; c; x; y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(a)_m (a')_n (b)_m (b')_n}{(c)_{m+n} m! n!} x^m y^n -$$

– гипергеометрическая функция Аппеля [9].

Тогда можно сделать вывод, что

$$J_1(x) = A(x) \frac{x^{\alpha - \frac{5}{2}}}{\Gamma(a)\Gamma\left(\beta - \frac{1}{2}\right)} \int_0^x \tau(s) K(\sigma) ds,$$

где $K(s)$ выражается формулой (8).

Исследуем $J_1(x)$ на непрерывность. Для этого осуществим замену $s = xt$, в результате которой $J_1(x)$ принимает вид

$$J_1(x) = A(x) \frac{x^{\alpha - \frac{3}{2}}}{\Gamma(a)\Gamma\left(\beta - \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 K\left(\frac{1}{t}\right) \tau(xt) dt.$$

В силу формулы [13]

$$F_3(a, a', b, b'; c; 1-x; 1-\frac{1}{x}) = \Gamma\left[\frac{c}{k, c-k}\right] x^{a'} \int_0^1 z^{a-1} (1-z)^{c-k-1} (1-z(1-x))^{-a'} \times \\ \times F(a, b; k; z(1-x)) F\left(a', -b' + c - k; c - k; \frac{(1-x)(1-z)}{1-z(1-x)}\right) dz,$$

где $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} k > 0$ и использованы формулы автотрансформации [9]

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z),$$

можно доказать, что гипергеометрическая функция Аппеля является сходящейся.

Оценим интеграл, входящий в состав $J_1(x)$:

$$\left| \int_0^1 K\left(\frac{1}{t}\right) \tau(xt) dt \right| \leq M \left| \int_0^1 t^{\frac{1}{2} - c - \beta} dt \right| \leq M \left| t^{\frac{3}{2} - c - \beta} \right|_0^1 = M_1,$$

где M, M_1 – константы, независимые от x, t .

Так как $\Delta + \alpha - \frac{3}{2} \geq 0$ выполняется, то можно сделать вывод, что $J_1(x)$ является непрерывной функцией на отрезке $[0, 1]$.

Из всего выше изложенного следует, что $f(x)$ непрерывна в целом. Значит интегральное уравнение Вольтерра (6) допускает единственное непрерывное решение.

Для окончательной разрешимости используемой задачи покажем, что решение уравнения (6) дифференцируемо в интервале $(0,1)$. С этой целью проинтегрируем по частям в интеграле в соотношении (6).

Положим

$$U = v_2(t),$$

$$V = -\frac{A(x)}{B(x)} \frac{K_2 x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-a-2}}{\Gamma\left(a-\beta+\frac{3}{2}\right)} \int (x-t)^{a-\beta+\frac{1}{2}} F\left(3-\frac{\alpha+3\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta+1}{2}-c; a-\beta+\frac{3}{2}; 1-\frac{t}{x}\right) dt.$$

Воспользуемся формулой [9]

$$\frac{d}{dz} [z^{c-1} F(a, b; c; z)] = (c-1) z^{c-2} F(a, b; c-1; z).$$

Тогда

$$V = \frac{A(x)}{B(x)} \frac{K_2 x^{\frac{\alpha-\beta-1}{2}}}{\left(a-\beta+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(a-\beta+\frac{3}{2}\right)} \left(1-\frac{t}{x}\right)^{a-\beta+\frac{3}{2}} F\left(3-\frac{\alpha+3\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta+1}{2}-c; a-\beta+\frac{3}{2}; 1-\frac{t}{x}\right)$$

Продифференцируем обе части полученного равенства по переменной x . В результате уравнение (6) преобразуется в уравнение

$$v_2'(x) + \int_0^x N(x, t) v_2'(t) dt = f'(x), \quad (9)$$

где

$$N(x, t) = \frac{K_2 x^{\frac{\alpha-\beta-1}{2}} \left(1-\frac{t}{x}\right)^{a-\beta+\frac{3}{2}}}{\left(a+\frac{3}{2}-\beta\right)\Gamma\left(a+\frac{3}{2}-\beta\right)B(x)} \left[\left(A'(x) - \frac{A(x)B'(x)}{B(x)} + \frac{\alpha-\beta-1}{2x} A(x) \right) \times \right. \\ \times F\left(3-\frac{\alpha+3\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta+1}{2}-c; a-\beta+\frac{5}{2}; 1-\frac{t}{x}\right) + A(x) \left(1-\frac{t}{x}\right)^{-1} \times \\ \left. \times F\left(3-\frac{\alpha+3\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta+1}{2}-c; a-\beta+\frac{3}{2}; 1-\frac{t}{x}\right) \right].$$

Ядро $N(x, t)$ является непрерывной функцией в квадрате $0 < x, t < 1$. Тогда можно сделать вывод, что уравнение (9) допускает единственное непрерывное решение. Значит интегральное уравнение Вольтерра (6) имеет решение дифференцируемое в интервале $(0,1)$.

Из всего выше изложенного следует, что аналог задачи Б-С для уравнения (1) однозначно разрешим.

Автор выражает глубокую благодарность своему руководителю О.А.Репину за постановку задачи и помощь в работе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хасанов А. О некоторых задачах типа задачи Бицадзе – Самарского для уравнения гиперболического типа // Краевые задачи для уравнений матем. физики и их приложения. Сб. научн. трудов Ташкент. 1984. С. 50-58.
2. Салахитдинов М.С., Исломов Б. О некоторых краевых задачах со смещением для уравнения $(-y)^m U_{xx} + x^n U_{yy} - \lambda^2 x^n (-y)^m U = 0$ // Некласс. уравнения матем. физики и задачи теории ветвления. Сб. научн. трудов. Ташкент. 1988. С. 24-34.
3. Репин О.А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Саратов: СарГУ. 1992. 161 с.
4. Репин О. А. О нелокальной краевой задаче с оператором М.Сайго для обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Интегральные преобразования и краевые задачи. Сб. научн. тр. Черновцы: Ин-т мат.-ки. 1996. Вып. 13. С. 175-181.

5. Ретин О.А. Задача со смещением для гиперболического уравнения с двумя линиями вырождения // Вестник Самар. гос. эконом. академии. 1999. №1. С 208-213.
6. Нахушев А.М. Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // ДАН СССР. 1969. Т.187. №4. С.736-739.
7. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions // Math. Rep. Kyushu Univ. 1978. Vol. 11. N 2. P.135-143.
8. Гордеев А.М. Некоторые краевые задачи для обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Волж. матем. сб. 1968. Вып. 6. Куйбышев. С. 56-61.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука. 1973.-296с.
10. Saigo M. A certain boundary value problem for the Euler – Poisson - Darboux equation // Math. Japan. 1979. Vol. 24. №4. P.377-385.
11. Маричев О.И. Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул) Минск: Наука и техника. 1978.-310с.
12. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск.: Наука и техника. 1987 – 688 с.
13. Saigo M. A. Maeda N. More generalization of fractional calculus // Transform. Methods. Functions. Varna. 1996. P. 386-400.