Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Э. Сеницкий, В. В. Епишкин, Собственные колебания конечного толстостенного анизотропного цилиндра, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 1(), 63–71

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu574>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 10:21:39

УДК 593.3

Ю. Э. Сеницкий, В. В. Епишкин

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНЕЧНОГО ТОЛСТОСТЕННОГО АНИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА

Полагая в основу соотношения линейной теории упругости анизотропного тела, приводится новое замкнутое решение задачи об осесимметричных колебаниях кругового короткого ортотропного цилиндра с учётом сил вязкого сопротивления. Применен структурный алгоритм метода конечных интегральных преобразований. Анализируется спектр круговых частот свободных осесимметричных колебаний анизотропного цилиндра из стеклопластика.

Частоты и формы колебаний являются важными динамическими характеристиками, определяющими возможность наступления резонансных состояний, а также вклад соответствующих гармоник при анализе напряжений и перемещений цилиндров в случае нестационарных воздействий [1–3]. Однако получение замкнутого решения, определяющего свободные колебания короткого цилиндра при произвольных краевых условиях на криволинейных и торцевых поверхностях, даже в осесимметричном случае, представляет сложную проблему. Настоящая работа как раз и посвящена построению нового точного решения этой не простой краевой задачи о свободных осесимметричных колебаниях ортотропного цилиндра при произвольных граничных условиях на его криволинейных поверхностях и торцах, задаваемых в смешанной форме. Существенным представляется то, что независимыми при этом являются шесть упругих констант анизотропного материала. Кроме того, в математической модели учитываются силы вязкого сопротивления, которые вводятся в процессе решения задачи в соответствии с частотно-независимой гипотезой Фойгта [4]. Применяется обобщённая процедура метода конечных интегральных преобразований (КИП) с определением в процессе решения компонентов ядровой вектор-функции [3].

1. В цилиндрической системе координат (r, θ, z) рассматривается ортотропный полый круговой цилиндр $\Omega : \{a \leq r \leq b, 0 \leq z \leq h, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Дифференциальные уравнения движения в напряжениях при осесимметричной деформации цилиндра записываются следующим образом [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Физические и геометрические уравнения для ортотропного упругого тела в цилиндрических координатах могут быть представлены в виде [5]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= a_{11}\varepsilon_{rr} + a_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + a_{13}\varepsilon_{zz}, & \sigma_{\theta\theta} &= a_{21}\varepsilon_{rr} + a_{22}\varepsilon_{\theta\theta} + a_{23}\varepsilon_{zz}, \\ \sigma_{zz} &= a_{31}\varepsilon_{rr} + a_{32}\varepsilon_{\theta\theta} + a_{33}\varepsilon_{zz}, & \tau_{rz} &= a_{55}\gamma_{rz}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = 0. \quad (3)$$

Здесь $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \tau_{rz}, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}$ — компоненты тензора напряжений; a_{ij} — с точностью до постоянной соответствующие компоненты тензора деформаций; u, w, v — компоненты вектора перемещений ($v = 0$); t — время; a_{ij}, ρ — упругие постоянные и плотность ортотропного материала цилиндра.

Если воспользоваться формулами (2), (3), то дифференциальные уравнения (1) преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial u(r, z, t)}{\partial r} \right] - a_{22} \frac{1}{r^2} u(r, z, t) + a_{55} \frac{\partial^2 u(r, z, t)}{\partial z^2} + \\ + (a_{13} + a_{55}) \frac{\partial^2 w(r, z, t)}{\partial r \partial z} + (a_{13} - a_{23}) \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, z, t)}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u(r, z, t)}{\partial t^2} = 0; \end{aligned}$$

$$a_{55} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial w(r, z, t)}{\partial r} \right] + a_{33} \frac{\partial^2 w(r, z, t)}{\partial z^2} + (a_{55} + a_{31}) \frac{\partial^2 u(r, z, t)}{\partial r \partial z} + (a_{32} + a_{55}) \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, z, t)}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w(r, z, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= a_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + a_{12} \frac{1}{r} u + a_{13} \frac{\partial w}{\partial z}, & \sigma_{\theta\theta} &= a_{21} \frac{\partial u}{\partial r} + a_{22} \frac{1}{r} u + a_{23} \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \sigma_{zz} &= a_{31} \frac{\partial u}{\partial r} + a_{32} \frac{1}{r} u + a_{33} \frac{\partial w}{\partial z}, & \tau_{rz} &= a_{55} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

На криволинейных поверхностях ($r = a$ и $r = b$) могут быть сформулированы произвольные граничные условия, а на торцах цилиндра ($z = 0$ и $z = h$) должны быть заданы одно напряжение и одно перемещение. Поскольку рассматриваются лишь свободные колебания, то без ущерба общности рассуждений все граничные условия можно считать однородными (нулевыми). Для определённости в дальнейшем будем полагать, что на одной криволинейной поверхности заданы напряжения, а на другой перемещения. Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \text{при } r = a : \quad & \sigma_{rr} = a_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + a_{12} \frac{1}{r} u + a_{13} \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad \tau_{rz} = a_{55} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0; \\ \text{при } r = b : \quad & u = 0; \quad w = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

На торцах — два варианта граничных условий:

$$\text{а) при } z = 0 \text{ и } z = h : \quad \sigma_{zz} = a_{13} \frac{\partial u}{\partial r} + a_{23} \frac{1}{r} u + a_{33} \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad u = 0; \quad (7)$$

$$\text{б) при } z = 0 \text{ и } z = h : \quad \tau_{rz} = a_{55} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0; \quad w = 0. \quad (8)$$

В начальный момент времени ($t = 0$) считаются известными перемещения $u_0(r, z)$, $w_0(r, z)$ и скорости перемещений $\dot{u}_0(r, z)$, $\dot{w}_0(r, z)$, то есть при $t = 0$:

$$u = u_0(r, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \dot{u}_0(r, z); \quad w = w_0(r, z), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \dot{w}_0(r, z). \quad (9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае, когда задаются неоднородные граничные условия (6)–(8) (нестационарная динамическая задача), то рассматриваемую начально-краевую задачу необходимо привести к стандартной форме [6]. Для анизотропного цилиндра такая процедура описана в [2, 3].

Представляют интерес собственные колебания сплошного анизотропного (ортотропного) короткого цилиндра. В этом случае вместо первых двух условий (6), следует принять условия регулярности решения:

$$\begin{aligned} \text{при } r = 0 : \quad & u < \infty, \quad w < \infty; \\ \text{при } r = b : \quad & u = 0; \quad w = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Соотношения (4), (6)–(9) и представляют собой математическую формулировку рассматриваемой краевой задачи.

2. Решение осуществляется методом КИП. Сначала применяется конечное преобразование Фурье по переменной z , а затем обобщённое КИП по радиальной координате r с определением ядровой функции в процессе решения [3]. Для этой цели вводим конечные интегральные косинус и синус преобразования Фурье по переменной z :

$$\left[U_{c,s}(r, n, t), W_{c,s}(r, n, t) \right] = \int_0^h \left[u(r, n, t), w(r, n, t) \right] \left[\cos \frac{n\pi z}{h}, \sin \frac{n\pi z}{h} \right] dz, \quad (11)$$

$$\left[u(r, n, t), w(r, n, t) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n^{-1} \left[U_{c,s}(r, n, t), W_{c,s}(r, n, t) \right] \left[\cos \frac{n\pi z}{h}, \sin \frac{n\pi z}{h} \right], \quad (12)$$

где $\Omega_n = \begin{cases} h, & \text{при } n = 0, \\ \frac{1}{2}h, & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$

Величины U_c , W_c и U_s , W_s представляют соответственно косинус и синус трансформанты (изображения) Фурье компонентов u и w вектора перемещений, то есть индекс «с» относится к косинус преобразованию, а «s» — к синус преобразованию Фурье в формулах (11).

Применим теперь в случае (7) к первому дифференциальному уравнению (4) синус, а ко второму — косинус преобразования Фурье (11), а в случае (8) наоборот. Затем этим же преобразованиям подвергаем граничные (6) и начальные (9) условия. В результате получим:

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial^2 U_{s,c}}{\partial r^2} + a_{11} \frac{1}{r} \frac{\partial U_{s,c}}{\partial r} - \left(a_{22} \frac{1}{r^2} + a_{55} \frac{n^2 \pi^2}{h^2} \right) U_{s,c} \mp (a_{13} + a_{55}) \frac{n\pi}{h} \frac{\partial w_{c,s}}{\partial r} \mp \\ \mp (a_{13} - a_{23}) \frac{1}{r} \frac{n\pi}{h} W_{c,s} \rho \frac{\partial^2 U_{c,s}}{\partial t^2} = 0; \\ a_{55} \frac{\partial^2 W_{c,s}}{\partial r^2} + a_{55} \frac{1}{r} \frac{\partial W_{c,s}}{\partial r} - a_{33} \frac{n^2 \pi^2}{h^2} W_{c,s} \pm (a_{13} + a_{55}) \frac{n\pi}{h} \frac{\partial U_{s,c}}{\partial r} \pm \\ \pm (a_{23} + a_{55}) \frac{n\pi}{h} U_{s,c} - \rho \frac{\partial^2 w_{c,s}}{\partial t^2} = 0; \end{aligned} \quad (13)$$

при $r = a$ имеем

$$a_{11} \frac{\partial U_{s,c}}{\partial r} + a_{12} \frac{1}{r} U_{s,c} \mp a_{13} \frac{n\pi}{h} W_{c,s} = 0, \quad \frac{\partial W_{c,s}}{\partial r} \pm \frac{n\pi}{h} U_{s,c} = 0, \quad \frac{\partial W_{c,s}}{\partial r} \pm \frac{n\pi}{h} U_{s,c} = 0; \quad (14)$$

при $r = b$: $U_{s,c} = W_{c,s} = 0$;

при $t = 0$:

$$U_{s,c} = U_{0s,c}(r, n), \quad \frac{\partial U_{s,c}}{\partial t} = \dot{U}_{0s,c}(r, n); \quad W_{c,s} = W_{0c,s}(r, n), \quad \frac{\partial W_{c,s}}{\partial t} = \dot{W}_{0c,s}(r, n). \quad (15)$$

Здесь $U_{0s,c}$, $W_{0c,s}$, $\dot{U}_{0s,c}$, $\dot{W}_{0c,s}$ — трансформанты Фурье известных функций начальных перемещений и скоростей перемещений:

$$\begin{aligned} [U_{0s,c}, W_{0s,c}] &= \int_0^h [u_0(r, z), w_0(r, z)] \left[\cos \frac{n\pi z}{h}, \sin \frac{n\pi z}{h} \right] dz, \\ [\dot{U}_{0s,c}, \dot{W}_{0s,c}] &= \int_0^h [\dot{u}_0(r, z), \dot{w}_0(r, z)] \left[\cos \frac{n\pi z}{h}, \sin \frac{n\pi z}{h} \right] dz. \end{aligned} \quad (16)$$

Верхние знаки в равенствах (13), (14) соответствуют граничным условиям на торцах цилиндра (7), а нижние — (8).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае, когда рассматривается сплошной круговой цилиндр, помещённый в жёсткую обойму, то преобразованные по Фурье граничные условия (6) принимают вид

$$\begin{aligned} \text{при } r = 0: \quad U_{s,c} < \infty, \quad W_{c,s} < \infty; \\ \text{при } r = b: \quad U_{s,c} = W_{c,s} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Соотношения (13)–(15) и представляют преобразованную в пространстве изображений Фурье (r, n, t) рассматриваемую краевую задачу.

Введём обобщённое КИП с неизвестными пока компонентами G_1 , G_2 ядровой вектор-функции и весом r [3]:

$$\varphi(\lambda_{in}, n, t) = \int_a^b r [U_{s,c}(r, n, t) G_1(\lambda_{in}, r) + W_{c,s}(r, n, t) G_2(\lambda_{in}, r)] dr, \quad (18)$$

$$U_{s,c}(r, n, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\lambda_{in}, t) G_1(\lambda_{in}, r) \|G_{in}\|^{-2}, \quad W_{c,s}(r, n, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\lambda_{in}, t) G_2(\lambda_{in}, r) \|G_{in}\|^{-2}. \quad (19)$$

Здесь $\varphi(\lambda_{in}, t)$ — трансформанта, (19) — формулы обращения КИП, $\|G_{in}\|$ — норма ядровой вектор-функции:

$$\|G_{in}\|^2 = \int_a^b r [G_1^2(\lambda_{in}, r) + G_2^2(\lambda_{in}, r)] dr, \quad (20)$$

$\lambda_{in} > 0$ ($i \in \mathbb{N}; n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$) — положительные параметры, образующие счётное множество.

Индексы « i » и « n » во всех выражениях соответствуют числу полуволи в направлении радиальной и осевой координат цилиндра.

Если подвергнуть теперь соотношения (13), (15) КИП (18), проинтегрировать по частям члены, содержащие производные по r , сложить уравнения и соответствующие начальные условия, а затем воспользоваться двумя известными условиями структурного алгоритма метода КИП [3]:

$$\left[a_{11}r \left(G_1 \frac{\partial U_{s,c}}{\partial r} - G_1' U_{s,c} \right) + a_{55}r \left(G_2 \frac{\partial W_{c,s}}{\partial r} - G_2' W_{c,s} \right) \pm \right. \\ \left. \pm (a_{13} \pm a_{55}) \frac{n\pi}{h} r (G_2 U_{s,c} - G_1 W_{c,s}) \right] \Big|_a^b = 0, \quad (21)$$

$$\int_a^b r \left\{ U_{s,c} \left[a_{11} \left(G_1'' + \frac{1}{r} G_1' \right) - \left(a_{22} \frac{1}{r^2} + a_{55} \frac{n\pi}{h} \right) G_1 \mp (a_{13} + a_{55}) \frac{n\pi}{h} G_2' \mp (a_{13} - a_{23}) \frac{n\pi}{h} r G_2 \right] + \right. \\ \left. + W_{c,s} \left[a_{55} \left(G_2'' + \frac{1}{r} G_2' \right) - a_{33} \frac{n^2 \pi^2}{h^2} G_2 \pm (a_{13} + a_{55}) \frac{n\pi}{h} G_1' \pm (a_{23} + a_{55}) \frac{n\pi}{h} \frac{1}{r} G_1 \right] \right\} dr = \\ = -a_{11} \lambda_{in}^2 \int_a^b r (U_{s,c} G_1 + W_{c,s} G_2) dr, \quad (22)$$

то получаем такую счётную систему задач Коши для трансформанты φ :

$$\ddot{\varphi}(\lambda_{in}, n, t) + \lambda_{in}^2 \frac{a_{11}}{\rho} \varphi(\lambda_{in}, n, t) = 0 \quad (i \in \mathbb{N}; n \in \{0\} \cup \mathbb{N}), \quad (23)$$

$$\varphi(\lambda_{in}, n, 0) = U_0(\lambda_{in}, n), \quad \dot{\varphi}(\lambda_{in}, n, 0) = \dot{U}_0(\lambda_{in}, n), \quad (24)$$

где

$$U_0(\lambda_{in}, n) = \int_a^b r [U_{0s,c}(r, n) G_1(\lambda_{in}, r) + W_{0c,s}(r, n) G_2(\lambda_{in}, r)] dr, \\ \dot{U}_0(\lambda_{in}, n) = \int_a^b r [\dot{U}_{0s,c}(r, n) G_1(\lambda_{in}, r) + \dot{W}_{0c,s}(r, n) G_2(\lambda_{in}, r)] dr. \quad (25)$$

В равенствах (21)–(24) штрих и точка обозначают операцию дифференцирования по r и t , соответственно.

В соответствии с методом квазинормальных координат [4] вводим в обыкновенное дифференциальное уравнение (23), полученное после отделения пространственных переменных, диссипативные силы вязкого сопротивления. Для этой цели воспользуемся частотно-независимой гипотезой Фойгта, полагая при этом известным коэффициент потерь γ_{in} для каждой моды колебаний. В результате имеем:

$$\ddot{\varphi}(\lambda_{in}, n, t) + \gamma_{in} \omega_{in} \dot{\varphi}(\lambda_{in}, n, t) + \omega_{in}^2 \varphi(\lambda_{in}, n, t) = 0, \quad (26)$$

где ω_{in} — независимые от диссипативных сил круговые частоты осесимметричных колебаний цилиндра:

$$\omega_{in} = \lambda_{in} \left(\frac{a_{11}}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (27)$$

Решение однородного дифференциального уравнения (26) при начальных условиях (24) записывается в виде

$$\varphi(\lambda_{in}, n, t) = \exp(-\beta_{in} t) \left[U_0(\lambda_{in}, n) \left(\cos \alpha_{in} t + \frac{\beta_{in}}{\alpha_{in}} \sin \alpha_{in} t \right) + \frac{\dot{U}_0(\lambda_{in}, n)}{\alpha_{in}} \sin \alpha_{in} t \right]. \quad (28)$$

Здесь $\alpha_{in} = \omega_{in}^*$ — круговые частоты осесимметричных колебаний анизотропного цилиндра при наличии сил вязкого сопротивления (внутреннего трения), причём

$$\beta_{in} = \frac{1}{2} \gamma_{in} \lambda_{in}, \quad \alpha_{in} = \omega_{in}^* = \omega_{in} \left(1 - \frac{1}{4} \gamma_{in}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (29)$$

Поскольку рассматриваемая краевая задача является самосопряжённой (см. замечание 3), то есть $\lambda_{in} > 0$, и коэффициенты потерь $\gamma_{in} > 0$, то из (29) следует $\beta_{in} > 0$. Это указывает на то, что решение (28) является устойчивым.

Возвращаясь к условиям (21), (22), замечаем, что из операционного свойства (22) следует система дифференциальных уравнений для компонент $G_1(\lambda_{in}, r)$, $G_2(\lambda_{in}, r)$ ядра КИП:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} (rG_1')' + \left(\lambda_{in}^2 - \frac{a_{22}}{a_{11}} \frac{1}{r^2} - \frac{a_{55}}{a_{11}} \frac{n^2 \pi^2}{h^2} \right) G_1 \mp \frac{a_{13} + a_{55}}{a_{11}} \frac{n\pi}{h} G_2' \mp \frac{a_{13} - a_{23}}{a_{11}} \frac{1}{r} \frac{n\pi}{h} G_2 &= 0; \\ \frac{1}{r} (rG_2')' + \left(\lambda_{in}^2 \frac{a_{11}}{a_{55}} - \frac{a_{33}}{a_{55}} \frac{n^2 \pi^2}{h^2} \right) G_2 \pm \frac{a_{13} + a_{55}}{a_{55}} \frac{n\pi}{h} G_1' \pm \frac{a_{23} + a_{55}}{a_{55}} \frac{1}{r} \frac{n\pi}{h} G_1 &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Используя равенство нулю билинейной формы на концах интервала (21) совместно с равенствами (14), получаем следующие граничные условия:

при $r = a$:

$$\left(a_{11} G_1' + a_{12} \frac{1}{r} G_1 \mp a_{13} \frac{n\pi}{h} G_2 \right) = 0, \quad G_2' \pm \frac{n\pi}{h} G_1 = 0, \quad (31)$$

при $r = b$: $G_1 = G_2 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При соответствиях $G_1 \sim U_{c,s}$, $G_2 \sim W_{c,s}$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \sim -\lambda_{in}^2$ уравнения (30) и условия (31) тождественны дифференциальным уравнениям (13) и граничным условиям (14). Таким образом, КИП (18) при указанных выше соответствиях представляет собой тождественное преобразование и (30), (31) инвариантны (13), (14) относительно (18). Это значит, что исходная краевая задача (4), (6)–(9) является самосопряжённой [3] и справедливы формулы обращения (19), основанные на соотношениях обобщённой ортогональности.

3. Интегрирование системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (30) представляет достаточно сложный этап в решении рассматриваемой задачи. В отличие от работы [2], где приведено точное решение в случае, когда $a_{11} = a_{22}$ и $a_{13} = a_{23}$, в настоящем исследовании снимем одно из этих ограничений. Будем в дальнейшем полагать, что лишь

$$a_{13} = a_{23}. \quad (32)$$

Выражая из первого уравнения (30) G_2' и подставляя полученное равенство во второе, имеем

$$G_1''' + \frac{2}{r} G_1'' + (k_{1n} - k_2 r^{-2}) r^{-1} (rG_1)' + k_{3n} G_2 = 0, \quad (33)$$

где

$$k_{1n} = \lambda_{in}^2 + \frac{(a_{13} + a_{55})^2 n\pi}{a_{11} a_{55} h} - \frac{a_{55}}{a_{11}} \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2, \quad k_2 = \frac{a_{22}}{a_{11}}. \quad (34)$$

Вводим потенциальную разрешающую функцию $\phi(\lambda_{in} r)$ по формулам

$$G_1 = r\phi' + f_1\phi, \quad G_2 = f_{2n} r^{-1} \phi'' + (f_{3n} + f_{4n} r^{-2}) \phi' - r(1 + f_{5n} r^{-2} - f_{6n} r^{-4}) \phi. \quad (35)$$

Здесь $f_{jn} = \text{const}$ ($j = 2, 3, 4, 5, 6$).

В результате подстановки равенств (35) в (33), получаем

$$\begin{aligned} \phi^{IV} + (5 + f_1) r^{-1} \phi''' + [k_{1n} + (4 + 2f_1 - k_2 + f_{2n}k_{3n}) r^{-2}] \phi'' + \\ + \{[k_{1n}(2 + f_1) + k_{3n}f_{3n}] r^{-1} + [k_{3n}f_{4n} - k_2(2 + f_1)] r^{-3}\} \phi' - \\ - [k_{3n} + (k_{3n}f_{5n} - k_{1n}f_1) r^{-2} + (k_{2n}f_1 + k_{3n}f_{6n}) r^{-4}] \phi = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Наряду с (36) рассмотрим уравнение

$$\phi^{IV} + 2r^{-1} \phi''' + (b_{in} - 3r^{-2}) \phi'' + (b_{in}r^{-1} + 3r^{-3}) \phi' + (h_{in} + b_{in}r^{-2} + 3r^{-4}) \phi = 0. \quad (37)$$

Условиями приведения уравнения (36) к (37) являются следующие равенства:

$$\begin{aligned} f_1 = -3, \quad f_{2n} = (5 + k_2) k_{3n}^{-1}, \quad f_{3n} = 2k_{1n}k_{3n}^{-1}, \quad f_{4n} = (3 - k_2) k_{3n}^{-1}, \\ f_{5n} = -2k_{1n}k_{3n}^{-1}, \quad f_{6n} = 3(1 + k_2) k_{3n}^{-1}, \quad b_{in} = k_{1n}, \quad h_{in} = k_{3n}. \end{aligned} \quad (38)$$

Уравнение (37), а, следовательно, и (36), (38) допускают коммуникативную факторизацию:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left(A_{in}^2 - \frac{1}{r^2} \right) \right] \left[\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} - \left(D_{in}^2 + \frac{1}{r^2} \right) \phi \right] = 0, \quad (39)$$

где

$$A_{in} = \left[\frac{1}{2} b_{in} + \left(\frac{1}{4} b_{in}^2 + h_{in} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad D_{in} = \left[-\frac{1}{2} b_{in} + \left(\frac{1}{4} b_{in}^2 + h_{in} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (40)$$

Приравнявая к нулю каждый сомножитель левой части (39), получаем обычное и видоизменённое уравнения Бесселя. Поскольку уравнение (39) линейное, то его общий интеграл записывается в виде

$$\phi(\lambda_{in}, r) = C_{1n} J_1(A_{in}r) + C_{2n} Y_1(A_{in}r) + C_{3n} I_1(D_{in}r) + C_{4n} K_1(D_{in}r). \quad (41)$$

Здесь $J_1(A_{in}r)$, $Y_1(A_{in}r)$ и $I_1(D_{in}r)$, $K_1(D_{in}r)$ — обычные и модифицированные функции Бесселя I-го и II-го рода первого порядка соответствующих аргументов; C_{kn} ($k = 1, 2, 3, 4$) — произвольные постоянные.

Располагая выражением (41), по формулам (35) определяются компоненты ядра преобразования G_1 и G_2 :

$$\begin{aligned} G_1(\lambda_{in}r) = C_{1n} [rJ_1'(A_{in}r) + f_1J_1(A_{in}r)] + C_{2n} [rY_1'(A_{in}r) + f_1Y_1(A_{in}r)] + \\ + C_{3n} [rI_1'(D_{in}r) + f_1I_1(D_{in}r)] + C_{4n} [rK_1'(D_{in}r) + f_1K_1(D_{in}r)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_2(\lambda_{in}r) = C_{1n} [f_{2n}r^{-1} J_1''(A_{in}r) + (f_{3n} + f_{4n}r^{-2}) J_1'(A_{in}r) - \\ - r(1 + f_{5n}r^{-2} - f_{6n}r^{-4}) J_1(A_{in}r)] + C_{2n} [f_{2n}r^{-1} Y_1''(A_{in}r) + (f_{3n} + f_{4n}r^{-2}) Y_1'(A_{in}r) - \\ - r(1 + f_{5n}r^{-2} - f_{6n}r^{-4}) Y_1(A_{in}r)] + C_{3n} [f_{2n}r^{-1} I_1''(D_{in}r) + (f_{3n} + f_{4n}r^{-2}) I_1'(D_{in}r) - \\ - r(1 + f_{5n}r^{-2} - f_{6n}r^{-4}) I_1(D_{in}r)] + C_{4n} [f_{2n}r^{-1} K_1''(D_{in}r) + (f_{3n} + f_{4n}r^{-2}) K_1'(D_{in}r) - \\ - r(1 + f_{5n}r^{-2} - f_{6n}r^{-4}) K_1(D_{in}r)]. \end{aligned} \quad (42)$$

Производные J_1'' , J_1' , $\dots$, K_1'' , K_1' в равенствах (42) вычисляются по рекуррентным формулам дифференцирования функций Бесселя.

Дальнейшее решение задачи определения собственных значений λ_{in} и собственных функций G_1 и G_2 очевидно. После постановки выражений (42) в граничные условия (31) формируется однородная система алгебраических уравнений относительно $C_{1n}, \dots, C_{4n}$. Разыскивая нетривиальные решения последней, получаем трансцендентное уравнение для нахождения параметров λ_{in} и постоянных $C_{1n}, \dots, C_{4n}$:

$$D(\lambda_{in}) = \det(\delta_{jk}^{in}) = 0 \quad (j, k = 1, 2, 3, 4); \quad (43)$$

$$C_{1n} = D_1^{in}, \quad C_{2n} = D_2^{in}, \quad C_{3n} = D_3^{in}, \quad C_{4n} = D_4^{in}. \quad (44)$$

Здесь

$$D_4^{in} = \begin{vmatrix} \delta_{11}^{in} & \delta_{12}^{in} & \delta_{13}^{in} \\ \delta_{21}^{in} & \delta_{22}^{in} & \delta_{23}^{in} \\ \delta_{31}^{in} & \delta_{32}^{in} & \delta_{33}^{in} \end{vmatrix}, \quad (45)$$

а $D_1^{in}, D_2^{in}, D_3^{in}$ получаются из детерминанта (45) заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов на столбец $\|-\delta_{14}^{in}, -\delta_{24}^{in}, -\delta_{34}^{in}\|^T$, причём элементы δ_{jk} с учётом (38) определяются такими равенствами:

$$\begin{aligned} \delta_{jk}^{in} = & a_{11} [r J_1''(A_{in}r) - 2J_1'(A_{in}r)] + \frac{a_{12}}{r} [r J_1'(A_{in}r) - 3J_1(A_{in}r)] \mp \\ & \mp a_{13} \frac{n\pi}{h} \left\{ \frac{k_2 + 5}{k_{3n}r} J_1''(A_{in}r) + \frac{1}{k_{3n}} \left(2k_2 + \frac{3 - k_2}{r^2} \right) J_1'(A_{in}r) - \right. \\ & \left. - r \left[1 - \frac{2k_{1n}}{k_{3n}r^2} + \frac{3(k_2 + 1)}{k_{3n}r^4} \right] J_1(A_{in}r) \right\}, \quad (46) \end{aligned}$$

если $k = 1$; $r = a$ при $j = 1$; $r = b$, при $j = 3$;

$$\begin{aligned} \delta_{jk}^{in} = & \frac{k_2 + 5}{k_{3n}r} J_1'''(A_{in}r) + \frac{2}{k_{3n}} \left(k_2 - \frac{k_2 + 1}{r^2} \right) J_1''(A_{in}r) - \\ & - \frac{1}{k_{3n}} \left(k_{3n} - \frac{2k_{in}}{r} + \frac{k_2 + 9}{r^3} \pm k_{3n} \frac{n\pi}{h} r \right) J_1'(A_{in}r) - \\ & - \frac{1}{k_{3n}} \left(2 \frac{k_{in}}{r} - 9 \frac{k_2 + 1}{r^4} \mp 3k_{3n} \frac{n\pi}{h} \right) J_1(A_{in}r), \quad (47) \end{aligned}$$

если $k = 1$; $r = a$ при $j = 2$; $r = b$, при $j = 4$.

В формулах (46), (47) $J_1(A_{in}r)$ следует заменить на $Y_1(A_{in}r)$, если $k = 2$; на $I_1(D_{in}r)$, если $k = 3$; на $K_1(D_{in}r)$, если $k = 4$.

Если рассматривается сплошной ортотропный цилиндр (10), то из равенства (21) с учётом соотношений (17) следуют такие граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } r = 0 : & \quad G_1(\lambda_{in}, 0) < \infty, \quad G_2(\lambda_{in}, 0) < \infty; \\ \text{при } r = b : & \quad G_1(\lambda_{in}, b) = 0, \quad G_2(\lambda_{in}, b) = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Имея в виду первые два равенства (48) (условия регулярности решения в полюсе $r = 0$), в соотношениях (42) необходимо считать

$$C_{2n} = C_{4n} = 0. \quad (49)$$

Подставляя равенства (42), (49) в оставшиеся граничные условия (48), немедленно получаем однородную систему алгебраических уравнений относительно C_{1n} и C_{3n} :

$$\begin{cases} \delta_{11}^* C_{1n} + \delta_{12}^* C_{3n} = 0, \\ \delta_{21}^* C_{1n} + \delta_{22}^* C_{3n} = 0. \end{cases} \quad (50)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \delta_{12}^* & \neq \delta_{21}^*, \quad \delta_{11}^* = b J_1'(A_{in}b) + f_1 J_1(A_{in}b), \quad \delta_{12}^* = b I_1'(D_{in}b) + f_1 I_1(D_{in}b), \\ \delta_{21}^* & = f_{2n} r^{-1} J_1''(A_{in}b) + (f_{3n} + f_{4n} r^{-2}) J_1'(A_{in}b) - r (1 + f_{5n} r^{-2} - f_{6n} r^{-4}) J_1(A_{in}b), \\ \delta_{22}^* & = f_{2n} r^{-1} I_1''(D_{in}b) + (f_{3n} + f_{4n} r^{-2}) I_1'(D_{in}b) - r (1 + f_{5n} r^{-2} - f_{6n} r^{-4}) I_1(D_{in}b), \end{aligned} \quad (51)$$

а $f_1, f_{2n}, \dots, f_{6n}$ определяются равенствами (38).

Если теперь приравнять главный детерминант системы (50) к нулю, то получаем трансцендентное уравнение для определения собственных значений λ_{in} :

$$\delta_{11}^* \delta_{22}^* - \delta_{12}^* \delta_{21}^* = 0 \quad (52)$$

и соответствующие выражения для компонент G_1, G_2 ядра КИП (42), в которых

$$C_{2n} = C_{4n} = 0, \quad C_{1n} = \delta_{12}^*, \quad C_{3n} = -\delta_{11}^*. \quad (53)$$

В случае, когда начальные условия (9) не нулевые, то применяя к соотношению (28) последовательно формулы обращения (19) и (11), окончательно получаем в случае (7) искомые компоненты u , w вектора перемещений:

$$\begin{aligned} u(r, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_n^{-1} \varphi(\lambda_{in}, n, t) \cos \frac{n\pi z}{h} G_1(\lambda_{in}, r) \|G_{in}\|^{-2}, \\ w(r, z, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_n^{-1} \varphi(\lambda_{in}, n, t) \sin \frac{n\pi z}{h} G_2(\lambda_{in}, r) \|G_{in}\|^{-2}. \end{aligned} \quad (54)$$

Для граничных условий на торцах цилиндра (8) в равенствах (54) косинус и синус следует поменять местами.

4. В качестве примера проанализируем спектры частот ω_{in} и ω_{in}^* свободных осесимметричных колебаний помещённого в жёсткую обойму сплошного цилиндра, у которого $h = 0,3$ м. Цилиндр выполнен из стеклопластика плотность которого $\rho = 1,9 \cdot 10^3$ кг/м³. Рассматривались два варианта армирования [7].

Первый соответствует более сильному армированию в плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра по отношению к армированию вдоль образующей, при таких значениях упругих постоянных: $a_{11} = a_{22} = 3,143 \cdot 10^{10}$ Н/м², $a_{33} = 0,861 \cdot 10^{10}$ Н/м², $a_{12} = 0,431 \cdot 10^{10}$ Н/м², $a_{13} = a_{23} = 0,275 \cdot 10^{10}$ Н/м².

Второй вариант соответствует противоположному случаю, когда $a_{11} = a_{22} = 0,861 \cdot 10^{10}$ Н/м², $a_{33} = 3,143 \cdot 10^{10}$ Н/м², $a_{12} = 0,431 \cdot 10^{10}$ Н/м², $a_{13} = a_{23} = 0,275 \cdot 10^{10}$ Н/м².

Коэффициент потерь $\gamma_i = \gamma = 0,001$ [4]. При анализе варьировалось отношение $\frac{l}{2b}$, характеризующее относительную длину цилиндра.

В таб. 1 и 2 для первого и второго вариантов армирования приведены частоты ω_{in} первых трёх тонов ($i = 1, 2, 3$) осесимметричных колебаний ортотропных цилиндров при одной, двух и трёх полуволнах ($n = 1, 2, 3$) вдоль их образующих. Расчёты выполнялись для значений параметра $\frac{l}{2b} = \{0,857; 6,00\}$ по уравнению (52) и формулам (27), (29). Для постоянного коэффициента потерь на каждой моде колебаний в данном примере: $\omega_{in}^* = 0,9987 \cdot \omega_{in}$, то есть ω_{in}^* отличаются от соответствующих частот, определённых без учёта сил внутреннего трения ω_{in} , на 0,13 % (практически совпадают). Из таб. 1 и 2 следует, что характер анизотропии (армирования) существенно влияет на величины ω_{in} осесимметричных колебаний цилиндров. В коротких цилиндрах частоты колебаний существенно зависят от числа полуволн n вдоль образующих. К интересным качественным результатам полученным для коротких цилиндров ($\frac{l}{2b} = 0,857$) следует отнести перестройку тонов колебаний, то есть при фиксированном i с ростом n наблюдается появление более низких частот ω_{in} .

Таблица 1

Значения частоты $\omega_{in} \cdot 10^{-4}$ Гц при различных параметрах для первого варианта						
i	$l/2b = 0,875; b = 0,175$ м			$l/2b = 6,00; b = 0,025$ м		
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
1	1,447	0,605	0,609	9,925	9,938	9,960
2	2,611	1,531	0,062	18,17	18,17	18,18
3	3,774	2,657	1,649	26,34	26,35	26,36

Таблица 2

Значения частоты $\omega_{in} \cdot 10^{-4}$ Гц при различных параметрах для второго варианта						
i	$l/2b = 0,875; b = 0,175$ м			$l/2b = 6,00; b = 0,025$ м		
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
1	1,364	1,963	0,836	5,196	5,207	5,221
2	1,974	2,585	1,419	9,508	9,513	9,520
3	2,583	3,196	1,926	13,79	13,79	13,79

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Фридман, Л. И. Динамическая задача теории упругости для цилиндра конечных размеров [Текст] / Л. И. Фридман // Прикладная механика. — 1981. — Т. 17, № 3. — С. 37–43.

2. *Сеницкий, Ю. Э.* К решению осесимметричной задачи динамики для анизотропного короткого толстостенного цилиндра [Текст] / Ю. Э. Сеницкий // Прикладная механика. — 1981. — Т. 17, № 8. — С. 95–100.
3. *Сеницкий, Ю. Э.* Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований [Текст] / Ю. Э. Сеницкий. — Саратов: Изд-во СГУ, 1985. — 176 с.
4. *Цейтлин, А. И.* Методы учёта внутреннего трения в динамических расчётах конструкций [Текст] / А. И. Цейтлин, А. А. Кусаинов. — Алма-Ата: Наука, 1987. — 238 с.
5. *Лехницкий, С. Г.* Теория упругости анизотропного тела [Текст] / С. Г. Лехницкий. — М.-Л.: Госиздат техн.-теорет. лит., 1950. — 299 с.
6. *Бутковский, А. Г.* Характеристики систем с распределёнными параметрами [Текст] / А. Г. Бутковский. — М.: Наука, 1979. — 224 с.
7. *Ашкенази, Е. К.* Анизотропия машиностроительных материалов [Текст] / Е. К. Ашкенази. — Л.: Машиностроение, 1969. — 110 с.

Самарский государственный архитектурно-строительный институт, г. Самара

Поступила 12.10.2007

В окончательном варианте
20.02.2008

Yu. E. Senitsky, V. V. Epyshkin

PROPER OSCILLATION OF ULTIMATE THICK-WALL FINITE ANISOTROPIC CYLINDER

Considering the correlation of linear theory of elasticity of anisotropic body, a new closed solution of the task on axes symmetrical oscillation of round orthotropic short cylinder is shown taking into account the viscous drag force. Structural algorithm of the method of final integral transformations is used. The spectrum of circular frequencies of free axes symmetrical oscillations of anisotropic cylinder made of glass-fiber material is analyzed.

Samara State University of Building and Architecture, Samara, Russia

Received 12.10.2007