Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Уткина, Об одной трёхмерной задаче Гурса, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2001, выпуск 12, 30–35

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu58>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:07:06

ОБ ОДНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ГУРСА

Для дифференциального уравнения шестого порядка в E_3 со старшей частной производной в случае двукратных характеристик разрабатывается вариант метода Римана, позволяющий получить решения задачи Гурса. Указываются частные случаи, когда функция Римана (а, следовательно, и решение рассматриваемой задачи) может быть записано в явном виде.

В области $D = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1, z_0 < z < z_1\}$ рассмотрим уравнение с переменными коэффициентами

$$L(u) \equiv \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^2 a_{\alpha\beta\gamma}(x, y, z) \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma} = F(x, y, z). \quad (1)$$

Его можно считать пространственным обобщением уравнения, изучавшегося в [1-8]. Наиболее общие результаты получены в [7]. С другой стороны, (1) можно считать усложнением уравнения из работ [8-10] со старшей производной u_{xyz} , которое играет важную роль в теории аппроксимации и отображений и при описании процессов вибрации [12, с.109]. К подобному же уравнению сводится задача интегрального представления преобразований одних обыкновенных линейных дифференциальных операторов в другие [13].

1. Пусть X, Y, Z - грани D при $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ соответственно. Будем считать, что $a_{221} \equiv 1$, а гладкость остальных коэффициентов (1) определяется включениями

$$a_{\alpha\beta\gamma} \in C^{\alpha+\beta+\gamma}(\overline{D}), F \in C^{2+2+1}(\overline{D}). \quad (2)$$

Здесь $C^{\alpha+\beta+\gamma}$ описывает класс непрерывных в $\overline{D}$ вместе с их производными $\partial^{r+s+t} / \partial x^r \partial y^s \partial z^t$ ($r = 0, \dots, \alpha; s = 0, \dots, \beta; t = 0, \dots, \gamma$) функций.

Задача (Гурса). Найти в классе $C^{2+2+2}(D)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} u|_X &= \varphi(y, z), u|_Y = \psi(x, z), u|_Z = \theta(x, y), \\ u_x|_X &= \varphi_1(y, z), u_y|_Y = \psi_1(x, z), u_z|_Z = \theta_1(x, y), \\ \theta, \theta_1 &\in C^{2+2}(\overline{Z}), \varphi, \varphi_1 \in C^{2+2}(\overline{X}), \psi, \psi_1 \in C^{2+2}(\overline{Y}). \end{aligned} \quad (3)$$

Полагаем на ребрах D выполнение условий согласования

$$\varphi(y_0, z) = \psi(x_0, z), \varphi(y, z_0) = \theta(x_0, y), \psi(x, z_0) = \theta(x, y_0), \quad (4)$$

при этом сами согласованные значения непрерывно дифференцируемы.

Решение данной задачи будем осуществлять путем развития варианта метода Римана [8, 10].

Функцией Римана $R(x, y, z, \xi, \eta, \varsigma)$ назовем решение интегрального уравнения

$$\begin{aligned} V(x, y, z) - \int_{\varsigma}^z [a_{221}(x, y, \gamma)V(x, y, \gamma) - (z - \gamma)a_{220}(x, y, \gamma)V(x, y, \gamma)]d\gamma - \\ - \int_{\eta}^y [a_{212}(x, \beta, z)V(x, \beta, z) - (y - \beta)a_{202}(x, \beta, z)V(x, \beta, z)]d\beta - \int_{\xi}^x [a_{122}(\alpha, y, z)V(\alpha, y, z) - \\ - (x - \alpha)a_{022}(\alpha, y, z)V(\alpha, y, z)]d\alpha + \int_{\xi}^x \int_{\eta}^y [a_{112}(\alpha, \beta, z)V(\alpha, \beta, z) - \\ - (y - \beta)a_{102}(\alpha, \beta, z)V(\alpha, \beta, z) - (x - \alpha)a_{012}(\alpha, \beta, z)V(\alpha, \beta, z) + \\ + (x - \alpha)(y - \beta)a_{002}(\alpha, \beta, z)V(\alpha, \beta, z)]d\beta d\alpha + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\xi}^x \int_{\varsigma}^z [a_{121}(\alpha, y, \gamma)V(\alpha, y, \gamma) - (z - \gamma)a_{120}(\alpha, y, \gamma)V(\alpha, y, \gamma) - \\
& - (x - \alpha)a_{021}(\alpha, y, \gamma)V(\alpha, y, \gamma) + (x - \alpha)(z - \gamma)a_{020}(\alpha, y, \gamma)V(\alpha, y, \gamma)]d\gamma d\alpha + \\
& + \int_{\eta}^y \int_{\varsigma}^z [a_{211}(x, \beta, \gamma)V(x, \beta, \gamma) - (y - \beta)a_{201}(x, \beta, \gamma)V(x, \beta, \gamma) - \\
& - (z - \gamma)a_{210}(x, \beta, \gamma)V(x, \beta, \gamma) + (y - \beta)(z - \gamma)a_{200}(x, \beta, \gamma)V(x, \beta, \gamma)]d\gamma d\beta - \\
& - \int_{\xi}^x \int_{\eta}^y \int_{\varsigma}^z [a_{111}(\alpha, \beta, \gamma)V(\alpha, \beta, \gamma) - (y - \beta)a_{101}(\alpha, \beta, \gamma)V(\alpha, \beta, \gamma) - \\
& - (x - \alpha)a_{011}(\alpha, \beta, \gamma)V(\alpha, \beta, \gamma) - (z - \gamma)a_{110}(\alpha, \beta, \gamma)V(\alpha, \beta, \gamma) + \\
& + (y - \beta)(z - \gamma)a_{100}(\alpha, \beta, \gamma)V(\alpha, \beta, \gamma) + (x - \alpha)(z - \gamma)a_{010}(\alpha, \beta, \gamma)V(\alpha, \beta, \gamma) + \\
& + (x - \alpha)(y - \beta)a_{001}(\alpha, \beta, \gamma)V(\alpha, \beta, \gamma) - \\
& - (x - \alpha)(y - \beta)(z - \gamma)a_{000}(\alpha, \beta, \gamma)V(\alpha, \beta, \gamma)]d\gamma d\beta d\alpha = 1,
\end{aligned} \tag{5}$$

которое существует и единственно [14, с.180].

Непосредственной проверкой можно убедиться в выполнении тождества для любой функции u из класса $C^{2+2+2}(D)$:

$$\begin{aligned}
(uR)_{xyyz} & \equiv RL(u) + (uA_1)_{xyyz} + (uA_2)_{xyyz} + (uA_3)_{xyyz} - (uB_1)_{xyyz} - (uB_2)_{xyyz} - \\
& - (uB_3)_{xyyz} - (uB_4)_{xyyz} - (uB_5)_{xyyz} - (uB_6)_{xyyz} + (uC_1)_{xyyz} + (uC_2)_{xyyz} + \\
& + (uC_3)_{xyyz} + (uC_4)_{xyyz} + (uC_5)_{xyyz} + (uC_6)_{xyyz} + (uC_7)_{xyyz} - (uD_1)_{xyyz} - \\
& - (uD_2)_{xyyz} - (uD_3)_{xyyz} + (uE_1)_{xyyz} + (uE_2)_{xyyz} + (uE_3)_{xyyz} - (uD_4)_{xyyz} - (uD_5)_{xyyz} - \\
& - (uD_6)_{xyyz} + \{u(a_{002}R)_z + u_x(a_{102}R)_z + u_y(a_{012}R)_z + u_{xy}(a_{112}R)_z + u_{xx}(a_{202}R)_z + \\
& + u_{yy}(a_{022}R)_z + u_{xyy}(a_{212}R)_z + u_{xyy}(a_{122}R)_z + u_{xyyz}R_z\}_z + \{u(a_{202}R)_{xz} + u_y(a_{212}R)_{xz} + \\
& + u_{yy}R_{xz}\}_{xz} + \{u(a_{022}R)_{yz} + u_x(a_{122}R)_{yz} + u_{xx}R_{yz}\}_{yz} + \{uR_{xyz}\}_{xyz} + \{u(a_{200}R)_x + \\
& + u_y(a_{210}R)_x + u_{yy}(a_{220}R)_x + u_z(a_{201}R)_x + u_{zz}(a_{202}R)_x + u_{yz}(a_{211}R)_x + u_{yyz}(a_{221}R)_x + \\
& + u_{yzz}(a_{212}R)_x + u_{yyzz}R_x\}_x + \{u(a_{020}R)_y + u_x(a_{120}R)_y + u_z(a_{021}R)_y + u_{xz}(a_{121}R)_y + \\
& + u_{xx}(a_{220}R)_y + u_{zz}(a_{022}R)_y + u_{xzz}(a_{122}R)_y + u_{xxz}(a_{221}R)_y + u_{xxzz}R_y\}_y + \\
& + \{u(a_{220}R)_{xy} + u_z(a_{221}R)_{xy} + u_{zz}R_{xy}\}_{xy},
\end{aligned} \tag{6}$$

где введены обозначения:

$$\begin{aligned}
A_1 & = R_z - a_{221}R, \quad A_2 = R_y - a_{212}R, \quad A_3 = R_x - a_{122}R, \\
B_1 & = R_{xy} - (a_{212}R)_x - (a_{122}R)_y + a_{112}R, \quad B_2 = R_{yz} - (a_{221}R)_y - (a_{212}R)_z + a_{211}R, \\
B_3 & = R_{xz} - (a_{221}R)_x - (a_{122}R)_z + a_{121}R, \quad B_4 = R_{zz} - (a_{221}R)_z + a_{220}R, \\
B_5 & = R_{yy} - (a_{212}R)_y + a_{202}R, \quad B_6 = R_{xx} - (a_{122}R)_x + a_{022}R, \\
C_1 & = R_{xyz} - (a_{221}R)_{xy} - (a_{212}R)_{xz} - (a_{122}R)_{yz} + (a_{112}R)_z + \\
& + (a_{211}R)_x + (a_{121}R)_y - a_{111}R, \\
C_2 & = R_{xyy} - (a_{212}R)_{xy} - (a_{122}R)_{yy} - (a_{112}R)_y + (a_{202}R)_x - a_{102}R, \\
C_3 & = R_{xzz} - (a_{221}R)_{xz} - (a_{122}R)_{zz} - (a_{121}R)_z + (a_{220}R)_x - a_{120}R, \\
C_4 & = R_{yzz} - (a_{221}R)_{yz} - (a_{212}R)_{zz} + (a_{211}R)_z + (a_{220}R)_y - a_{210}R, \\
C_5 & = R_{yyz} - (a_{221}R)_{yy} - (a_{212}R)_{yz} + (a_{211}R)_y + (a_{202}R)_z - a_{201}R, \\
C_6 & = R_{xxz} - (a_{221}R)_{xx} - (a_{122}R)_{xz} + (a_{121}R)_x + (a_{022}R)_y - a_{021}R, \\
C_7 & = R_{xxy} - (a_{212}R)_{xx} - (a_{122}R)_{xy} + (a_{112}R)_x + (a_{022}R)_y - a_{012}R,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= R_{xyzz} - (a_{221}R)_{xyz} - (a_{212}R)_{xzz} - (a_{122}R)_{yzz} + (a_{112}R)_{zz} + (a_{211}R)_{xz} + (a_{121}R)_{yz} + \\
&+ (a_{220}R)_{xy} - (a_{111}R)_z - (a_{120}R)_y - (a_{210}R)_x + a_{110}R, \\
D_2 &= R_{xyyz} - (a_{221}R)_{xyy} - (a_{212}R)_{xyz} - (a_{122}R)_{yyz} + (a_{112}R)_{yz} + (a_{211}R)_{xy} + (a_{121}R)_{yy} + \\
&+ (a_{202}R)_{xz} - (a_{111}R)_y - (a_{102}R)_z - (a_{201}R)_x + a_{101}R, \\
D_3 &= R_{xxyz} - (a_{221}R)_{xxy} - (a_{212}R)_{xxz} - (a_{122}R)_{xyz} + (a_{112}R)_{xz} + (a_{211}R)_{xx} + (a_{121}R)_{xy} + \\
&+ (a_{022}R)_{yz} - (a_{111}R)_x - (a_{021}R)_y - (a_{012}R)_z + a_{011}R, \\
D_4 &= R_{xxyy} - (a_{212}R)_{xxy} - (a_{122}R)_{xyy} + (a_{112}R)_{xy} + (a_{202}R)_{xx} + (a_{022}R)_{yy} - (a_{102}R)_x - \\
&- (a_{012}R)_y + a_{002}R, \\
D_5 &= R_{xxzz} - (a_{221}R)_{xxz} - (a_{122}R)_{xzz} + (a_{121}R)_{xz} + (a_{220}R)_{xx} + (a_{022}R)_{zz} - (a_{120}R)_x - \\
&- (a_{012}R)_z + a_{020}R, \\
D_6 &= R_{yyzz} - (a_{221}R)_{yyz} - (a_{212}R)_{yzz} + (a_{211}R)_{yz} + (a_{220}R)_{yy} + (a_{202}R)_{zz} - (a_{210}R)_y - \\
&- (a_{201}R)_z + a_{200}R, \\
E_1 &= R_{xyyz} - (a_{221}R)_{xyyz} - (a_{212}R)_{xyzz} - (a_{122}R)_{yyzz} + (a_{112}R)_{yzz} + (a_{211}R)_{xyz} + \\
&+ (a_{121}R)_{yyz} + (a_{220}R)_{xxy} + (a_{202}R)_{xzz} - (a_{111}R)_{yz} - (a_{102}R)_{zz} - (a_{120}R)_{yy} - \\
&- (a_{210}R)_{xy} - (a_{201}R)_{xz} + (a_{110}R)_y + (a_{101}R)_z + (a_{200}R)_x - a_{100}R, \\
E_2 &= R_{xxyz} - (a_{221}R)_{xxyz} - (a_{212}R)_{xxzz} - (a_{122}R)_{xyzz} + (a_{112}R)_{xzz} + (a_{211}R)_{xxz} + \\
&+ (a_{121}R)_{xyz} + (a_{220}R)_{xxy} + (a_{022}R)_{yzz} - (a_{111}R)_{xz} - (a_{120}R)_{xy} - (a_{210}R)_{xx} - \\
&- (a_{021}R)_{yz} - (a_{012}R)_{zz} + (a_{110}R)_x + (a_{011}R)_z + (a_{020}R)_y - a_{010}R, \\
E_3 &= R_{xxyy} - (a_{221}R)_{xxyy} - (a_{212}R)_{xxyz} - (a_{122}R)_{xyyz} + (a_{112}R)_{xyz} + (a_{211}R)_{xxy} + \\
&+ (a_{121}R)_{xyy} + (a_{202}R)_{xxz} + (a_{022}R)_{yyz} - (a_{111}R)_{xy} - (a_{102}R)_{xz} - (a_{201}R)_{xx} - \\
&- (a_{021}R)_{yy} - (a_{012}R)_{yz} + (a_{101}R)_x + (a_{011}R)_y + (a_{002}R)_z - a_{001}R,
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $a_{\alpha\beta\gamma}$ зависят от (x, y, z) , а R и ее производные — от $(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$. Получение (6) представляет собой эвристическую задачу. Само же тождество проще всего проверить непосредственным вычислением. При этом учитываем, что R по первой тройке аргументов удовлетворяет сопряженному с (1) уравнению

$$\begin{aligned}
L^*(V) &\equiv V_{xxyyz} - (a_{221}V)_{xxyyz} - (a_{211}V)_{xxyzz} - (a_{121}V)_{xyyzz} + (a_{112}V)_{xyzz} + \\
&+ (a_{211}V)_{xxyz} + (a_{121}V)_{xyyz} + (a_{220}V)_{xxyy} + (a_{202}V)_{xxzz} + (a_{022}V)_{yyzz} - \\
&- (a_{110}V)_{xyz} - (a_{102}V)_{xzz} - (a_{120}V)_{xxy} - (a_{210}V)_{xxy} - (a_{201}V)_{xxz} - (a_{021}V)_{yyz} + \\
&- (a_{012}V)_{yzz} + (a_{110}V)_{xy} + (a_{101}V)_{xz} + (a_{011}V)_{yz} + (a_{002}V)_{zz} + \\
&+ (a_{020}V)_{yy} + (a_{200}V)_{xx} - (a_{100}V)_x - \\
&- (a_{010}V)_y - (a_{001}V)_z - a_{000}V = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Из (5) непосредственно следует, что

$$\begin{aligned}
&A_1(x, y, z, x, y, z) \equiv A_2(x, y, z, x, y, z) \equiv A_3(x, y, z, x, y, z) \equiv B_1(x, y, z, x, y, z) \equiv \\
&\equiv B_2(x, y, z, x, y, z) \equiv B_3(x, y, z, x, y, z) \equiv B_4(x, y, z, x, y, z) \equiv B_5(x, y, z, x, y, z) \equiv \\
&\equiv C_1(x, y, z, x, y, z) \equiv C_2(x, y, z, x, y, z) \equiv C_3(x, y, z, x, y, z) \equiv C_4(x, y, z, x, y, z) \equiv \\
&\equiv C_5(x, y, z, x, y, z) \equiv C_6(x, y, z, x, y, z) \equiv C_7(x, y, z, x, y, z) \equiv D_1(x, y, z, x, y, z) \equiv \\
&\equiv D_2(x, y, z, x, y, z) \equiv D_3(x, y, z, x, y, z) \equiv D_4(x, y, z, x, y, z) \equiv D_5(x, y, z, x, y, z) \equiv \\
&\equiv D_6(x, y, z, x, y, z) \equiv E_1(x, y, z, x, y, z) \equiv E_2(x, y, z, x, y, z) \equiv E_3(x, y, z, x, y, z) \equiv 0
\end{aligned} \tag{9}$$

Положим теперь в (6) $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$, $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$ и вычислим от правой и левой части тройной интеграл в пределах $x_0 < \alpha < x$, $y_0 < \beta < y$, $z_0 < \gamma < z$. Учитывая при этом тождества (9), граничные условия (3) и то, что $u(x, y, z)$ является решением уравнения (1), приходим к соотношению:

$$\begin{aligned}
u_{xyz} = & \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z R(\alpha, \beta, \gamma, x, y, z) d\gamma d\beta d\alpha + \phi_{1yz}(y, z) R(x_0, y, z, x, y, z) + \\
& + \psi_{1xz}(x, z) R(x, y_0, z, x, y, z) - \phi_{1yz}(y_0, z) R(x_0, y_0, z, x, y, z) + \\
& + \theta_{1xy}(x, y) R(x, y, z_0, x, y, z) - \phi_{1yz}(y, z_0) R(x_0, y, z_0, x, y, z) - \\
& - \psi_{1xz}(x, z_0) R(x, y_0, z_0, x, y, z) + \phi_{1yz}(y_0, z_0) R(x_0, y_0, z_0, x, y, z) - \\
& - A_1(x_0, y, z) \phi_{1y}(y, z) - A_1(x, y_0, z) \psi_{1y}(x, z) + A_1(x_0, y_0, z) \phi_{1y}(y_0, z) - \\
& - A_1(x, y, z_0) \theta_{xy}(x, y) + A_1(x_0, y, z_0) \phi_{1y}(y, z_0) + A_1(x, y_0, z_0) \psi_{1x}(x, z_0) - \\
& - A_1(x_0, y_0, z_0) \phi_{1y}(y_0, z_0) - A_2(x_0, y, z) \phi_{1z}(y, z) - A_2(x, y_0, z) \psi_{xz}(x, z) + \\
& + A_2(x_0, y_0, z) \phi_{1z}(y_0, z) - A_2(x, y, z_0) \theta_{1x}(x, y) + A_2(x_0, y, z_0) \phi_{1y}(y, z_0) + \\
& + A_2(x, y_0, z_0) \theta_{1x}(x, y_0) - A_2(x_0, y_0, z_0) \phi_{1z}(y_0, z_0) - A_3(x_0, y, z) \phi_{yz}(y, z) - \\
& - A_3(x, y_0, z) \psi_{1z}(x, z) + A_3(x_0, y_0, z) \psi_{1z}(x_0, z) - A_3(x, y, z_0) \theta_{1y}(x, y) + \\
& + A_3(x_0, y, z_0) \theta_{1y}(x_0, y) + A_3(x, y_0, z_0) \psi_{1z}(x, z_0) - A_3(x_0, y_0, z_0) \psi_{1z}(x_0, z_0) + \\
& + B_1(x_0, y, z) \phi_z(y, z) + B_1(x, y_0, z) \psi_z(x, z) - B_1(x_0, y_0, z) \phi_z(y_0, z) + \\
& + B_1(x, y, z_0) \theta_1(x, y) - B_1(x_0, y, z_0) \theta_1(x_0, y) - B_1(x, y_0, z_0) \theta_1(x, y_0) + \\
& + B_1(x_0, y_0, z_0) \theta_1(x_0, y_0) + B_2(x_0, y, z) \phi_1(y, z) + B_2(x, y_0, z) \psi_{1x}(x, z) - \\
& - B_2(x_0, y_0, z) \phi_1(y_0, z) + B_2(x, y, z_0) \theta(x, y) - B_2(x_0, y, z_0) \phi_1(y, z_0) - \\
& - B_2(x, y_0, z_0) \theta_x(x, y_0) + B_2(x_0, y_0, z_0) \phi_1(y_0, z_0) + B_3(x_0, y, z) \phi_y(y, z) + \\
& + B_3(x, y_0, z) \psi_1(x, z) - B_3(x_0, y_0, z) \psi_1(x_0, z) + B_3(x, y, z_0) \theta_y(x, y) - \\
& - B_3(x_0, y, z_0) \phi_y(y, z_0) - B_3(x, y_0, z_0) \psi_1(x, z_0) + B_3(x_0, y_0, z_0) \psi_1(x_0, z_0) - \\
& - C_1(x_0, y, z) \phi(y, z) - C_1(x, y_0, z) \psi(x, z) + C_1(x_0, y_0, z) \phi(y_0, z) - \\
& - C_1(x, y, z_0) \theta(x, y) + C_1(x_0, y, z_0) \phi(y, z_0) + C_1(x, y_0, z_0) \psi(x, z_0) - \\
& - C_1(x_0, y_0, z_0) \phi(y_0, z_0) + \\
& + \int_{x_0}^x \{ B_6(\alpha, y_0, z) \psi_{1z}(\alpha, z) + B_6(\alpha, y, z_0) \theta_{1y}(\alpha, y) + B_6(\alpha, y_0, z_0) \psi_{1z}(\alpha, z_0) - \\
& - C_6(\alpha, y_0, z) \psi_1(\alpha, z) - C_6(\alpha, y, z_0) \theta_y(\alpha, y) + C_6(\alpha, y_0, z_0) \psi_1(\alpha, z_0) - \\
& - C_7(\alpha, y_0, z) \psi_z(\alpha, z) - C_7(\alpha, y, z_0) \theta_1(\alpha, y) + C_7(\alpha, y_0, z_0) \theta_1(\alpha, y_0) + \\
& + D_3(\alpha, y_0, z) \psi(\alpha, z) + D_3(\alpha, y, z_0) \theta(\alpha, y) - D_3(\alpha, y_0, z_0) \psi(\alpha, z_0) \} d\alpha + \\
& + \int_{y_0}^y \{ B_5(x, \beta, z_0) \theta_{1x}(x, \beta) + B_5(x_0, \beta, z) \phi_{1z}(\beta, z) - B_5(x_0, \beta, z_0) \phi_{1z}(\beta, z_0) - \\
& - C_2(x_0, \beta, z) \phi_z(\beta, z) - C_2(x, \beta, z_0) \theta_1(x, \beta) + C_2(x_0, \beta, z_0) \theta_1(x_0, \beta) - \\
& - C_5(x_0, \beta, z) \phi_1(\beta, z) - C_5(x, \beta, z_0) \theta_x(x, \beta) + C_5(x_0, \beta, z_0) \phi_1(\beta, z_0) + \\
& + D_2(x_0, \beta, z) \phi(\beta, z) + D_2(x, \beta, z_0) \theta(x, \beta) - D_2(x_0, \beta, z_0) \phi(\beta, z_0) \} d\beta + \\
& + \int_{z_0}^z \{ B_4(x_0, y, \gamma) \phi_{1y}(y, \gamma) + B_4(x, y_0, \gamma) \psi_{1x}(x, \gamma) - B_4(x_0, y_0, \gamma) \phi_{1y}(y_0, \gamma) - \\
& - C_3(x_0, y, \gamma) \phi_y(y, \gamma) - C_3(x, y_0, \gamma) \psi_1(x, \gamma) + C_3(x_0, y_0, \gamma) \psi_1(x_0, \gamma) - \\
& - C_4(x_0, y, \gamma) \phi_1(y, \gamma) - C_4(x, y_0, \gamma) \psi_x(x, \gamma) + C_4(x_0, y_0, \gamma) \phi_1(y_0, \gamma) + \\
& + D_1(x_0, y, \gamma) \phi(y, \gamma) + D_1(x, y_0, \gamma) \psi(x, \gamma) - D_1(x_0, y_0, \gamma) \phi(y_0, \gamma) \} d\gamma +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \{D_4(\alpha, \beta, z_0)\theta_1(\alpha, \beta) - E_1(\alpha, \beta, z_0)\theta(\alpha, \beta)\}d\beta d\alpha + \\
& + \int_{x_0}^x \int_{z_0}^z \{D_5(\alpha, y_0, \gamma)\psi_1(\alpha, \gamma) - E_2(\alpha, y_0, \gamma)\psi(\alpha, \gamma)\}d\gamma d\alpha + \\
& + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z \{D_6(x_0, \beta, \gamma)\varphi_1(\beta, \gamma) - E_1(x_0, \beta, \gamma)\varphi(\beta, \gamma)\}d\gamma d\beta.
\end{aligned} \tag{10}$$

Отсюда, обозначив через $H(x, y, z, x, y, z)$ правую часть (10) без первого слагаемого, приходим к решению рассматриваемой задачи (1), (3):

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) = & \varphi(y, z) + \psi(x, z) + \theta(x, y) - \varphi(y_0, z) - \psi(x, z_0) - \theta(x_0, y) + \varphi(y_0, z_0) + \\
& + \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z H(\alpha, \beta, \gamma, \alpha, \beta, \gamma)d\gamma d\beta d\alpha + \\
& + \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{\alpha} \int_{y_0}^y \int_{y_0}^{\beta} \int_{z_0}^z \int_{z_0}^{\gamma} R(t_1, t_2, t_3, \alpha, \beta, \gamma)F(t_1, t_2, t_3)dt_3 d\gamma dt_2 d\beta dt_1 d\alpha.
\end{aligned} \tag{11}$$

Условия гладкости (2) на коэффициенты уравнения (1) обеспечивают принадлежность решения классу $C^{2+2+2}(D)$. Если считать функции $\varphi, \varphi_1, \psi, \psi_1, \theta, \theta_1$ произвольными, то можно рассматривать (10)-(11) как общее представление решения уравнения (1), подобно тому, как это делается в книге [15, с.66] для уравнения со старшей производной u_{xy} .

2. Формулы (10)-(11) дают решение задачи (1), (3) в квадратурах, если известен явный вид R . Укажем некоторые случаи, полученные путем непосредственного решения (5).

Пусть семь коэффициентов уравнения (1) $a_{221}, a_{212}, a_{122}, a_{112}, a_{211}, a_{121}, a_{111}$ отличны от нуля, а все остальные тождественно равны нулю. При этом (5) имеет тот же вид, что и уравнение (4) из [11]. Будем считать, что дополнительно выполняются тождества:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_{220}}{\partial y} + a_{220}a_{121} - a_{120} & \equiv 0, \quad \frac{\partial a_{220}}{\partial y} + a_{220}a_{211} - a_{210} \equiv 0, \\
\frac{\partial a_{121}}{\partial y} + a_{121}a_{211} - a_{111} & \equiv 0, \quad \frac{\partial a_{120}}{\partial y} + a_{120}a_{211} - a_{110} \equiv 0
\end{aligned} \tag{12}$$

Тогда из [11] следует, что функция Римана имеет вид:

$$R(x, y, z, \xi, \eta, \varsigma) = \exp \left[\int_{\varsigma}^z a_{220}(\xi, \eta, \gamma)d\gamma + \int_{\xi}^x a_{121}(\alpha, \beta, z)d\alpha + \int_{\eta}^y a_{211}(x, \beta, z)d\beta \right].$$

Если последнее тождество (12) равно не нулю, а произведению $\lambda(x)\mu(y)\nu(z)$ и при этом

$$a_{220} = A(z) + \delta xy, \quad a_{121} = B(x) + \delta yz, \quad a_{211} = C(y) + \delta xz,$$

то используя формулы (18), (25) из [11], получим

$$R(x, y, z, \xi, \eta, \varsigma) = R_0(x, y, z, \xi, \eta, \varsigma)_0 F_2(1, 1, \omega),$$

где $_0F_2$ - обобщенная гипергеометрическая функция [16, с.20], а

$$\begin{aligned}
R_0 & \equiv \exp \left[\int_{\xi}^x B(\alpha)d\alpha + \int_{\eta}^y C(\beta)d\beta + \int_{\varsigma}^z A(\gamma)d\gamma + \delta(xyz - \xi\eta\varsigma) \right], \\
\omega & = \int_{\xi}^x \lambda(\alpha)d\alpha \int_{\eta}^y \mu(\beta)d\beta \int_{\varsigma}^z \nu(\gamma)d\gamma.
\end{aligned}$$

Аналогично можно вычислить V и в других случаях, когда в (5) лишь один из коэффициентов $a_{\alpha\beta\gamma}$, имея определенную структуру, отличен от тождественного нуля.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Different. Equations. 1972. Т.12. № 3.- P.559-565.

2. Rundell W., Stecher M. Remarks concerning the supports of solution of pseudoparabolic equation // Proc. Amer. Math. Soc. 1977. Т.63. № 1. P.77-81.
3. Rundell W. The construction of solutions to pseudoparabolic equation in noncylindrical domains// J. Different. Equations. 1978. Т.27. №3. P.394-404.
4. Rundell W., Stecher M. The uniqueness class for the Cauchy problem for pseudoparabolic equation // Proc. Amer. Math. Soc. 1979. Т.76. № 2. P.253-257.
5. Водахова В. А. Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения// Дифференц. уравнения. 1982. Т.18. №2. С.280-285.
6. Шхануков М. Х. Об одном методе решения краевых задач для уравнений третьего порядка// ДАН СССР. 1982. Т.265. №6. С.1327-1330.
7. Солдатов А.П., Шхануков М.Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А.Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка// ДАН СССР. 1987. Т.297. №3. С.547-552.
8. Жегалов В.И., Уткина Е.А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка// Изв. вузов. Матем. 1999. №10. С.73-76.
9. Фазе М.К. Задача Коши для уравнения Бианки// Матем. сборник. 1958. Т.45. №3. С.281-322.
10. Жегалов В.И. Трехмерный аналог задачи Гурса// Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. Новосибирск: МГУ. 1990. С.94-98.
11. Жегалов В.И. О трехмерной функции Римана// Сибирский матем. журнал. 1997. Т.36. №5. С.1074-1079.
12. Бондаренко Б.А. Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных. Ташкент:ФАН,1987. 146с.
13. Фазе М.К. Операторно-аналитические функции одной независимой переменной// Тр. Моск. матем. об-ва. 1958. Т.7. С.227-268.
14. Мюнтц Г. Интегральные уравнения. Л. - М.: ГТТИ, Т.1.1934. 330с.
15. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука , 1981. 448 с.
16. Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петью Г., Фогель Т. Функции математической физики. М.: ГИФМЛ, 1963. 102с.