Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Стружанов, Е. Ю. Просвиряков, Растяжение с кручением. Сообщение 1. Свойства материала, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 1(), 36–44

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu570>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 09:11:43

УДК 539.3

В. В. Стружанов, Е. Ю. Просвиряков

РАСТЯЖЕНИЕ С КРУЧЕНИЕМ. СООБЩЕНИЕ 1: СВОЙСТВА МАТЕРИАЛА

Рассмотрено квазистатическое растяжение с кручением элемента материала в виде полого цилиндрического образца в условиях жёсткого нагружения, позволяющего учесть как упрочнение, так и разупрочнение. Определены пограничные состояния, то есть особые точки пути деформирования, в которых возможна потеря устойчивости процесса. Построены инкрементальные определяющие соотношения. Подробно исследован случай, когда существует потенциал напряжений.

Введение. Эксперименты, в которых осуществляется совместное растяжение с кручением образца, являются определяющими для проверки адекватности различных теорий деформирования материалов при сложном напряжённо-деформированном состоянии [1–3]. Однако в этих экспериментах исследуются только устойчивые состояния, когда материал находится на стадии упрочнения. Опытные данные по закритическому деформированию отсутствуют. Поэтому возникает необходимость в обстоятельном теоретическом исследовании процесса растяжения с кручением для определения закономерностей деформирования как на стадии упрочнения, так и на стадии разупрочнения. В данной работе, используя понятия образа процесса деформирования, введённого А. А. Ильюшиным [4], и отображения пространства деформаций в пространство напряжений, выписаны инкрементальные определяющие соотношения для материала специального трубчатого образца, подвергнутому совместному растяжению и кручению. Определены особые точки пути деформирования, в которых нарушается взаимная однозначность указанного отображения. Изложенная методика описания деформационных свойств проиллюстрирована на одном частном случае, когда вектор напряжений является градиентом некоторой потенциальной функции.

1. Образ процесса деформирования. Рассмотрим элемент материала в виде полого цилиндра, который подвергается совместному растяжению с кручением. Элемент имеет единичные высоту и средний радиус поперечного сечения, толщина стенки равна $\frac{1}{2\pi}$. В этом случае растягивающая сила по величине равна напряжению σ (площадь поперечного сечения равна единице), а удлинение — деформации ε . Кроме того, касательные напряжения и сдвиги можно заменить значениями касательного напряжения τ и сдвига γ на средней линии поперечного сечения, умноженными на соответствующие коэффициенты, определяемые внешним и внутренним диаметрами. Не нарушая общности дальнейших рассуждений, будем пренебрегать этими коэффициентами, то есть полагаем, что крутящий момент равняется τ , а угол закручивания γ .

Рис. 1. Образ процесса деформирования

Упорядоченные системы из двух вещественных чисел $\{\varepsilon, \gamma\}$ можно рассматривать как элементы двумерного евклидова пространства деформаций $\mathbb{R}_e^2$. В прямоугольной системе координат эти числа представляют собой компоненты радиус-векторов $\vec{e}$ точек, расположенных на плоскости $O\varepsilon\gamma$. Будем вести деформирование образца изотермически с чрезвычайно малой скоростью (квазистатически), жёстко контролируя величины деформаций (жёсткое нагружение), то есть задавая значения ε^x и γ^x . В этом случае конец радиус-вектора $\vec{e}^x$ (точка Y с координатами $(\varepsilon^x, \gamma^x)$) будет перемещаться по некоторой плоской непрерывной, в общем случае, кусочно-гладкой кривой x (рис. 1). Кривую x естественно назвать траекторией деформирования или образом процесса деформирования, а точку Y — изображающей точкой процесса.

Деформирование осуществляется под действием двух сил (напряжений) σ и τ . Упорядоченные системы вещественных чисел $\{\sigma, \tau\}$ являются элементами евклидова пространства напряжений $\mathbb{R}_p^2$. Посредством некоторого отображения, заданного функциями

$$\sigma^x = \beta(\varepsilon^x, \gamma^x), \quad \tau^x = \psi(\varepsilon^x, \gamma^x), \quad (1)$$

точкам кривой x ставятся в соответствие точки в пространстве $\mathbb{R}_p^2$, совокупность которых образует кривую нагружения, причём эта кривая, вообще говоря, может не обладать свойством непрерывности. Отметим, что на кривой x должна существовать точка, после достижения которой отображение (1) вырождается, то есть $\sigma^x = \tau^x = 0$ для любых значений $\{\varepsilon^x, \gamma^x\}$. Эта точка отвечает

разрушению материального элемента.

Перенесём вектор $\vec{p}^\varkappa$ с компонентами $\{\sigma^\varkappa, \tau^\varkappa\}$ в пространство $\mathbb{R}_\varepsilon^2$ и поместим его начало в изображающую точку Y (рис. 1). Тогда в результате проведённой схематизации процесс деформирования представляется медленным (квазистатическим) движением изображающей точки по заданной траектории $\varkappa$ под действием силы $\vec{p}^\varkappa$.

2. Особые точки кривой деформирования. Будем говорить, что гладкий участок $\varkappa^k$ кривой $\varkappa$ порождает непрерывно-дифференцируемое отображение $\chi^k: \mathbb{R}_\varepsilon^2 \rightarrow \mathbb{R}_p^2$, определяемое непрерывно дифференцируемыми функциями

$$\sigma = \sigma^k(\varepsilon, \gamma), \quad \tau = \tau^k(\varepsilon, \gamma), \quad \{\varepsilon, \gamma\} \in \mathbb{R}_\varepsilon^2, \quad \{\sigma, \tau\} \in \mathbb{R}_p^2, \quad (2)$$

если $\sigma = \sigma^\varkappa, \tau = \tau^\varkappa$ при $\{\varepsilon, \gamma\} \in \varkappa^k$.

Рассмотрим какое-либо отображение χ^k и запишем якобиан преобразования (2). Имеем

$$I_k = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix},$$

где $I_{11} = \frac{\partial \sigma^k}{\partial \varepsilon}, I_{12} = \frac{\partial \sigma^k}{\partial \gamma}, I_{21} = \frac{\partial \tau^k}{\partial \varepsilon}, I_{22} = \frac{\partial \tau^k}{\partial \gamma}$. В точках пространства $\mathbb{R}_\varepsilon^2$, где якобиан невырожден ($\text{rank } I_k = 2$), отображение χ^k есть гомеоморфизм (взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение) между окрестностью точки в $\mathbb{R}_\varepsilon^2$ и множеством точек $\{\sigma, \tau\}$, образованным значениями функций (2).

Если в некоторой точке $N(\varepsilon_N, \gamma_N) \in \mathbb{R}_\varepsilon^2$ якобиан вырожден ($\text{rank } I_k < 2$ или $\det I_k = 0$), то согласно теореме о неявной функции [5] решение уравнения $\chi^k(\vec{\varepsilon}) = \vec{p}$ в окрестности δ_N этой точки не является единственным для $\vec{p} \in \chi^k(\delta_N)$, хотя отображение χ^k остаётся однозначным. Такие точки назовём особыми точками отображения χ^k первого типа. При их отображении в пространство $\mathbb{R}_p^2$ на кривой нагружения образуется точка возврата. Если в точке $M(\varepsilon_M, \gamma_M) \in \mathbb{R}_\varepsilon^2$ якобиан неограничен, то есть $\det I_k^{-1} = 0$, то окрестность δ_M неоднозначно отображается в $\mathbb{R}_p^2$. Такие точки назовём особыми точками отображения χ^k второго типа. Они соответствуют точкам разрыва на кривой нагружения.

Точки кривой $\varkappa$, где $\det I^\varkappa = 0$ или $\det(I^\varkappa)^{-1} = 0$, образуют множество особых точек пути деформирования. Здесь $I^\varkappa$ — матрица Якоби отображения χ^k в точках кривой $\varkappa$.

Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из вырожденности якобиана $I^\varkappa$. Пусть в особой точке первого типа $\text{rank } I^\varkappa = 1$ и $I_{11}^\varkappa = I_{12}^\varkappa = 0$. Тогда особая точка кривой $\varkappa$ является также и критической точкой функции $\sigma(\varepsilon, \gamma)$. Если данная критическая точка изолированная (морсовского типа), то есть гессиан $H(\sigma)$ этой функции невырожден в критической точке ($\det H(\sigma) \neq 0$), то она может быть либо локальным максимумом, либо локальным минимумом, либо седловой точкой [5]. Допустим, что имеет место локальный максимум. Тогда после прохождения изображающей точкой Y особой точки на кривой $\varkappa$ в зависимости от вида пути деформирования функции $I_{11}^\varkappa$ и $I_{12}^\varkappa$ меняют знак с плюса на минус, либо одна из них становится отрицательной, а другая сохраняет равенство нулю. (Предполагается, что до достижения изображающей точкой особой точки эти функции были положительными). Таким образом, возрастание функции $\sigma(\varepsilon, \gamma)$ сменяется её убыванием при продолжающемся активном деформировании. Начинается так называемое деформационное разупрочнение, которое характеризуется физической (собственной) неустойчивостью материала в направлении растяжения.

Очевидно, что локальный минимум функции $\sigma(\varepsilon, \gamma)$ в особой точке определяет переход материала со стадии разупрочнения на стадию упрочнения в направлении растяжения.

При прохождении седловой точки в зависимости от пути $\varkappa$ возможно как сохранение собственной устойчивости (например, при движении по гребню седла), так и переход материала в состояние собственной неустойчивости в направлении растяжения.

В особой точке второго типа, по крайней мере, один из элементов якобиана обращается в бесконечность. Пусть это будет элемент $I_{11} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}$. Тогда при переходе через особую точку напряжение σ меняет своё значение скачкообразно. Если до особой точки и после неё $I_{11} < 0$, то это означает, что при росте деформации напряжение скачкообразно уменьшается. Этот процесс есть проявление неустойчивости собственной неустойчивости.

Отметим, что на стадии упругого деформирования особые точки отсутствуют. Отображение (1) не зависит от пути деформирования и определяется формулами $\sigma = E\varepsilon, \tau = G\gamma$ (E — модуль Юнга,

G — модуль сдвига). Тогда $I_{11} = E$, $I_{22} = G$, $I_{12} = I_{21} = 0$ ($E > 0$, $G > 0$). Якобиан является положительно определённой матрицей [6], что соответствует собственной устойчивости материала.

Рис. 2. Диаграмма деформирования при растяжении

В качестве примера рассмотрим одноосное растяжение ($\gamma = 0$). Отображение (1) имеет вид $\sigma^\varkappa = \sigma^\varkappa(\varepsilon)$. Оно задаёт диаграмму деформирования материала при растяжении (рис. 2). В этом случае пространство деформации есть $\mathbb{R}_\varepsilon^1$ и совпадает с прямой $O\varepsilon$, которая является путём деформирования $\varkappa$. Особыми точками на прямой $O\varepsilon$ при монотонном возрастании деформации являются ε_1 и ε_2 . В точке ε_1 имеем $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = 0$ (максимум функции σ). В окрестности этой точки каждому значению σ отвечают два значения ε (особая точка первого типа). Здесь осуществляется переход со стадии упрочнения на стадию разупрочнения. В точке ε_2 имеем $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = -\infty$. В окрестности данной точки каждому значению ε отвечают три значения σ (особая точка второго типа). После прохождения точки ε_2 напряжение скачкообразно уменьшается, то есть имеет место неустранимая собственная неустойчивость, которая проявляется независимо от вида нагружения (мягкого или жёсткого).

В точке ε_3 имеем $\sigma = 0$, то есть указанное выше отображение вырождается в нуль, что отвечает разрушению (фрагментации) материала.

Отметим, что путь нагружения проходит в пространстве $\mathbb{R}_p^1$ (ось $O\sigma$). При этом в точке σ_1 , отвечающей деформации ε_1 , имеет место точка возврата, а в точке σ_2 , отвечающей деформации ε_2 , — разрыв (рис. 2).

3. Признаки деформационных состояний. Под активным нагружением будем понимать такой процесс, при котором элементарная работа напряжений положительна, а именно, $\delta A = \vec{p} \times \delta \vec{e} > 0$, то есть угол между векторами $\vec{p}$ и $\delta \vec{e}$ острый. Здесь $\vec{p}$ — вектор силы в момент начала догружения, а догружение осуществляется посредством задания вектора $\delta \vec{e}$. Нейтральное нагружение определяет равенство $\delta A = 0$ (векторы $\vec{p}$ и $\delta \vec{e}$ ортогональны). Разгрузке отвечает неравенство $\delta A < 0$ (угол между векторами $\vec{p}$ и $\delta \vec{e}$ тупой). Отсюда при активном деформировании полная работа $\int_\varkappa \delta A$ есть возрастающая величина.

Далее полное приращение работы равно $\Delta A = \delta A + \alpha \delta \vec{p} \cdot \delta \vec{e}$ ($0 < \alpha < 1$). Когда при любом активном догружении полное приращение работы возрастает, то сопротивление материала увеличивается. Следовательно, материал находится в состоянии упрочнения. Полное приращение ΔA возрастает, когда $\delta \vec{p} \cdot \delta \vec{e} > 0$. Поэтому данное неравенство представляет собой условие общего упрочнения (упрочнения в целом). Если при любом активном нагружении выполняется неравенство $\delta \vec{p} \cdot \delta \vec{e} < 0$, то имеет место общее разупрочнение (разупрочнение в целом). Когда данное неравенство справедливо только для некоторых путей догружения, то будем говорить, что материал находится в состоянии частичного разупрочнения.

И, наконец, если при каком-либо догружении из некоторой точки кривой $\varkappa$ одновременно выполняется равенство $\delta A = 0$ и $\delta \vec{p} \cdot \delta \vec{e} = 0$, то это означает, что материал уже не оказывает сопротивления деформированию. Следовательно, он распадается (разрушается) на несвязанные между собой фрагменты. Однако следует заметить, что после разрушения не исключена возможность существования таких путей догружения, на которых связи между фрагментами каким-либо образом восстанавливаются.

4. Инкрементальные определяющие соотношения. Посредством отображения χ каждой точке из $\mathbb{R}_\varepsilon^2$ ставится в соответствие вектор $\vec{p}$ с компонентами из $\mathbb{R}_p^2$ (один или несколько). Найдём «скорость» изменения вектора $\vec{p}$ по направлению вектора $\vec{e}$. Имеем [7]

$$\frac{d\vec{p}}{d\vec{e}} = I.$$

Тогда в точках пути деформирования выполняется

$$d\vec{p}^\varkappa = I^\varkappa d\vec{e}^\varkappa \quad (3)$$

или

$$d\sigma^\varkappa = I_{11}^\varkappa d\varepsilon^\varkappa + I_{12}^\varkappa d\gamma^\varkappa, \quad d\tau^\varkappa = I_{21}^\varkappa d\varepsilon^\varkappa + I_{22}^\varkappa d\gamma^\varkappa \quad (4)$$

($d\sigma^\varkappa$, $d\tau^\varkappa$ — полные дифференциалы функций σ и τ , вычисленные в точках кривой $\varkappa$). Значения компонент якобиана представляют собой инкрементальные (мгновенные) модули материала в точках пути $\varkappa$, определяющие мгновенные свойства материала.

Характерная особенность соотношений (4) заключается в том, что догружение из некоторой точки пути деформирования, где $\det I^\varkappa \neq 0$, посредством задания приращения деформации в одном направлении (например, $d\gamma^\varkappa \neq 0$, $d\varepsilon^\varkappa = 0$) приведут к изменению (приращению) напряжений в обоих направлениях, то есть $d\sigma^\varkappa \neq 0$, $d\tau^\varkappa \neq 0$. Возникающее напряжение $d\sigma^\varkappa$ препятствует приращению деформации в направлении растяжения, которое имело бы место, если бы деформация в данном направлении была бы разрешена. Иными словами, в случае мягкого нагружения вместе с ростом деформации догрузки должен происходить дополнительный рост основной деформации. Отметим, что данный эффект зафиксирован и в экспериментах (см. эксперименты В. А. Свешниковой, приведённые в книге [8]). В том случае, когда якобиан имеет диагональный вид (как в упругости), то такой эффект невозможен.

Далее из уравнения (3) имеем

$$\vec{p}^\varkappa = \int_{\varkappa} I^\varkappa(\vec{e}^\varkappa) d\vec{e}^\varkappa.$$

Отсюда, если компоненты якобиана есть интегрируемые функции, то непрерывному участку кривой деформирования $\varkappa$ соответствует непрерывный же участок кривой нагружения в пространстве $\mathbb{R}_p^2$.

Возьмём теперь на кривой $\varkappa$ особую точку первого типа ($\det I^\varkappa = 0$). Рассмотрим участок кривой $\varkappa$, расположенный в её окрестности, по которому изображающая точка Y движется в направлении особой точки. Ясно, что этому участку соответствует непрерывная кривая в пространстве $\mathbb{R}_p^2$. То же самое имеем и после прохождения точкой Y особой точки. Как было установлено выше, в этом случае каждой точке в $\mathbb{R}_p^2$ отвечает несколько точек в $\mathbb{R}_e^2$ (на кривой $\varkappa$). Отсюда точка в пространстве $\mathbb{R}_p^2$, соответствующая особой кривой $\varkappa$ первого типа, должна быть точкой возврата. Если взять на кривой $\varkappa$ особую точку второго типа, то она должна порождать разрыв первого рода на кривой нагружения в пространстве $\mathbb{R}_p^2$.

Векторное поле $\vec{p}$, образованное отображением χ , можно разложить на сумму полярных векторов $\vec{p} = \vec{c} + \vec{r}$, где вектор $\vec{c}$ определяет потенциальное векторное поле ($\text{rot } \vec{c} = 0$, $\vec{c} = \text{grad } \Pi$, Π — скалярный потенциал векторного поля), а вектор $\vec{r}$ задаёт соленоидальное поле ($\text{div } \vec{r} = 0$, $\vec{r} = \text{rot } \vec{Q}$, $\vec{Q}$ — аксиальный вектор — потенциал соленоидального поля) [9]. Отсюда якобиан отображения $\chi: \mathbb{R}_e^2 \rightarrow \mathbb{R}_p^2$ равен

$$I = \frac{d\vec{c}}{d\vec{e}} + \frac{d\vec{r}}{d\vec{e}}$$

или

$$I = C + R = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix},$$

где $c_{11} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon^2}$, $c_{12} = c_{21} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon \partial \gamma}$, $c_{22} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \gamma^2}$, $r_{11} = \frac{\partial r_1}{\partial \varepsilon}$, $r_{12} = \frac{\partial r_1}{\partial \gamma}$, $r_{21} = \frac{\partial r_2}{\partial \varepsilon}$, $r_{22} = \frac{\partial r_2}{\partial \gamma}$ (r_1 и r_2 — компоненты вектора $\vec{r}$).

Таким образом, в каждый момент изображающая точка Y находится в двух полях — потенциальном и соленоидальном. Отметим, что вид этих полей, в общем случае, зависит от пути деформирования $\varkappa$ и при своём движении изображающая точка переходит из одних полей в другие.

Разложим, наконец, несимметричную матрицу в выражении для якобиана на симметричную и косимметричную матрицы. Тогда получаем

$$I = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{11} & \frac{(r_{12} + r_{21})}{2} \\ \frac{(r_{12} + r_{21})}{2} & r_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{(r_{12} - r_{21})}{2} \\ -\frac{(r_{12} - r_{21})}{2} & 0 \end{pmatrix} = C + R^S + R^A$$

и, следовательно,

$$d\vec{p} = C d\vec{e} + R^S d\vec{e} + R^A d\vec{e}.$$

Отсюда в точках кривой деформирования имеем

$$d\sigma^\varkappa = (c_{11} + r_{11}) d\varepsilon^\varkappa + \left[c_{12} + \frac{(r_{12} + r_{21})}{2} + \frac{(r_{12} - r_{21})}{2} \right] d\gamma^\varkappa,$$

$$d\tau^\kappa = \left[c_{21} + \frac{(r_{12} + r_{21})}{2} - \frac{(r_{12} - r_{21})}{2} \right] d\varepsilon^\kappa + (c_{22} + r_{22}) d\gamma^\kappa$$

или

$$\begin{aligned} d\sigma^\kappa &= (c_{11} + r_{11}^S) d\varepsilon^\kappa + (c_{12} + r_{12}^S) d\gamma^\kappa + r_{12}^A d\gamma^\kappa, \\ d\tau^\kappa &= (c_{21} + r_{21}^S) d\varepsilon^\kappa + (c_{22} + r_{22}^S) d\gamma^\kappa + r_{21}^A d\varepsilon^\kappa. \end{aligned} \quad (5)$$

Из выражений (5) следует, что использование в уравнениях, связывающих приращения напряжений и деформаций, симметричных матриц неявно предполагает наличие потенциала для напряжений (потенциальность силового поля).

5. Потенциальное поле. Пусть деформирование происходит в потенциальном поле с потенциалом $\Pi(\varepsilon, \gamma)$. Тогда отображение χ определяют формулы $\sigma = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon}$, $\tau = \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma}$, то есть $\vec{p} = \text{grad} \Pi$. В этом случае вид отображения не зависит от пути деформирования. Вектор $\vec{p}$ перпендикулярен силовым линиям поля в пространстве $\mathbb{R}_e^2$ и направлен в сторону возрастания поля. Якобиан I отображения χ равняется гессиану функции Π , то есть

$$I = H(\Pi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \gamma \partial \varepsilon} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \gamma^2} \end{pmatrix}.$$

Инкрементальные соотношения, связывающие приращения напряжений и деформаций, имеют вид

$$d\sigma = c_{11} d\varepsilon + c_{12} d\gamma, \quad d\tau = c_{21} d\varepsilon + c_{22} d\gamma,$$

где значение компонент гессиана H подсчитывается в точке, из которой происходит догружение. И, наконец, работа напряжений

$$A = \int_{\kappa} \sigma d\varepsilon + \tau d\gamma = \Pi(\varepsilon, \gamma) - \Pi(0, 0) = \Pi(\varepsilon, \gamma),$$

так как подынтегральное выражение является полным дифференциалом ($\frac{\partial \sigma}{\partial \gamma} = \frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varepsilon \partial \gamma}$.) Таким образом, работа напряжений в данном случае определяется потенциальной функцией Π .

Отсюда элементарная работа напряжений равна $dA = d\Pi = \vec{p} \cdot d\vec{e} = \sigma d\varepsilon + \tau d\gamma$. При активном нагружении $d\Pi > 0$, разгрузке $-d\Pi < 0$, нейтральном нагружении $-d\Pi = 0$. Полное приращение работы определяет выражение $\Delta A = dA + \alpha d\vec{p} \cdot d\vec{e}$. Представим скалярное произведение в данном равенстве в виде квадратичной формы $d\vec{p} \cdot d\vec{e} = d\sigma d\varepsilon + d\tau d\gamma = (c_{11} d\varepsilon + c_{12} d\gamma) d\varepsilon + (c_{21} d\varepsilon + c_{22} d\gamma) d\gamma = d\vec{e}^T H(\Pi) d\vec{e}$. Если $d\vec{p} \cdot d\vec{e} > 0$, то в изображающей точке, из которой происходит догружение, гессиан функции Π положительно определен и функция Π строго выпукла вниз [6], что отвечает устойчивому характеру процесса деформирования (упрочнение). Когда при догружении в любом направлении гессиан отрицательно определен ($d\vec{p} \cdot d\vec{e} < 0$), то функция Π строго выпукла вверх, что отвечает общей неустойчивости процесса деформирования (общее разупрочнение). Если же гессиан знаконеопределен, то функция Π не выпуклая и не вогнутая, то есть имеет место седловая точка. При одних путях догружения, исходящих из данной изображающей точки, тело упрочняется, при других — разупрочняется (частичное разупрочнение). Заметим, что состояние разупрочнения есть состояние собственной неустойчивости материала (физической неустойчивости), при которой непрерывность процесса деформирования возможна только при специальных условиях нагружения, подавляющих данную неустойчивость.

Используя критерий Сильвестра [10], находим, что матрица $H(\Pi)$ положительно определена, если

$$c_{11} > 0, \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0,$$

и отрицательно определена, если

$$c_{11} < 0, \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0.$$

В остальных случаях при $\det H(\Pi) = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \neq 0$ матрица $H(\Pi)$ знаконеопределена.

Известно [6], что собственные числа положительно определенной симметричной матрицы с действительными элементами — положительны, отрицательно определенной — отрицательны, а у знаконеопределенной матрицы они имеют разные знаки. Отметим, что при $\det H(\Pi) \neq 0$ перечисленные

случаи исчерпывают все возможные варианты, так как иначе по крайней мере одно собственное число должно обращаться в нуль и, следовательно, $\det H(\Pi) = 0$. Оценим знаки собственных чисел, используя критерий Рауса—Гурвица [11]. Характеристическое уравнение для матрицы $H(\Pi)$ имеет вид

$$k^2 - (c_{11} + c_{22})k + c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 0.$$

Составим последовательность [11]:

$$h_0 = 1, \quad h_1 = -(c_{11} + c_{22}), \quad h_2 = -(c_{11} + c_{22}) \begin{vmatrix} -(c_{11} + c_{22}) & 1 \\ 0 & c_{11}c_{22} - c_{12}^2 \end{vmatrix}, \quad h_3 = 0, \dots$$

Число положительных корней характеристического уравнения равно числу перемены знаков в данной последовательности. Значит неравенства $k_1, k_2 > 0$ имеют место при $c_{11} + c_{22} > 0$ и $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$ (матрица $H(\Pi)$ положительно определена). Неравенства $k_1, k_2 < 0$ имеют место при $h_1, h_2 > 0$, то есть $c_{11} + c_{22} < 0$ и $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$ (матрица $H(\Pi)$ отрицательно определена). Неравенства $k_1 > 0, k_2 < 0$ — при $c_{11} + c_{22} > 0, c_{11}c_{22} - c_{12}^2 < 0$, а неравенства $k_1 < 0, k_2 > 0$ — при $c_{11} + c_{22} < 0, c_{11}c_{22} - c_{12}^2 < 0$ (матрица $H(\Pi)$ знаконеопределена).

Отсюда, опираясь на данные два критерия, можно утверждать, что материал при одновременном растяжении и кручении подвержен общему упрочнению, когда $c_{11}, c_{22} > 0$ и $c_{11}c_{22} > c_{12}^2$ и общему разупрочнению, когда $c_{11}, c_{22} < 0$ и $c_{11}c_{22} > c_{12}^2$. Частичное разупрочнение имеет место в следующих случаях:

$$\begin{aligned} c_{11} > 0, \quad c_{22} < 0, \quad |c_{11}| > |c_{22}|; \\ c_{11} < 0, \quad c_{22} > 0, \quad |c_{22}| > |c_{11}|; \\ c_{11} < 0, \quad c_{22} < 0, \quad c_{11}c_{22} < c_{12}^2; \\ c_{11} > 0, \quad c_{22} < 0, \quad |c_{22}| > |c_{11}|; \\ c_{11} < 0, \quad c_{22} > 0, \quad |c_{11}| > |c_{22}|. \end{aligned} \quad (6)$$

Наконец, в особых точках отображения χ гессиан $H(\Pi)$ вырожден, то есть $\det H(\Pi) = 0$ (особая точка первого типа). Отметим, что при неизменности потенциала Π возможны только особые точки первого типа. Особые точки второго типа могут появиться тогда, когда потенциал Π изменяется в зависимости от пути деформирования. Тогда изображающая точка переходит из одного потенциального поля в другое и при скачкообразном изменении поля возникают особые точки второго типа.

В качестве примера рассмотрим потенциал

$$\Pi(\varepsilon, \gamma) = \begin{cases} \frac{\sin(a(E\varepsilon^2 + G\gamma^2))}{2a}, & \text{если } (\varepsilon, \gamma) \in V; \\ 0, & \text{если } (\varepsilon, \gamma) \notin V, \end{cases}$$

где $a = \frac{50\pi}{E}$, $E = 2 \cdot 10^4$ кг/мм², $G = 7,7 \cdot 10^4$ кг/мм², $V = \{\varepsilon, \gamma : \varepsilon, \gamma \geq 0, E\varepsilon^2 + G\gamma^2 \leq \frac{\pi}{2a}\}$.

Тогда

$$\sigma(\varepsilon, \gamma) = \begin{cases} E\varepsilon \cos(a(E\varepsilon^2 + G\gamma^2)), & \text{если } (\varepsilon, \gamma) \in V; \\ 0, & \text{если } (\varepsilon, \gamma) \notin V, \end{cases} \quad (7)$$

$$\tau(\varepsilon, \gamma) = \begin{cases} G\gamma \cos(a(E\varepsilon^2 + G\gamma^2)), & \text{если } (\varepsilon, \gamma) \in V; \\ 0, & \text{если } (\varepsilon, \gamma) \notin V. \end{cases} \quad (8)$$

Формулы (7) и (8) определяют поверхности, показанные соответственно на рис. 3 и рис. 4. На рис. 5 изображены линии уровня потенциала, которые задаются формулой: $E\varepsilon^2 + G\gamma^2 = S$, где $S \in [0, 200]$. Кривая I — это линия уровня, в точках которой детерминант матрицы Гессе $H(\Pi)$ обращается в нуль ($S = 81,49$). Кривая II — линия уровня, в точках которой напряжения обращаются в нуль ($S = 200$). Линия уровня I разделяет в пространстве $\mathbb{R}_e^2$ области устойчивого и неустойчивого деформирования материала.

Инкрементальные модули (компоненты матрицы Гессе) определяются выражениями

$$\begin{aligned} c_{11} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} &= \begin{cases} E \cos(a(E\varepsilon^2 + G\gamma^2)) - 2aE\varepsilon^2 \sin(a(E\varepsilon^2 + G\gamma^2)), & \text{если } (\varepsilon, \gamma) \in V, \\ 0, & \text{если } (\varepsilon, \gamma) \notin V; \end{cases} \\ c_{22} = \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} &= \begin{cases} G \cos(a(E\varepsilon^2 + G\gamma^2)) - 2aG^2\gamma^2 \sin(a(E\varepsilon^2 + G\gamma^2)), & \text{если } (\varepsilon, \gamma) \in V, \\ 0, & \text{если } (\varepsilon, \gamma) \notin V; \end{cases} \end{aligned}$$

$$c_{12} = \frac{\partial \sigma}{\partial \gamma} = \frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon} = c_{21} = \begin{cases} -2aEG\varepsilon\gamma \sin(a(E\varepsilon^2 + G\gamma^2)), & \text{если } (\varepsilon, \gamma) \in V, \\ 0, & \text{если } (\varepsilon, \gamma) \notin V. \end{cases}$$

Для линии уровня ($S = 170$) в точках 1, 2, 3 (рис. 5), где $\varepsilon = 0,04$, $\gamma = 0,134$ (точка 1), $\varepsilon = \gamma = 0,0783$ (точка 2), $\varepsilon = 0,085$, $\gamma = 0,056$ (точка 3), соответственно имеем наборы следующих значений инкрементальных модулей:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 4057,94; & c_{22} &= -17960,9; & c_{12} &= -3474,41; \\ c_{11} &= -32826,8; & c_{22} &= -3760,26; & c_{12} &= -14435,8; \\ c_{11} &= -44818,7; & c_{22} &= 856,64; & c_{12} &= -6823,65. \end{aligned}$$

Проверяя выполнение неравенств (6), находим, что в этих точках материал находится на стадии частичного разупрочнения. Используя инкрементальные соотношения, можно найти области возрастания и убывания приращений напряжений при догрузении по различным путям из данных точек. Они показаны на рис. 6–8.

Отметим следующий факт. Если вести чистое растяжение ($\gamma = 0$, $d\gamma = 0$), то, во-первых $c_{12} = c_{21} = 0$, а, во-вторых, из инкрементальных соотношений вытекает, что $d\tau = 0$, $d\sigma \neq 0$. Если вести чистое скручивание ($\varepsilon = 0$, $d\varepsilon = 0$), то $c_{12} = c_{21} = 0$, $d\sigma = 0$, $d\tau \neq 0$. Таким образом, напряженное состояние в обоих случаях будет одноосным.

Наконец рассмотрим деформирование по различным путям и их отображение в пространстве напряжений. Возьмём для определённости три пути, а именно, пропорциональный путь (прямая OAD), путь с изломом в области упрочнения (ломаная OAB) и путь с изломом в области разупрочнения (ломаная OCK) (рис. 9).

Рис. 3. Поверхность, отвечающая двумерной функции $\sigma(\varepsilon, \gamma)$

Рис. 4. Поверхность, отвечающая двумерной функции $\tau(\varepsilon, \gamma)$

Рис. 5. Линии уровня потенциала

Рис. 6. Области возрастания и убывания приращений напряжений при догрузении из точки 1

Рис. 7. Области возрастания и убывания приращений напряжений при догрузении из точки 2

Рис. 8. Области возрастания и убывания приращений напряжений при догрузении из точки 3

Рис. 9. Пути нагружения

Рис. 10. Пути нагружения при пропорциональном деформировании $OCN - NCO$ и при изломе в области упрочнения ($OCN - NCKO$)

В результате отображения (7), (8) этих путей в пространство напряжений получаем следующие пути нагружения. Пропорциональный путь до точки N (точка пересечения прямой OD и кривой I особых точек используемого отображения) отображается в прямую ON (рис. 10). Отрезок пути ND — в прямую NO , то есть путь нагружения возвращается в начало координат по той же прямой. При изломе пути деформирования в точке C (рис. 9) путь нагружения сначала возвращается из точки N в точку C по прямой NC , а после излома он искривляется и по кривой CKO возвращается в начало координат (рис. 10). Если излом происходит в области упрочнения, то отрезок OA пути деформирования (рис. 9) отображается в прямую OA (рис. 11).

Рис. 11. Путь нагружения при изломе траектории деформирования в области упрочнения

После излома путь нагружения искривляется и после достижения точки M (рис. 11), соответствующей точке M (рис. 9), где путь деформирования пересекает кривую особых точек, по кривой MO возвращается в начало координат. Таким образом, прямолинейному отрезку траектории деформации после точки излома соответствует криволинейный отрезок траектории нагружения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-08-00125)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аннин, Б. Д. Поведение материалов в условиях сложного нагружения [Текст] / Б. Д. Аннин, В. М. Жигалкин. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. — 342 с. — ISBN 5-7692-0297-1.
2. Малинин, Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести [Текст] / Н. Н. Малинин. — М.: Машиностроение, 1968. — 400 с.
3. Жуков, А. М. Некоторые особенности поведения материалов при упругопластическом деформировании [Текст] /

- А. М. Жуков; В кн.: Вопросы теории пластичности. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — 30–57 с.
4. *Ильюшин, А. А.* Пластичность [Текст] / А. А. Ильюшин. — М.: Изд-во АН СССР, 1963. — 272 с.
 5. *Гилмор, Р.* Прикладная теория катастроф [Текст] / Р. Гилмор. — М.: Мир, 1984. — 350 с.
 6. *Хорн, Р.* Матричный анализ [Текст] / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — М.: Мир, 1989. — 655 с.
 7. *Лурье, А. И.* Теория упругости [Текст] / А. И. Лурье. — М.: Наука, 1970. — 939 с.
 8. *Писаренко, Г. С.* Сопротивление материалов деформированию и разрушению при сложном напряжённом состоянии [Текст] / Г. С. Писаренко, А. А. Лебедев. — Киев: Наукова думка, 1969. — 211 с.
 9. *Кошляков, Н. С.* Уравнения в частных производных математической физики [Текст] / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. — М.: Высш. шк., 1970. — 712 с.
 10. *Беллман, Р.* Введение в теорию матриц [Текст] / Р. Беллман. — М.: Наука, 1969. — 368 с.
 11. *Корн, Г.* Справочник по математике [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. — М.: Наука, 1968. — 720 с.

Институт машиноведения УрО РАН;
Уральский государственный университет, г. Екатеринбург
stru@imach.uran.ru

Поступила 25.12.2007

V. V. Struzhanov, E. Yu. Prosviryakov

TENSION WITH TORSION. PART 1. MATERIAL PROPERTIES

Quasistatic tension with torsion of hollow cylindrical element of material under rigid loading taking into account both hardening and softening is considered. The external conditions corresponding the specific points deforming path where the stability failure can happen one determined. The incremental constituent relations are developed. The case where stress potential exists is studied in details.

Institute of Engineering Science, Ural Branch, Russian Academy of Sciences;
Ural State University, Yekaterinburg, Russia
stru@imach.uran.ru

Received 25.12.2007