Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Хромов, А. А. Буханько, О. В. Патлина, Е. П. Кочеров, Растяжение полосы с симметричными угловыми вырезами, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 1(), 53–58

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu572>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 07:18:56

УДК 539.3

А. И. Хромов, А. А. Буханько, О. В. Патлина, Е. П. Кочеров

РАСТЯЖЕНИЕ ПОЛОСЫ С СИММЕТРИЧНЫМИ УГЛОВЫМИ ВЫРЕЗАМИ

Рассматривается пластическое течение идеальной жёсткопластической полосы с симметричными V-образными вырезами, приводящее к затуплению выреза при одноосном растяжении.

Задача о растяжении полосы с угловыми вырезами без закругления рассматривалась авторами в работах [1, 2], где предполагалось, что вершина углового выреза остаётся острой. Ниже рассматриваются пластические течения полосы с вырезами общего вида, которые приводят к возможности описания процесса затупления углового выреза.

1. Рассмотрим задачу о растяжении идеальной жёсткопластической полосы с симметричным угловым вырезом и со скруглением некоторой поверхностью Σ на участке AFB (рис. 1) и прямолинейными границами на участках AC и BD .

Пусть верхний и нижний жёсткие концы полосы движутся поступательно со скоростями $V = 1$ соответственно вверх и вниз. Предполагая симметричность пластического течения относительно осей Ox и Oy , будем рассматривать только правую часть полосы. Предположим так же, что структура поля линий скольжения в пластической области остаётся неизменной: во внутренней области AEB оба семейства линий скольжения криволинейны и определяются поверхностью Σ на участке AB ; во внешней пластической области одно или два семейства линий скольжения прямолинейны и определяются прямолинейными участками углового выреза (AC и BD).

Введём, следуя [3], криволинейную систему координат α, β , связанную с полем линий скольжения:

$$\varphi = \alpha + \beta, \quad \frac{p}{2k} = \beta - \alpha + \frac{p_0}{2k}, \quad (1)$$

где φ — угол между касательной к α -линии и осью Ox ; p, p_0 — гидростатическое давление, соответственно, в любой точке пластической области и в начале координат. В плоскости α, β пластическая область изображается треугольником AEB (рис. 2). Начало координат выбрано таким образом, что значение координаты β в точке E :

$$\beta_E = 0, \quad \alpha_E = \frac{\pi}{4}. \quad (2)$$

Участки пластической области, содержащие криволинейные линии скольжения, отображаются на отрезки осей координат AE и BE . Поля ли-

Рис. 1. Поле линий скольжения

Рис. 2. Изображение пластической области в плоскости характеристик

ний скольжения и скоростей перемещений определяются следующими системами уравнений [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - v = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial \beta} + u = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial \beta} - S = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha} + R = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где u, v — проекции скоростей перемещений на линии α, β , соответственно; R, S — радиусы кривизны линий α, β .

Граничные условия для скоростей на жёсткопластической границе имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{на } CKLO : \quad & v = V \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{4} + \delta \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}; \\ \text{на } DK'L'O : \quad & u = -V \sin \varphi, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} - \delta. \end{aligned} \quad (4)$$

В силу симметричности пластического течения относительно оси Ox на ней выполняется условие (рис. 1):

$$\text{на } FEO : \quad u + v = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad y_F(t) \equiv 0. \quad (5)$$

Если рассматривать верхнюю четверть области пластического течения, то второе граничное условие (4) может быть заменено на (5).

В процессе пластического течения свободная поверхность $\Sigma(t)$ будет изменять своё положение: прямолинейные участки AC и BD будут двигаться вместе с треугольниками ACK и $BK'D$ как жёсткое целое вдоль линий CK и $K'D$. Заметим, что уравнения (3) для компонент скоростей перемещений u, v имеют место только для областей, где оба семейства линий скольжения криволинейны [3]. В областях, где одно или оба семейства линий скольжения прямолинейны, выполняются соотношения Гейрингера:

$$\begin{aligned} \text{на линии } \alpha : \quad & du - v d\varphi = 0, \\ \text{на линии } \beta : \quad & dv + u d\varphi = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как вдоль прямолинейных линий скольжения $d\varphi = 0$, то компоненты скоростей u и v вдоль соответствующих линий скольжения будут постоянны.

Из (6) следует, что в выбранной неподвижной системе координат xOy граничные условия (4) останутся неизменными, т. е.

$$\begin{aligned} \text{на } AE : \quad & v = \frac{\sqrt{2}}{2} V \left[\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} V \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)^i, \quad \delta - \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}; \\ \text{на } BE : \quad & u = -\frac{\sqrt{2}}{2} V (\cos \beta - \sin \beta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} V \sum_{i=0}^{\infty} b_i \beta^i, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} - \delta. \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что в физической плоскости xOy (рис. 1) с течением времени линии AE и BE изменяют своё положение, но в плоскости характеристик α, β (рис. 2) граничные условия (7) ставятся на одних и тех же линиях AE и BE . Связь между образами пластической области в этих плоскостях устанавливается с помощью второй группы уравнений (3) для радиусов кривизны R, S и заданием образа оси симметрии пластического течения (оси Ox) в виде линии EF в плоскости α, β . В данной постановке задачи граничное условие (5) не зависит от времени t .

Решение краевой задачи (3), (7) для скоростей перемещений может быть представлено в виде двойных степенных рядов [4]:

$$u(\alpha, \beta) = \frac{V}{\sqrt{2}} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{U_{mn}}{m!n!} \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)^m \beta^n, \quad v(\alpha, \beta) = \frac{V}{\sqrt{2}} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{V_{mn}}{m!n!} \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)^m \beta^n. \quad (8)$$

Коэффициенты U_{mn}, V_{mn} можно записать в виде

$$\begin{aligned} U_{mn} &= (-1)^m \frac{b_{n-m}}{m!n!}, \quad m - n \leq 0; & V_{mn} &= (-1)^n \frac{a_{m-n}}{m!n!}, \quad m - n \geq 0; \\ U_{mn} &= (-1)^n \frac{a_{m-n-1}}{m!n!}, \quad m - n > 0; & V_{mn} &= (-1)^{m+1} \frac{b_{n-m-1}}{m!n!}, \quad m - n < 0; \\ U_{0n} &= \frac{b_n}{n!}, & V_{m0} &= \frac{a_m}{m!}. \end{aligned}$$

и свести в табл. 1 и табл. 2 соответственно.

Таблица 1

Значения коэффициентов U_{mn}						
$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5
0	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
1	a_0	$-b_0$	$-b_1$	$-b_2$	$-b_3$	$-b_4$
2	a_1	$-a_0$	b_0	b_1	b_2	b_3
3	a_2	$-a_1$	a_0	$-b_0$	$-b_1$	$-b_2$
4	a_3	$-a_2$	a_1	$-a_0$	b_0	b_1
5	a_4	$-a_3$	a_2	$-a_1$	a_0	$-b_0$

Таблица 2

Значения коэффициентов V_{mn}						
$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5
0	a_0	$-b_0$	$-b_1$	$-b_2$	$-b_3$	$-b_4$
1	a_1	$-a_0$	b_0	b_1	b_2	b_3
2	a_2	$-a_1$	a_0	$-b_0$	$-b_1$	$-b_2$
3	a_3	$-a_2$	a_1	$-a_0$	b_0	b_1
4	a_4	$-a_3$	a_2	$-a_1$	a_0	$-b_0$
5	a_5	$-a_4$	a_3	$-a_2$	a_1	$-a_0$

Выражения (8) определяют поле скоростей перемещений в области AEB , в частности, нормальную скорость V_n движения свободной поверхности $\Sigma(t)$ на участке AFB :

$$V_n(\gamma) = V_n(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v - u), \quad \gamma = \varphi + \frac{\pi}{4}, \quad \alpha = \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2} - \frac{\pi}{4}, \quad \beta = \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2}, \quad (9)$$

где γ — угол наклона касательной к $\Sigma(t)$ с осью Ox ; δ — угол выреза (рис. 1).

2. Будем представлять свободную от напряжений поверхность выреза полосы на участке AFB в виде параметрически заданной функции:

$$\Sigma(t) : \begin{cases} x = x(\gamma, t), \\ y = y(\gamma, t), \end{cases} \quad (10)$$

где t — параметр времени, γ — угол наклона касательной к $\Sigma(t)$ с осью Ox .

Рассмотрим δ -производные по времени в направлении нормали n_i ($\frac{\delta}{\delta t} \equiv \frac{\partial}{\partial n} \frac{dn}{dt}$) к поверхности $\Sigma(t)$ (см. рис. 3):

$$\frac{\delta x}{\delta t} = -V_n[\gamma(t)] \sin \gamma(t), \quad \frac{\delta y}{\delta t} = V_n[\gamma(t)] \cos \gamma(t). \quad (11)$$

Пусть дана линия, касательная к которой совпадает с нормалью n_i к поверхности $\Sigma(t)$. Вдоль этой линии известна зависимость $\gamma = \gamma(t)$, тогда рассматривая (10) как сложную функцию времени t в направлении нормали, имеем

$$\frac{\delta x}{\delta t} = \frac{\partial x}{\partial \gamma} \frac{\delta \gamma}{\delta t} + \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{\delta y}{\delta t} = \frac{\partial y}{\partial \gamma} \frac{\delta \gamma}{\delta t} + \frac{\partial y}{\partial t}. \quad (12)$$

Объединяя (11) и (12), получим

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma} \frac{\delta \gamma}{\delta t} + \frac{\partial x}{\partial t} = -V_n[\gamma(t)] \sin \gamma(t), \quad (\text{I})$$

$$\frac{\partial y}{\partial \gamma} \frac{\delta \gamma}{\delta t} + \frac{\partial y}{\partial t} = V_n[\gamma(t)] \cos \gamma(t). \quad (\text{II})$$

Из (10) следует

$$\frac{\partial y}{\partial \gamma} = \frac{\partial x}{\partial \gamma} \operatorname{tg} \gamma(t). \quad (\text{III}) \quad (13)$$

В результате преобразования (II) — (I) $\operatorname{tg} \gamma$ исключим из уравнений множитель $\frac{\delta \gamma}{\delta t}$, и, добавляя преобразованное равенство (13), получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial y}{\partial t} \cos \gamma - \frac{\partial x}{\partial t} \sin \gamma = V_n(\gamma), \quad \frac{\partial y}{\partial \gamma} \cos \gamma - \frac{\partial x}{\partial \gamma} \sin \gamma = 0. \quad (14)$$

Будем предполагать, что V_n не зависит от времени t .

Дифференцируя в (14) первое уравнение по γ , второе по t :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial y}{\partial t} \sin \gamma + \frac{\partial^2 y}{\partial \gamma \partial t} \cos \gamma - \frac{\partial x}{\partial t} \cos \gamma - \frac{\partial^2 x}{\partial \gamma \partial t} \sin \gamma &= \frac{dV_n}{d\gamma}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \gamma \partial t} \cos \gamma - \frac{\partial^2 x}{\partial \gamma \partial t} \sin \gamma &= 0, \end{aligned}$$

и вычитая друг из друга полученные соотношения, имеем

$$-\frac{\partial y}{\partial t} \sin \gamma - \frac{\partial x}{\partial t} \cos \gamma = \frac{dV_n}{dt} \quad \text{или} \quad -\frac{\partial y}{\partial t} \operatorname{tg} \gamma - \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{dV_n}{dt} \frac{1}{\cos \gamma}.$$

Вычитая последнее соотношение из первого уравнения в (14) вида

$$\frac{\partial y}{\partial t} \operatorname{ctg} \gamma - \frac{\partial x}{\partial t} = V_n \frac{1}{\sin \gamma},$$

получим

$$\frac{\partial y}{\partial t} (\operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma) = V_n \frac{1}{\sin \gamma} - \frac{dV_n}{d\gamma} \frac{1}{\cos \gamma},$$

откуда

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{V_n \frac{1}{\sin \gamma} - \frac{dV_n}{d\gamma} \frac{1}{\cos \gamma}}{\operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma} = V_n \cos \gamma - \frac{dV_n}{d\gamma} \sin \gamma. \quad (15)$$

Подставляя равенство (15) в первое уравнение (14), находим

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -V_n \sin \gamma - \frac{dV_n}{d\gamma} \cos \gamma. \quad (16)$$

Интегрируя (15) и (16) по времени, имеем

$$\begin{aligned} y(\gamma, t) &= \left[V_n(\gamma) \cos \gamma - \frac{dV_n}{d\gamma} \sin \gamma \right] t + y_0(\gamma), \\ x(\gamma, t) &= - \left[V_n(\gamma) \sin \gamma + \frac{dV_n}{d\gamma} \cos \gamma \right] t + x_0(\gamma). \end{aligned} \quad (17)$$

При дифференцировании уравнений (14) в предположении, что V_n является только функцией от γ и не зависит от t , в уравнениях (17) приобретаются дополнительные решения, содержащие функции $x_0(\gamma)$ и $y_0(\gamma)$, при которых уравнения (14) не выполняются. Уравнения (17) удовлетворяют (14) при $x_0(\gamma) = x_0 = \text{const}$ и $y_0(\gamma) \equiv 0$.

Перенесём начало координат в точку $M(x_0, 0)$ и положим $X = x - x_0$, $Y = y$, тогда

$$\begin{aligned} Y(\gamma, t) &= \left[V_n(\gamma) \cos \gamma - \frac{dV_n}{d\gamma} \sin \gamma \right] t, \\ X(\gamma, t) &= - \left[V_n(\gamma) \sin \gamma + \frac{dV_n}{d\gamma} \cos \gamma \right] t. \end{aligned} \quad (18)$$

Из уравнений (18) получим равенства

$$\frac{\partial X}{\partial \gamma} = -\cos \gamma \left(V_n + \frac{d^2 V_n}{d\gamma^2} \right) t, \quad \frac{\partial Y}{\partial \gamma} = -\sin \gamma \left(V_n + \frac{d^2 V_n}{d\gamma^2} \right) t, \quad (19)$$

подставляя которые вместе с уравнениями (15), (16) в уравнения (11), (12), найдём

$$\frac{\delta \gamma}{\delta t} = \frac{\frac{dV_n}{d\gamma} \sin \gamma}{\frac{\partial Y}{\partial \gamma}} = \frac{\frac{dV_n}{d\gamma} \cos \gamma}{\frac{\partial X}{\partial \gamma}}. \quad (20)$$

Кроме того, из уравнений (18) следует

$$\frac{Y}{X} = -\frac{V_n - \frac{dV_n}{d\gamma} \operatorname{tg} \gamma}{V_n \operatorname{tg} \gamma - \frac{dV_n}{d\gamma}} = \operatorname{tg} \eta. \quad (21)$$

Уравнение (21) определяет прямые $Y = X \operatorname{tg} \eta$, вдоль которых угол наклона касательной к $\Sigma(t)$ остаётся постоянным. В частности, при $\gamma = \frac{\pi}{2}$ угол $\eta = \pi$. При выбранном параметрическом представлении (10) свободной поверхности выреза $\Sigma(t)$ на участке AFB радиус кривизны ρ может быть определён как функция угла γ следующим образом:

$$\rho^2(\gamma) = t^2 \left(V_n + \frac{d^2 V_n}{d\gamma^2} \right)^2. \quad (22)$$

3. Рассмотрим процесс накопления работы внутренних сил в частицах, примыкающих к части свободной поверхности AF . Для идеального жёсткопластического тела эта работа совпадает с диссипацией механической энергии. Пусть частица занимает в момент времени t положение точки M (рис. 3), а в момент времени $t + \Delta t$ она займёт положение точки M' . Найдём скорость изменения угла наклона касательной к $\Sigma(t)$ в точке, связанной с положением материальной частицы $M(x_0, 0)$, т. е. вдоль траектории движения материальной частицы:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{dn}{dt} + \frac{\partial \gamma}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial \gamma}{\partial n} V_n + \frac{\partial \gamma}{\partial \tau} V_\tau, \quad (23)$$

где V_n, V_τ — компоненты скорости перемещений в направлении нормали и касательной к $\Sigma(t)$. Согласно (20) получим

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} \frac{dn}{dt} = \frac{\delta \gamma}{\delta t} = \frac{\frac{dV_n}{d\gamma} \sin \gamma}{\frac{\partial Y}{\partial \gamma}}. \quad (24)$$

В результате имеем

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\frac{dV_n}{d\gamma} \sin \gamma}{\frac{\partial Y}{\partial \gamma}} + \frac{V_\tau}{\rho}. \quad (25)$$

Находя из уравнений (18) $\frac{\partial Y}{\partial \gamma}$ и учитывая, что $\frac{\partial \gamma}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho}$, получаем

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{\rho} \left(V_\tau - \frac{dV_n}{d\gamma} \right), \quad \alpha = \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2}, \quad \beta = \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2} - \frac{\pi}{4}. \quad (26)$$

Удельная мощность диссипации энергии $\frac{dW}{dt}$ в пластической области определяется выражением [1]:

$$\frac{dW}{dt} = 2\varepsilon_{\max} k, \quad \varepsilon_{\max} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} + u \right) - \frac{1}{S} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - v \right), \quad (27)$$

где $\varepsilon_{\max}$ — максимальная скорость сдвига.

На поверхности $\Sigma(t)$ выполняются следующие соотношения:

$$R = -S, \quad S = \sqrt{2}\rho, \quad \varepsilon_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}\rho} \left(v - u - \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \quad (28)$$

при α, β из (27).

Накопление удельной работы внутренних сил при движении частицы вдоль свободной поверхности AF определяется интегралом, который может быть вычислен, используя уравнение (26):

$$\frac{W}{2k} = \int_{t_1}^t \varepsilon_{\max} dt = \int_{\delta}^{\pi/2} \frac{v - u - \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta}}{-v - u + \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta}} d\gamma \quad (29)$$

Рис. 3. Изменение положения свободной поверхности

Интеграл (29) описывает полную возможную работу внутренних сил для частицы, начавшей свое движение по криволинейному участку AF от точки A ($\gamma = \delta$) до точки E ($\gamma = \frac{\pi}{2}$), и, в частности, её мгновенное приращение при $t = 0$. Нижний предел интегрирования ($\gamma = \delta$) будет оставаться постоянным до тех пор, пока к пластической области будут примыкать прямолинейные участки свободной поверхности AC и BD .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-08-99042).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Хромов, А. И. Концентраторы деформаций [Текст] / А. И. Хромов, А. А. Буханько, С. Л. Степанов // ДАН. — 2006. — Т. 407, № 6. — С. 777–781.
2. Буханько, А. А. Растяжение полосы с V-образными вырезами и разрушение пластических тел [Текст] / А. А. Буханько, С. Л. Степанов, А. И. Хромов // Извест. РАН. МТТ. — 2007. — № 3. — С. 177–186.
3. Хилл, Р. Математическая теория пластичности [Текст] / Р. Хилл. — М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1956. — 408 с.
4. Хромов, А. И. Деформация и разрушение жёсткопластических тел [Текст] / А. И. Хромов. — Владивосток: Даль-наука, 1996. — 181 с.

Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева, г. Самара
khromov@ssau.ru

Поступила 29.10.2007

A. I. Khromov, A. A. Bukhanko, O. V. Patlina, E. P. Kocherov

EXTENSION OF THE STRIP WITH SYMMETRIC ANGULAR NOTCHES

The plastic flow of ideal rigid-plastic strip with symmetric V-notches is considered which results in a blunting of the notch under uniaxial tension.

Samara State Aerospace University, Samara, Russia
khromov@ssau.ru

Received 29.10.2007