Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Лысов, А. В. Стариков, В. А. Стариков, Линеаризованная математическая модель синхронного электродвигателя при различных способах управления его скоростью, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 1(), 102–107

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu580>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 17:23:27

УДК 621.52

М. С. Лысов, А. В. Стариков, В. А. Стариков

ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБАХ УПРАВЛЕНИЯ ЕГО СКОРОСТЬЮ

Рассмотрены возможные способы управления скоростью синхронного электродвигателя. Приведены дифференциальные уравнения и построены структурные схемы синхронного электродвигателя как объекта при различных способах управления. Проведена линеаризация уравнений движения двигателя, получены передаточные функции по отношению к управляющим и возмущающему воздействиям.

На практике в основном применяют два способа регулирования скорости синхронного электродвигателя: изменением частоты питающего напряжения (тока), подаваемого на статорные обмотки; изменением амплитуды напряжения при коммутации статорных обмоток по датчику положения ротора (режим вентильного электродвигателя или бесколлекторного электродвигателя постоянного тока).

Рис. 1. Модель обобщённого двухфазного синхронного электродвигателя

Для описания динамических режимов работы синхронного электродвигателя при любом способе управления его скоростью удобно обратиться к модели обобщённой двухфазной машины переменного тока (рис. 1) [1].

Эта модель позволяет перейти к условному векторному описанию электрических машин переменного тока. В рассмотрение вводятся две системы координат: $0\alpha\beta$ и $0dq$. Система координат $0\alpha\beta$ неподвижна и связана с обмотками статора. Поскольку векторы удобно записывать в комплексной форме, то введены действительная Re и мнимая Im оси, причём действительная ось направлена по оси α . Система координат $0dq$ связана с обмоткой ротора синхронной машины.

Суть модели обобщённой машины переменного тока заключается в том, что действие обмоток статора α и β , запитанных соответствующей системой переменного напряжения (системой токов I_α и I_β) и создающих в каждый конкретный момент времени векторы потокоцеплений ψ_α и ψ_β , можно заменить действием одной обмотки, запитанной постоянным током I_1 и вращающейся со скоростью ω_0 магнитного поля.

В синхронном электродвигателе обмотка возбуждения, расположенная на роторе, запитывается постоянным напряжением. Она создаёт потокоцепление ψ_B и вращается вместе с ротором со скоростью ω .

Векторные уравнения для обмоток статора и ротора синхронной машины запишутся следующим образом:

$$\bar{U}_1 = R_1 \bar{I}_1 + \frac{d\bar{\psi}_1}{dt} + j\omega_0 \bar{\psi}_1, \quad \bar{U}_B = R_B \bar{I}_B + \frac{d\bar{\psi}_B}{dt} + j\omega \bar{\psi}_B. \quad (1)$$

Здесь R_1 и R_B — активные сопротивления обмотки статора и обмотки возбуждения; U_1 и U_B — напряжения на статоре и на обмотке возбуждения, соответственно. Недостаток системы (1) заключается в том, что первое и второе уравнения записаны в разных системах координат. Первое уравнение записано в неподвижных координатах $0\alpha\beta$, второе — во вращающихся координатах $0dq$, что затрудняет их совместное решение. Перепишем (1) в единой системе координат $0xy$, вращающейся со скоростью магнитного поля ω_0 . При этом скорость вращения ротора относительно выбранных координат составит $\omega_0 - \omega$. Следовательно,

$$\bar{U}_1 = R_1 \bar{I}_1 + \frac{d\bar{\psi}_1}{dt} + j\omega_0 \bar{\psi}_1, \quad \bar{U}_B = R_B \bar{I}_B + \frac{d\bar{\psi}_B}{dt} + j(\omega_0 - \omega) \bar{\psi}_B. \quad (2)$$

Потокоцепления статора и ротора создаются токами в обеих обмотках:

$$\bar{\psi}_1 = L_1 \bar{I}_1 + L_0 \bar{I}_B, \quad \bar{\psi}_B = L_B \bar{I}_B + L_0 \bar{I}_1, \quad (3)$$

где L_1 и L_B — собственные индуктивности эквивалентной обмотки статора и обмотки возбуждения;

L_0 — взаимная индуктивность. Выразим векторы токов в (3) через потокоцепления

$$\bar{I}_1 = \frac{L_B}{\Delta} \bar{\psi}_1 - \frac{L_0}{\Delta} \bar{\psi}_B, \quad \bar{I}_B = \frac{L_1}{\Delta} \bar{\psi}_B - \frac{L_0}{\Delta} \bar{\psi}_1$$

и подставим их в (2):

$$\frac{d\bar{\psi}_1}{dt} = \bar{U}_1 - \frac{R_1 L_B}{\Delta} \bar{\psi}_1 + \frac{R_1 L_0}{\Delta} \bar{\psi}_B - j\omega_0 \bar{\psi}_1, \quad \frac{d\bar{\psi}_B}{dt} = \bar{U}_B - \frac{R_B L_1}{\Delta} \bar{\psi}_B + \frac{R_B L_0}{\Delta} \bar{\psi}_1 - j(\omega_0 - \omega) \bar{\psi}_B, \quad (4)$$

где $\Delta = L_1 L_B - L_0^2$.

Систему уравнений (4) можно переписать в проекциях на оси x и y :

$$\begin{cases} \frac{d\psi_{1x}}{dt} = U_{1x} - \frac{R_1 L_B}{\Delta} \psi_{1x} + \frac{R_1 L_0}{\Delta} \psi_{Bx} + \omega_0 \psi_{1y}, \\ \frac{d\psi_{1y}}{dt} = U_{1y} - \frac{R_1 L_B}{\Delta} \psi_{1y} + \frac{R_1 L_0}{\Delta} \psi_{By} - \omega_0 \psi_{1x}; \\ \frac{d\psi_{Bx}}{dt} = U_{Bx} - \frac{R_B L_1}{\Delta} \psi_{Bx} + \frac{R_B L_0}{\Delta} \psi_{1x} + (\omega_0 - \omega) \psi_{By}, \\ \frac{d\psi_{By}}{dt} = U_{By} - \frac{R_B L_1}{\Delta} \psi_{By} + \frac{R_B L_0}{\Delta} \psi_{1y} - (\omega_0 - \omega) \psi_{Bx}, \end{cases} \quad (5)$$

где переменные с индексами x и y представляют собой проекции векторов на соответствующие оси.

С учётом того, что реальный трёхфазный синхронный электродвигатель можно свести с помощью трёхфазно-двухфазного преобразования к обобщённой двухфазной модели, электромагнитный момент электродвигателя запишется так [1]:

$$M = \frac{m_1 Z_{\Pi} L_0}{2\Delta} (\psi_{1y} \psi_{Bx} - \psi_{1x} \psi_{By}). \quad (6)$$

Здесь m_1 — число фаз статора электродвигателя; Z_{Π} — число пар полюсов. Систему уравнений (5) и (6) необходимо дополнить главным уравнением движения электропривода:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M - M_c, \quad (7)$$

где J — приведённый к валу электродвигателя момент инерции; M_c — момент сил сопротивления.

Переходя в (5)–(7) к операторной форме записи, после преобразований получим

$$\begin{cases} (T_1 p + 1) \psi_{1x} = T_1 U_{1x} + \frac{L_0}{L_B} \psi_{Bx} + T_1 \omega_0 \psi_{1y}, \\ (T_1 p + 1) \psi_{1y} = T_1 U_{1y} + \frac{L_0}{L_B} \psi_{By} - T_1 \omega_0 \psi_{1x}; \\ (T_B p + 1) \psi_{Bx} = T_B U_{Bx} + \frac{L_0}{L_1} \psi_{1x} + T_B (\omega_0 - \omega) \psi_{By}, \\ (T_B p + 1) \psi_{By} = T_B U_{By} + \frac{L_0}{L_1} \psi_{1y} - T_B (\omega_0 - \omega) \psi_{Bx}; \\ J p \omega = \frac{m_1 Z_{\Pi} L_0}{2\Delta} (\psi_{1y} \psi_{Bx} - \psi_{1x} \psi_{By}) - M_c. \end{cases} \quad (8)$$

В (8) введены обозначения: p — оператор дифференцирования; $T_1 = \frac{\Delta}{R_1 L_B}$, $T_B = \frac{\Delta}{R_B L_1}$ — электромагнитные постоянные времени цепей статора и обмотки возбуждения, соответственно.

Система уравнений (8) позволяет построить структурную схему синхронного электродвигателя как объекта управления (рис. 2). За входные управляющие воздействия приняты частота вращения магнитного поля ω_0 и проекции векторов напряжений U_{1x} , U_{1y} , U_{Bx} и U_{By} . Основным возмущающим воздействием является момент M_c сил сопротивления, а выходной координатой — скорость ω вращения ротора электродвигателя.

Анализ уравнений (8) и структурной схемы показывает, что синхронный электродвигатель представляет собой существенно нелинейный объект. Последнее обстоятельство объясняется, прежде всего, наличием в структуре шести множительных звеньев.

Следует обратить внимание, что полученная структурная схема синхронного электродвигателя как объекта управления с точностью до входных воздействий $U_{\text{вх}}$ и $U_{\text{вы}}$ совпадает с аналогичной схемой асинхронного двигателя [2]. Поэтому можно провести линейризацию системы уравнений (8) методом разложения основных нелинейных зависимостей в степенной ряд Тейлора в окрестности некоторой рабочей точки с параметрами: ψ_{1x0} , ψ_{1y0} , ψ_{2x0} и ψ_{2y0} [2]:

$$\begin{cases} (T_1 p + 1)\psi_{1x} = T_1 U_{1x} + \frac{L_0}{L_B} \psi_{\text{вх}} + T_1 \psi_{1y0} \omega_0, \\ (T_1 p + 1)\psi_{1y} = T_1 U_{1y} + \frac{L_0}{L_B} \psi_{\text{вы}} - T_1 \psi_{1x0} \omega_0; \\ (T_B p + 1)\psi_{\text{вх}} = U_{\text{вх}} + \frac{L_0}{L_1} \psi_{1x} + T_B \psi_{\text{вы}0} (\omega_0 - \omega), \\ (T_B p + 1)\psi_{\text{вы}} = U_{\text{вы}} + \frac{L_0}{L_1} \psi_{1y} - T_B \psi_{\text{вх}0} (\omega_0 - \omega); \\ J p \omega = \frac{m Z_n L_0}{2\Delta} (\psi_{1y0} \psi_{\text{вх}} - \psi_{1x0} \psi_{\text{вы}}) - M_c. \end{cases} \quad (9)$$

Система уравнений (9) позволяет найти передаточные функции по отношению к управляющим и возмущающему воздействиям. Пользуясь принципом суперпозиции, найдём, прежде всего, передаточную функцию по отношению к управляющему воздействию ω_0 . Для этого приравняем нулю входные воздействия $U_{\text{вх}}$, $U_{\text{вы}}$ и M_c .

Рис. 2. Структурная схема синхронного электродвигателя как объекта управления

Передаточная функция синхронного электродвигателя по отношению к управляющему воздействию ω_0 имеет такой же вид, как у асинхронного электродвигателя [2]:

$$W_{\text{dy}1}(p) = \frac{\omega(p)}{\omega_0(p)} = \frac{k_{\text{dy}1} \left(\frac{T_1}{k_{\text{dy}1}} p + 1 \right)}{T_{\text{B}} T_{\text{M}} T_1 p^3 + \frac{T_{\text{B}} T_{\text{M}} (T_1 + T_{\text{B}})}{T_{\text{B}}} p^2 + \left[T_1 + \frac{T_{\text{B}} T_{\text{M}}}{T_{\text{B}}} \left(1 - \frac{L_0^2}{L_1 L_{\text{B}}} \right) \right] p + 1},$$

где коэффициент передачи двигателя по управлению

$$k_{\text{dy}1} = 1 + \frac{T_1(\psi_{1x0}^2 + \psi_{1y0}^2)L_0}{T_B(\psi_{1x0}\psi_{Bx0} + \psi_{1y0}\psi_{By0})L_1},$$

а произведение приведённых электромагнитной и электромеханической постоянных времени синхронного двигателя представляется так:

$$T_{\mathfrak{I}}T_{\mathfrak{M}} = \frac{2\Delta J}{m_1 Z_{\Pi} L_0 (\psi_{1x0}\psi_{\mathfrak{B}x0} + \psi_{1y0}\psi_{\mathfrak{B}y0})}.$$

Передаточная функция синхронного электродвигателя по отношению к возмущающему воздействию M_c имеет следующий вид:

$$W_{\text{dB1}}(p) = \frac{\omega(p)}{M_{\text{c}}(p)} = - \frac{\frac{T_{\text{I}} T_{\text{M}} \left(1 - \frac{L_0^2}{L_1 L_{\text{B}}}\right)}{J T_{\text{B}}} \left(\frac{T_1 T_{\text{B}}}{1 - \frac{L_0^2}{L_1 L_{\text{B}}}} p^2 + \frac{T_1 + T_{\text{B}}}{1 - \frac{L_0^2}{L_1 L_{\text{B}}}} p + 1 \right)}{T_{\text{I}} T_{\text{M}} T_1 p^3 + \frac{T_{\text{I}} T_{\text{M}} (T_1 + T_{\text{B}})}{T_{\text{B}}} p^2 + \left[T_1 + \frac{T_{\text{I}} T_{\text{M}}}{T_{\text{B}}} \left(1 - \frac{L_0^2}{L_1 L_{\text{B}}}\right) \right] p + 1}.$$

Таким образом, динамические характеристики синхронных машин, оснащённых обмоткой возбуждения, и асинхронных двигателей «в малом» при частотном управлении совпадают.

В случае, когда синхронный электродвигатель имеет возбуждение от постоянных магнитов, расположенных на роторе (рис. 3), его математическая модель упрощается.

Запишем первое уравнение в (1) в системе координат $0dq$, вращающихся вместе с ротором:

$$\bar{U}_1 = R_1 \bar{I}_1 + \frac{d\bar{\psi}_1}{dt} + j(\omega - \omega_0)\bar{\psi}. \quad (10)$$

Здесь $\omega - \omega_0$ — скорость вращения магнитного поля статора относительно выбранных координат. Запишем (10) в проекциях на оси d и q :

$$\begin{cases} U_{1d} = R_1 I_{1d} + \frac{d\psi_{1d}}{dt} - (\omega - \omega_0)\psi_{1q}, \\ U_{1q} = R_1 I_{1q} + \frac{d\psi_{1q}}{dt} + (\omega - \omega_0)\psi_{1d}. \end{cases} \quad (11)$$

Учтём, что в рассматриваемом случае

$$\psi_{1d} = L_1 I_{1d} + \psi_B, \quad \psi_{1g} = L_1 I_{1g}. \quad (12)$$

Выражая из (12) проекции вектора тока статора I_{1d} , I_{1q} и подставляя их в (11), получим систему уравнений цепи статора синхронного двигателя, выраженную через однородные переменные:

$$\begin{cases} U_{1d} = \frac{R_1}{L_1}(\psi_{1d} - \psi_B) + \frac{d\psi_{1d}}{dt} - (\omega - \omega_0)\psi_{1q}, \\ U_{1q} = \frac{R_1}{L_1}\psi_{1q} + \frac{d\psi_{1q}}{dt} + (\omega - \omega_0)\psi_{1d}. \end{cases} \quad (13)$$

Рис. 3. Модель двухфазного синхронного электродвигателя с постоянными магнитами на роторе

Момент, развиваемый синхронным электродвигателем [1], запишется так:

$$M = \frac{m_1 Z_{\pi}}{2} \text{Im} \{ \bar{\psi}_1^* \bar{I}_1 \}, \quad (14)$$

где $\bar{\psi}_1^* = \psi_{1d} - j\psi_{1q}$ — сопряжённый вектор потокосцепления статора. Определяя мнимую часть произведения векторов в (14), получим

$$M = \frac{m_1 Z_{\pi} \psi_{\text{в}}}{2L_1} \psi_{1q}. \quad (15)$$

Уравнения (7), (13) и (15) дают полное описание синхронного электродвигателя в системе частотного управления

$$\begin{cases} \frac{d\psi_{1d}}{dt} = U_{1d} - \frac{R_1}{L_1} \psi_{1d} + \frac{R_1}{L_1} \psi_{\text{в}} + (\omega - \omega_0) \psi_{1q}, \\ \frac{d\psi_{1q}}{dt} = U_{1q} - \frac{R_1}{L_1} \psi_{1q} - (\omega - \omega_0) \psi_{1d}, \\ J \frac{d\omega}{dt} = \frac{m_1 Z_{\pi} \psi_{\text{в}}}{2L_1} \psi_{1q} - M_c. \end{cases} \quad (16)$$

Перейдём в (16) к операторной форме записи:

$$\begin{cases} (T_{11}p + 1)\psi_{1d} = T_{11}U_{1d} + \psi_{\text{в}} + T_{11}(\omega - \omega_0)\psi_{1q}, \\ (T_{11}p + 1)\psi_{1q} = T_{11}U_{1q} - T_{11}(\omega - \omega_0)\psi_{1d}, \\ J \frac{d\omega}{dt} = \frac{m_1 Z_{\pi} \psi_{\text{в}}}{2L_1} \psi_{1q} - M_c, \end{cases} \quad (17)$$

где $T_{11} = \frac{L_1}{R_1}$.

Рис. 4. Структурная схема синхронного электродвигателя с постоянными магнитами

Система уравнений (17) позволяет построить структурную схему синхронного двигателя с постоянными магнитами на роторе (рис. 4).

Как и в предыдущем случае, синхронный электродвигатель представляет собой нелинейный объект управления, что вызвано наличием множительных звеньев. Проведём линеаризацию системы уравнений (17) в районе некоторой рабочей точки с координатами ψ_{1d0} и ψ_{1q0} :

$$\begin{cases} (T_{11}p + 1)\psi_{1d} = T_{11}U_{1d} + \psi_{\text{в}} + T_{11}(\omega - \omega_0)\psi_{1q0}, \\ (T_{11}p + 1)\psi_{1q} = T_{11}U_{1q} - T_{11}(\omega - \omega_0)\psi_{1d0}, \\ J \frac{d\omega}{dt} = \frac{m_1 Z_{\pi} \psi_{\text{в}}}{2L_1} \psi_{1q} - M_c. \end{cases} \quad (18)$$

Система уравнений (18) позволяет найти передаточные функции синхронного электродвигателя с постоянными магнитами на роторе как по управляющим воздействиям ω_0 и U_1 , так и по отношению к основному возмущению M_c .

Передаточная функция синхронного двигателя по отношению к изменению скорости вращения магнитного поля ω_0 (частоты питающего напряжения) имеет вид

$$W_{\text{дв}2}(p) = \frac{\omega(p)}{\omega_0(p)} = \frac{1}{\frac{2JL_1}{m_1 Z_{\pi} \psi_{1d0} \psi_{\text{в}}} p^2 + \frac{2JL_1}{m_1 Z_{\pi} \psi_{1d0} \psi_{\text{в}} T_{11}} p + 1}$$

или

$$W_{\text{дв}2}(p) = \frac{1}{T_{\text{э}1} T_{\text{м}1} p^2 + T_{\text{м}1} p + 1},$$

где $T_{\Sigma 1} = T_{11}$, $T_{M1} = \frac{2JL_1}{m_1 Z_{\pi} \psi_{1d0} \psi_{\Sigma} T_{11}}$.

Передаточная функция по отношению к возмущению M_c :

$$W_{\text{дв}2}(p) = \frac{\omega(p)}{M_c(p)} = - \frac{\frac{2L_1}{m_1 Z_{\pi} \psi_{1d0} \psi_{\Sigma} T_{11}} (T_{11}p + 1)}{\frac{2JL_1}{m_1 Z_{\pi} \psi_{1d0} \psi_{\Sigma}} p^2 + \frac{2JL_1}{m_1 Z_{\pi} \psi_{1d0} \psi_{\Sigma} T_{11}} p + 1}.$$

Все передаточные функции по управляющим воздействиям, полученные выше, описывают движение синхронного электродвигателя «в малом» при частотном способе управления скоростью.

В электроприводах с большим диапазоном регулирования скорости применяют способ управления синхронным электродвигателем по сигналам датчика положения ротора, привязанного к магнитной системе машины [3]. Как правило, в этом случае синхронный электродвигатель оснащён постоянными магнитами, расположенными на роторе, а управление скоростью производят изменением амплитуды (действующего значения) напряжения на обмотках статора. В этом режиме в синхронном двигателе поддерживают пространственный угол между векторами потокоцепления ротора и статора, близким к 90° , а скорость магнитного поля ω_0 практически совпадает со скоростью ω вращения ротора. Структурная схема, представленная на рис. 4, позволяет получить передаточную функцию синхронного электродвигателя и в этом случае.

Приравнявая нулю M_c и ω_0 , найдём передаточную функцию по отношению к управляющему воздействию U_{1q} :

$$W_{\text{дв}3}(p) = \frac{\omega(p)}{U_{1q}(p)} = \frac{1}{\psi_{1d0}(T_{\Sigma 1} T_{M1} p^2 + T_{M1} p + 1)}. \quad (19)$$

Анализ передаточной функции (19) показывает, что динамические характеристики синхронной машины, работающей в режиме вентильного двигателя (бесколлекторного двигателя постоянного тока) аналогичны соответствующим характеристикам обычного электродвигателя постоянного тока. Скорость синхронного двигателя в этом режиме пропорциональна напряжению, прикладываемому к статорным обмоткам.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Михайлов, О. П. Автоматизированный электропривод станков и промышленных роботов [Текст] / О. П. Михайлов. — М.: Машиностроение, 1990. — 304 с.
2. Стариков, А. В. Линеаризованная математическая модель асинхронного электродвигателя как объекта системы частотного управления [Текст] / А. В. Стариков // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. — 2002. — № 16. — С. 175–180. — ISBN 5–7964–0355–9.
3. Терехов, В. М. Системы управления электроприводов: Учебник для студ. высш. учеб. заведений [Текст] / В. М. Терехов, О. И. Осипов; Под ред. В. М. Терехова. — М.: Академик, 2005. — 304 с.

Самарский государственный технический университет, г. Самара
mrcpk@rambler.ru

Поступила 15.10.2007

M. S. Lysov, A. V. Starikov, V. A. Starikov

LINEARIZED MATHEMATICAL MODEL OF SYNCHRONOUS MOTOR WITH VARIOUS METHODS OF SPEED CONTROL

Various methods of synchronous motor speed control are considered. Differential equations and structures of synchronous motor being the object with various methods of control are presented. Equations of motor motion have been linearized, transfer functions related with control and perturbation have been obtained.

Samara State Technical University, Samara, Russia
mrcpk@rambler.ru

Received 15.10.2007