Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Федотов, А. А. Контеев, К решению уравнений гиперболического типа модифицированным методом граничных элементов, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 1(), 72–78

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu575>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 15:50:21

УДК 534.1

В. П. Федотов, А. А. Контеев

К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА
МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Описан метод решения задач гиперболического типа модифицированным методом граничных элементов. На примере одномерного случая получены разрешающие граничные уравнения, показана применимость метода. В частности, показана возможность точного вычисления частных производных, что имеет большое практическое значение, поскольку позволяет точно находить деформации, а соответственно и напряжения, в том числе для задач с особенностями.

Введение. Модифицированный метод граничных элементов применяется для решения задач колебаний областей произвольной размерности. В наиболее общем, трёхмерном случае задача заключена в следующем. В области произвольной формы Ω заданы перемещения и скорости перемещений в начальный момент времени, а в каждой точке границы Γ области заданы либо деформации, либо перемещения в функции времени. Задачей является нахождение перемещения u (либо одной из компонент перемещения u_i, u_j, u_k в трёхмерном случае), которое удовлетворяет в области Ω системе уравнений:

$$L(u(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad (1)$$

граничным условиям — перемещениям на участке границы Γ_1 и деформациям на оставшемся участке границы Γ_2 области Ω :

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= u(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \\ \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} &= q(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2; \end{aligned}$$

начальным условиям:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t)|_{t=t_0} &= \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t}|_{t=t_0} &= \psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned}$$

где оператор $L(\cdot) = \nabla^2 - \partial^2/\partial t^2$. Начальные условия определяют отклонения и скорости точек области в начальный момент времени. Граничные условия задают деформации, перемещения, либо некоторый закон связывающий, перемещения и деформации на границе.

Согласно [1], потребуем выполнение уравнения (1) в целом по области с весом $u^*(\cdot)$:

$$\int_{t_0}^{t_F} \int_{\Omega} L(u(\mathbf{x}, t)) u^*(\cdot) d\Omega(\mathbf{x}) dt,$$

где $u^*(\cdot)$ — функция, выбором которой мы можем распоряжаться. Удобно определить её как фундаментальное решение уравнения:

$$\begin{aligned} L(u(\mathbf{x}, t)) &= \delta(\|\xi - \mathbf{x}\|) \delta(t_F - t), \\ u^*(\xi, \mathbf{x}, t_F, t) &= 0, \quad \text{при } c(t_F - t) < |\mathbf{x} - \xi|. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда, как показано в [2], для произвольной точки области можно записать соотношение:

$$\begin{aligned} u(\xi, t_F) &= \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} u(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u^*(\xi, \mathbf{x}, t_F, t)}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma(\mathbf{x}) dt - \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} u^*(\xi, \mathbf{x}, t_F, t) d\Gamma(\mathbf{x}) dt - \\ &\quad - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \left[\left[u(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u^*(\xi, \mathbf{x}, t_F, t)}{\partial t} \right]_{t=t_0} - \left[\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} u^*(\xi, \mathbf{x}, t_F, t) \right]_{t=t_0} \right] d\Omega(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3)$$

В последнем соотношении интегрирование ведётся по всей части границы, в то время как функции $u(\mathbf{x}, t)$ и $q(\mathbf{x}, t)$ заданы каждая только на своей части границы. Поскольку последнее уравнение справедливо на всей области Ω , и, в том числе на её границе, функции $u(\mathbf{x}, t)$ и $q(\mathbf{x}, t)$ можно определить, взяв точку ξ на границе и решив получившееся граничное интегральное уравнение. Для регулярной границы граничное интегральное уравнение имеет вид [2]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(\xi, t_F) = & \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} u(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u^*(\xi, \mathbf{x}, t_F, t)}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma(\mathbf{x}) dt - \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} u^*(\xi, \mathbf{x}, t_F, t) d\Gamma(\mathbf{x}) dt - \\ & - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \left[\left[u(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u^*(\xi, \mathbf{x}, t_F, t)}{\partial t} \right]_{t=t_0} - \left[\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} u^*(\xi, \mathbf{x}, t_F, t) \right]_{t=t_0} \right] d\Omega(\mathbf{x}). \quad (4) \end{aligned}$$

Уравнение (4) справедливо для задач, сформулированных для областей произвольной размерности. Различия проявляются в виде фундаментального решения, определяемого уравнением (2). В качестве иллюстрации рассмотрим одномерный случай.

Одномерный случай. Фундаментальное решение уравнения (2) для одномерного случая имеет вид:

$$u^*(\xi, x, t_F, t) = \frac{cH(c(t_F - t) - r)}{2}$$

и представляет собой ответ среды на приложенное возмущение вида δ -функции.

Нормальная производная функции на границе Γ имеет вид:

$$q^*(\xi, x, t_F, t) = \frac{\partial u^*(\xi, x, t_F, t)}{\partial n} = -c \frac{\delta(c(t_F - t) - r)}{2} n_r,$$

здесь $n_r = \partial r / \partial n$.

Поскольку в одномерном случае граница Γ области Ω представляет собой точки a и b отрезка, а также с учётом вида фундаментального решения и его производной, первые два интегральных слагаемых в уравнениях (3) и (4) находятся аналитически:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_F} q(x, t) \frac{c}{2} H(c(t_F - t) - |x - \xi|) \Big|_a^b dt &= \frac{c}{2} \int_{t_0}^{\max(t_0, t_R)} q(x, t) dt \Big|_a^b, \\ \int_{t_0}^{t_F} -u(x, t) \frac{cn_r}{2} \delta(c(t_F - t) - |x - \xi|) \Big|_a^b dt &= -\frac{cn_r}{2} u(x, t) \Big|_{t=t_R} \Big|_a^b, \end{aligned}$$

где $t_R = t_F - \frac{r}{c}$ характеризует запаздывание.

Интегрирование третьего и четвёртого слагаемых в уравнениях (3) и (4) по отрезку $[a, b]$ также проводится аналитически:

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[u(x, t) c^2 \frac{\delta(c(t_F - t) - |x - \xi|)}{2} \right]_{t=t_0} dx &= -\frac{c^2}{2} \left(u(\xi - c(t_F - t_0), t_0) + (\xi + c(t_F - t_0), t_0) \right), \\ \int_a^b \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \frac{cH(c(t_F - t) - |x - \xi|)}{2} \right]_{t=t_0} dx &= \frac{c}{2} \int_{\max(\xi - c(t_F - t), a)}^{\min(\xi + c(t_F - t), b)} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx \Big|_{t=t_0}, \end{aligned}$$

Таким образом, в одномерном случае соотношение (3) для произвольной точки внутри области Ω принимает вид:

$$u(\xi, t_F) = -\frac{c}{2} \int_{t_0}^{\max(t_0, t_R)} q(x, t) dt \Big|_a^b - \frac{cn_r}{2} u(x, t) \Big|_{t=t_R} \Big|_a^b + \\ + \frac{u(\xi - c(t_F - t_0), t_0) + u(\xi + c(t_F - t_0), t_0)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{\max(\xi - c(t_F - t), a)}^{\min(\xi + c(t_F - t), b)} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx \Big|_{t=t_0} \quad (5)$$

Легко заметить, что если границы устремить к бесконечности, в последнем выражении члены, определяемые границей, в (5) обращаются в ноль, и выражение (5) превращается в известную формулу Даламбера [3]. В случае ограниченной области Ω в уравнение (5) входят выражения, не определённые граничными условиями. Поскольку (5) справедливо во всей области Ω , в том числе и на ее границе, то, устремив точку ξ к границе, получаем два уравнения относительно двух неизвестных функций:

$$\frac{1}{2} u(\xi, t_F) = -\frac{c}{2} \int_{t_0}^{\max(t_0, t_R)} q(x, t) dt \Big|_a^b - \frac{cn_r}{2} u(x, t) \Big|_{t=t_R} \Big|_a^b + \\ + \frac{u(\xi - c(t_F - t_0), t_0) + u(\xi + c(t_F - t_0), t_0)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{\max(\xi - c(t_F - t), a)}^{\min(\xi + c(t_F - t), b)} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx \Big|_{t=t_0} \quad \xi \rightarrow a \\ \frac{1}{2} u(\xi, t_F) = -\frac{c}{2} \int_{t_0}^{\max(t_0, t_R)} q(x, t) dt \Big|_a^b - \frac{cn_r}{2} u(x, t) \Big|_{t=t_R} \Big|_a^b + \\ + \frac{u(\xi - c(t_F - t_0), t_0) + u(\xi + c(t_F - t_0), t_0)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{\max(\xi - c(t_F - t), a)}^{\min(\xi + c(t_F - t), b)} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx \Big|_{t=t_0} \quad \xi \rightarrow b. \quad (6)$$

Таким образом, получено два уравнения с двумя неизвестными, при этом возможны следующие случаи:

- 1) на границах заданы перемещения $u(a, t)$, $u(b, t)$; в этом случае получаем систему из двух уравнений Фредгольма относительно натяжений $q(a, t)$, $q(b, t)$;
- 2) на границах заданы деформации $q(a, t)$, $q(b, t)$; в этом случае получаем систему из двух алгебраических уравнений относительно перемещений $u(a, t)$, $u(b, t)$;
- 3) на одной границе заданы перемещения, на другой деформации, в этом случае получаем систему из двух уравнений — одного Фредгольма и одного алгебраического.

Уравнение Фредгольма можно свести к дифференциальному.

Колебания закреплённой струны. Рассмотрим в качестве первого примера классическую задачу о колебаниях струны, закреплённой в точках x_1 и x_2 к неподвижному основанию. В начальный момент времени заданы положение и скорость каждой точки струны. Задача заключается в нахождении функции перемещений $u(x, t)$ удовлетворяющей на отрезке $[x_1, x_2]$ уравнение колебаний, начальным и граничным условиям:

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \\ u(x_1, t) = 0, \quad u(x_2, t) = 0. \quad (7)$$

Граничные интегральные уравнения (6) дают два соотношения для определения деформаций

В точках x_1 и x_2 :

$$\begin{cases} \frac{c}{2} \left(\int_{t_0}^{\max(t_0, t_F)} q(x_1, t) dt - \int_{t_0}^{\max(t_0, t_R)} q(x_2, t) dt \right) + \left[\frac{\varphi(x_1 + c(t_F - t_0))}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x_1}^{\min(x_1 + c(t_F - t_0), x_2)} \psi(x) dx \right] = 0, \\ \frac{c}{2} \left(\int_{t_0}^{\max(t_0, t_R)} q(x_1, t) dt - \int_{t_0}^{\max(t_0, t_F)} q(x_2, t) dt \right) + \left[\frac{\varphi(x_2 + c(t_F - t_0))}{2} + \frac{1}{2c} \int_{\min(x_2 - c(t_F - t_0), x_1)}^{x_2} \psi(x) dx \right] = 0. \end{cases}$$

От полученных интегральных уравнений можно перейти к рекуррентным, дифференцируя их по времени. Система рекуррентных уравнений для неизвестных функций деформаций в точках x_1 и x_2 выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} q(x_1, t_F) = q(x_2, t_R) - \left[\varphi_x(x_1 + c(t_F - t_0)) + \frac{\psi(x_1 + c(t_F - t_0))}{c} \right] H(c(t_F - t_0) - |x_2 - x_1|), \\ q(x_2, t_F) = q(x_1, t_R) - \left[\varphi_x(x_2 + c(t_F - t_0)) + \frac{\psi(x_2 + c(t_F - t_0))}{c} \right] H(c(t_F - t_0) - |x_2 - x_1|). \end{cases}$$

Для произвольной точки отрезка $[x_1, x_2]$ соотношение (5) применительно к данной задаче принимает вид

$$u(\xi, t_F) = -\frac{c}{2} \left(\int_{t_0}^{\max(t_0, t_R)} q(x_2, t) dt - \int_{t_0}^{\max(t_0, t_F)} q(x_1, t) dt \right) + \frac{\varphi(\xi - c(t_F - t_0)) + \varphi(\xi + c(t_F - t_0))}{2} + \frac{1}{2c} \int_{\max(\xi - c(t_F - t_0), x_1)}^{\min(\xi + c(t_F - t_0), x_2)} \psi(x) dx.$$

В последнем выражении функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены только внутри отрезка $[x_1, x_2]$, поэтому последняя формула справедлива в предположении, что функции равны нулю вне отрезка. На рис. 1 представлены колебания струны для заданного начального отклонения $\varphi(x) = e^{-x^2}$; $\psi(x) = 0$; $c = 2$.

Рис. 1. Профиль (а) и деформации (б) струны в момент времени $t = 1$ сек

Колебания бесконечной струны. В качестве второго примера рассмотрим задачу о колебаниях бесконечной струны, закреплённой в точках x_1 и x_2 упругими подвесами. В начальный момент времени положение струны и её поперечные составляющие скорости считаются известными, продольных перемещений во все время движения не происходит.

Математическая постановка задачи заключается в следующем: требуется найти решение, удовлетворяющее уравнение колебаний:

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + \delta(x - x_1) f_1(t) + \delta(x - x_2) f_2(t), \quad (8)$$

где $\delta(x)$ есть δ -функция Дирака. Заранее неизвестные функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, входящие в уравнение, отражают воздействие упругих подвесов.

Кроме того, решение удовлетворяет начальным условиям (7) и дополнительным условиям, отражающим воздействия упругих подвесов:

$$u_x(x_1 + 0, t) - u_x(x_1 - 0, t) = hu(x_1, t), \quad u_x(x_2 + 0, t) - u_x(x_2 - 0, t) = hu(x_2, t), \quad (9)$$

$$u(x_1 + 0, t) = u(x_1 - 0, t), \quad u(x_2 + 0, t) = u(x_2 - 0, t). \quad (10)$$

Здесь условия (9) заключают в себе упругие силы, пропорциональные отклонению струны в точках от нулевого положения, а условия (10) — непрерывность перемещений в точках закрепления упругих подвесов.

Для каждой из трёх областей: $(-\infty, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, +\infty)$ справедливо уравнение (5), а на границах выполнены граничные интегральные уравнения (6). Последние дают по одному уравнению для границы в областях $(-\infty, x_1]$, $[x_2, +\infty)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(x_1, t_F) = & -\frac{c}{2} \int_{t_0}^{t_F} q(x_1 - 0, t) dt - \frac{c}{2}u(x_1, t_F) + \\ & + \frac{\varphi(x_1 - c(t_F - t_0)) + \varphi(x_1 + c(t_F - t_0))}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x_1 - c(t_F - t_0)}^{x_1} \psi(x) dx, \\ \frac{1}{2}u(x_2, t_F) = & \frac{c}{2} \int_{t_0}^{t_F} q(x_2 - 0, t) dt + \frac{c}{2}u(x_2, t_F) + \\ & + \frac{\varphi(x_2 - c(t_F - t_0)) + \varphi(x_2 + c(t_F - t_0))}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x_2}^{x_2 + c(t_F - t_0)} \psi(x) dx, \quad (11) \end{aligned}$$

и два уравнения для границы в области $[x_1, x_2]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(x_1, t_F) = & -\frac{c}{2} \left(\int_{t_0}^{t_F} q(x_1 + 0, t) dt - \int_{t_0}^{\max(t_0, t_R)} q(x_2 - 0, t) dt \right) + \frac{c}{2} (u(x_1, t_F) - u(x_2, t_R)) + \\ & + \frac{\varphi(x_1 - c(t_F - t_0)) + \varphi(x_1 + c(t_F - t_0))}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x_1}^{\min(x_1 + c(t_F - t_0), x_2)} \psi(x) dx, \\ \frac{1}{2}u(x_2, t_F) = & -\frac{c}{2} \left(\int_{t_0}^{\max(t_0, t_R)} q(x_1 + 0, t) dt - \int_{t_0}^{t_F} q(x_2 - 0, t) dt \right) + \frac{c}{2} (u(x_1, t_R) - u(x_2, t_F)) + \\ & + \frac{\varphi(x_2 - c(t_F - t_0)) + \varphi(x_2 + c(t_F - t_0))}{2} + \frac{1}{2c} \int_{\max(x_2 - c(t_F - t_0), x_1)}^{x_2} \psi(x) dx. \quad (12) \end{aligned}$$

Таким образом, образуется система из четырёх уравнений относительно шести неизвестных функций $u(x_1, t)$, $u(x_2, t)$, $q(x_1 - 0, t)$, $q(x_1 + 0, t)$, $q(x_2 - 0, t)$, $q(x_2 + 0, t)$, которые вместе с дополнительными условиями (9) и (10) образуют замкнутую систему уравнений.

Вне области, в которой определено решение, соотношение (5) даёт ноль. В силу суперпозиции решений кроме уравнений (11) и (12) запишем соотношения для точки x_1 от влияния по участку

$[x_2, +\infty)$ и для точки x_2 от влияния по участку $(-\infty, x_1]$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{c}{2} \int_{t_0}^{t_R} q(x_2 + 0, t) dt + \frac{c}{2} u(x_2, t_R) + \frac{\varphi(x_1 - c(t_F - t_0)) + \varphi(x_1 + c(t_F - t_0))}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x_1}^{x_1 + c(t_F - t_0)} \psi(x) dx, \\ 0 &= \frac{c}{2} \int_{t_0}^{t_R} q(x_1 + 0, t) dt + \frac{c}{2} u(x_1, t_R) + \frac{\varphi(x_2 - c(t_F - t_0)) + \varphi(x_2 + c(t_F - t_0))}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x_2 - c(t_F - t_0)}^{x_2} \psi(x) dx. \end{aligned} \quad (13)$$

В последних соотношениях функции, входящих в каждое из соотношений, определены только в области своих участков. В силу этого, складывая уравнения (11), (12) и (13), а также учитывая дополнительные условия (9) и (10), получаем уравнения относительно перемещений в точках x_1 и x_2 в интегральной форме:

$$\begin{aligned} u(x_1, t_F) &= -\frac{ch}{2} \left(\int_{t_0}^{t_F} u(x_1, t) dt + \int_{t_0}^{\max(t_0, t_R)} u(x_2, t) dt \right) + \\ &\quad + \frac{\varphi(x_1 - c(t_F - t_0)) + \varphi(x_1 + c(t_F - t_0))}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x_1 - c(t_F - t_0)}^{x_1 + c(t_F - t_0)} \psi(x) dx, \\ u(x_2, t_F) &= \frac{ch}{2} \left(\int_{t_0}^{\max(t_0, t_R)} u(x_1, t) dt + \int_{t_0}^{t_F} u(x_2, t) dt \right) + \\ &\quad + \frac{\varphi(x_2 - c(t_F - t_0)) + \varphi(x_2 + c(t_F - t_0))}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x_2 - c(t_F - t_0)}^{x_2 + c(t_F - t_0)} \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Дифференцируя по времени последние соотношения, получаем задачу Коши для перемещений в точках x_1 и x_2 :

$$\begin{aligned} u_t(x_1, t_F) &= -\frac{ch}{2} (u(x_1, t_F) + u(x_2, t_F - \tau)) + c \frac{\varphi'(x_1 + c(t_F - t_0)) - \varphi'(x_1 - c(t_F - t_0))}{2} + \\ &\quad + \frac{\psi(x_1 + c(t_F - t_0)) + \psi(x_1 - c(t_F - t_0))}{2}, \\ u_t(x_2, t_F) &= \frac{ch}{2} (u(x_2, t_F) + u(x_1, t_F - \tau)) + c \frac{\varphi'(x_2 + c(t_F - t_0)) - \varphi'(x_2 - c(t_F - t_0))}{2} + \\ &\quad + \frac{\psi(x_2 + c(t_F - t_0)) + \psi(x_2 - c(t_F - t_0))}{2}, \end{aligned}$$

где $\tau = \frac{|x_1 - x_2|}{c}$ — время прохождения волны от одного подвеса до другого. Дифференцируя по времени (11) получим выражения для деформаций:

$$\begin{aligned} q(x_1 + 0, t_F) &= \frac{\varphi'(x_1 + c(t_F - t_0)) - \varphi'(x_1 - c(t_F - t_0))}{2} - \left(\frac{2 + c}{c} \right) u_t(x_1, t_F) - \frac{1}{c} \psi(x_1 - c(t_F - t_0)), \\ q(x_2 - 0, t_F) &= \frac{\varphi'(x_2 + c(t_F - t_0)) - \varphi'(x_2 - c(t_F - t_0))}{2} - \left(\frac{2 - c}{c} \right) u_t(x_2, t_F) - \frac{1}{c} \psi(x_2 + c(t_F - t_0)). \end{aligned}$$

Рис. 2. Усилия подвесов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ (одинаковые из-за симметрии задачи)

элементов, становится тем более актуально при решении задач большей размерности и задач с особенностями границы, поскольку позволяет уйти от некорректной операции численного дифференцирования.

Рис. 3. Профиль (а) и деформации (б) струны в момент времени $t = 4$ сек

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Федотов, В. П. Решение связанных диффузионно-деформационных задач на основе алгоритмов параллельного действия / В. П. Федотов, Л. Ф. Спевак. — Екатеринбург: УрО РАН, 2007. — 191 с. — ISBN 5-7691-1807-5.
2. Бреббия, К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. — М.: Мир, 1987. — 524 с.
3. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М.: Наука, 1977. — 728 с.

Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург
fedotov@imach.uran.ru; konteev1307@mail.ru

Поступила 01.10.2007

В окончательном варианте
27.02.2008

V. P. Fedotov, A. A. Konteev

APPROACH TO SOLUTION OF HYPERBOLIC TYPE EQUATIONS BY METHOD OF BOUNDARY ELEMENTS

The paper presents a method of solution of hyperbolic type problems by the boundary elements method. Using example of an one-dimensional case a resolving boundary equation was obtained and applicability of the method was shown. In particular, the paper shows a possibility of precise calculation of partial derivative, that is of high practical importance, as it allows to discover stresses correctly even for problems with singularities.

Institute of Engineering Science, Ural Branch,
Russian Academy of Sciences; Yekaterinburg, Russia
fedotov@imach.uran.ru; konteev1307@mail.ru

Received 01.10.2007