Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Попова, Определение динамических характеристик нелинейных диссипативных систем на основе линейно параметрической дискретной модели амплитудно-частотной характеристики, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 1(), 108–112

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu581>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 18:08:44

УДК 519.246

Д. Н. Попова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНО ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Рассматривается линейно параметрическая дискретная модель амплитудно-частотной характеристики механической системы с нелинейными диссипативными силами в форме стохастического разностного уравнения. Предлагается эффективный метод определения динамических характеристик, в основе которого лежит численная итерационная процедура среднеквадратичного оценивания коэффициентов линейно параметрической дискретной модели.

Качественные изменения в машиностроении неразрывно связаны с оценкой технического состояния механических систем. Одними из основных методов при диагностике технического состояния механических систем являются методы, использующие анализ изменения динамических характеристик системы в процессе её эксплуатации, прочностных или других испытаний. Проблема повышения надёжности и точности прогнозирования долговечности и ресурса предъявляет высокие требования к точности оценок динамических характеристик механических систем.

Известные способы оценки динамических характеристик диссипативных механических систем и математические модели, лежащие в их основе, не позволяют в полной мере использовать преимущества развития современных технологий при обработке экспериментальных данных. Эта проблема может быть устранена при помощи методов, в основе которых лежат параметрические модели временных рядов, широко используемые в спектральном анализе. Однако анализ известных параметрических моделей, в частности, моделей авторегрессии — скользящего среднего, показал их неэффективность при оценке динамических характеристик нелинейных диссипативных систем, так как в них не описаны связи между динамическими характеристиками системы и параметрами модели.

Наиболее эффективным и перспективным методом определения динамических характеристик нелинейной диссипативной механической системы является метод, в основе которого лежит линейно параметрическая дискретная модель (ЛПДМ) свободных колебаний системы в форме стохастического разностного уравнения [1]. Согласно этому методу с помощью итерационной процедуры вычисляются среднеквадратичные оценки коэффициентов ЛПДМ, через которые по известным формулам находятся динамические характеристики системы, в том числе, степень нелинейности диссипативной силы. Такой способ принципиально отличается от традиционных методов нахождения динамических характеристик диссипативной системы [2], он позволяет обеспечить высокую точность оценивания за счёт эффективного использования современных средств вычислений и их математического обеспечения.

В данной работе рассматривается метод определения динамических характеристик нелинейной диссипативной системы, в основе которого лежит итерационная процедура среднеквадратичного оценивания коэффициентов ЛПДМ в форме стохастического разностного уравнения, построенного для амплитудно-частотной характеристики.

Дифференциальное уравнение, описывающее вынужденные колебания системы с диссипативными силами, пропорциональной n -ной степени скорости движения, может быть представлено в виде [3]:

$$my''(t) + by'(t) |y'(t)|^{n-1} + cy(t) = P(t),$$

где m — масса системы; c — коэффициенты жёсткости; b — коэффициент в нелинейной диссипативной силе; n — показатель нелинейности диссипативной силы; $P(t)$ — возмущающее воздействие на систему.

При гармоническом воздействии $P(t) = P_* \sin \omega t$ дифференциальное уравнение, описывающее вынужденные гармонические колебания, может быть переписано в виде

$$y''(t) + \frac{b}{m} by'(t) |y'(t)|^{n-1} + p^2 y(t) = P_0 \sin \omega t,$$

где $p^2 = \frac{c}{m}$ — резонансная частота; ω и $P_0 = \frac{P_*}{m}$ — частота и приведённая к массе системы амплитуда внешней гармонической силы. Решением этого уравнения является установившиеся колебания $y(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$, зависимость амплитуды которых (в относительных к $y_{ст}$ единицах, где $y_{ст} = \frac{P_0}{p^2}$)

от частоты возбуждения (амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) системы) описывается функцией вида [3]:

$$\tilde{a}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \left(\frac{bS_n}{\pi c} a^{n-1} \omega^n\right)^2}}. \quad (1)$$

Для систем с диссипативными силами, пропорциональными n -ой степени скорости движения (частотно-зависимым трением), зависимость декремента колебаний от амплитуды имеет вид

$$\delta(a) = \frac{bp^n}{c} S_n a^{n-1}. \quad (2)$$

Тогда амплитудно-частотную характеристику (1) систем с диссипативными силами, пропорциональными n -ой степени скорости движения, с учётом (2) можно представить в виде

$$\tilde{a}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2 \left(\frac{\omega^2}{p^2}\right)^n}}. \quad (3)$$

Представляя выражение (3) в виде

$$\tilde{a}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{\delta^2}{\pi^2} \left(1 + \left[\frac{\omega^2}{p^2} - 1\right]\right)^n}}$$

и используя разложение в степенной ряд:

$$\left(1 + \left[\frac{\omega^2}{p^2} - 1\right]\right)^n \approx 1 + n \left(\frac{\omega^2}{p^2} - 1\right),$$

получаем

$$\tilde{a}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{\delta^2}{\pi^2} \left(1 + n \left(\frac{\omega^2}{p^2} - 1\right)\right)}}.$$

Полагая $\omega = \Delta\omega k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), где $\Delta\omega$ — период равномерной дискретизации АЧХ, получаем её дискретной аналог:

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Delta\omega^2 k^2}{p^2}\right)^2 + \frac{\delta^2}{\pi^2} \left(1 + n \left(\frac{\Delta\omega^2 k^2}{p^2} - 1\right)\right)}}.$$

Отсюда после алгебраических преобразований получаем

$$\tilde{a}_k^2 \left[\frac{\Delta\omega^4}{p^4} k^4 + \left(\frac{\delta^2}{\pi^2} n - 2 \right) \frac{\Delta\omega^2}{p^2} k^2 + \frac{\delta^2}{\pi^2} (1 - n) + 1 \right] = 1.$$

Применяя к обеим частям данного выражения Z-преобразование, получаем

$$Z \left\{ \tilde{a}_k^2 \left[\frac{\Delta\omega^4}{p^4} k^4 + \left(\frac{\delta^2}{\pi^2} n - 2 \right) \frac{\Delta\omega^2}{p^2} k^2 + \frac{\delta^2}{\pi^2} (1 - n) + 1 \right] \right\} = \frac{1}{1 - z^{-1}}.$$

Введём обозначение $\mu_0 = \frac{\Delta\omega^4}{p^4}$, $\mu_1 = \left(\frac{\delta^2}{\pi^2} n - 2 \right) \frac{\Delta\omega^2}{p^2}$, $\mu_2 = \frac{\delta^2}{\pi^2} (1 - n) + 1$, отсюда получаем, что

$$(1 - z^{-1}) Z \{ \tilde{a}_k^2 (\mu_0 k^4 + \mu_1 k^2 + \mu_2) \} = 1.$$

Возвращаясь в пространство оригиналов, используя первую теорему смещения:

$$z^{-r} Z \{ \tilde{a}_k \} = \tilde{a}_{k-r}, \quad r = 0, 1,$$

а также полагая, что $\tilde{a}_{k-r} = 0$ при $k - r < 0$, получаем разностное уравнение вида

$$(\mu_0 k^4 + \mu_1 k^2 + \mu_2) \tilde{a}_k^2 - \left(\mu_0 (k-1)^4 + \mu_1 (k-1)^2 + \mu_2 \right) \tilde{a}_{k-1}^2 = \delta_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 0, \\ 0, & \text{при } k \neq 0. \end{cases}$ — символ Кронекера.

При $k = 0$ получаем, что

$$\tilde{a}_0^2 = \frac{\pi^2}{\delta^2(1-n) + \pi^2}. \quad (4)$$

При $k \geq 1$ получаем разностное уравнение вида

$$\lambda_0 \left(\tilde{a}_k^2 k^4 - \tilde{a}_{k-1}^2 (k-1)^4 \right) + \lambda_1 \left(\tilde{a}_k^2 k^2 - \tilde{a}_{k-1}^2 (k-1)^2 \right) = \tilde{a}_{k-1}^2 - \tilde{a}_k^2, \quad (5)$$

где $\lambda_0 = \frac{\mu_0}{\mu_2} = \frac{\Delta\omega^4\pi^2}{p^2(\delta^2 - \delta^2n + \pi^2)}$, $\lambda_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{(\delta^2n - 2\pi^2)\Delta\omega^2}{p^2(\delta^2 - \delta^2n + \pi^2)}$.

Результаты наблюдений a_k содержат аддитивную случайную помеху ε_k : $a_k = \tilde{a}_k + \varepsilon_k$, где $\tilde{a}_k$ — мгновенные значения АЧХ, соответствующие формуле (3).

С учётом случайной помехи в результатах измерений, линейно параметрическую дискретную модель АЧХ можно представить в форме стохастических разностных уравнений:

$$\begin{cases} a_0^2 = \lambda_2 - \varepsilon_0^2 + 2\varepsilon_0 a_0, \\ a_{k-1}^2 - a_k^2 = \lambda_0 (a_k^2 k^4 - a_{k-1}^2 (k-1)^4) + \lambda_1 (a_k^2 k^2 - a_{k-1}^2 (k-1)^2) + \eta_k, \\ \eta_k = [\lambda_0 k^4 + \lambda_1 k^2 + 1] (\varepsilon_k^2 - 2\varepsilon_k a_k) - [\lambda_0 (k-1)^4 + \lambda_1 (k-1)^2 + 1] \times \\ \quad \times (\varepsilon_{k-1}^2 - 2\varepsilon_{k-1} a_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases} \quad (6)$$

Пренебрегая величинами второго порядка малости относительно ε_k , систему (6) можно представить в виде:

$$\begin{cases} a_0^2 = \lambda_2 + \eta_0, \\ a_{k-1}^2 - a_k^2 = \lambda_0 (a_k^2 k^4 - a_{k-1}^2 (k-1)^4) + \lambda_1 (a_k^2 k^2 - a_{k-1}^2 (k-1)^2) + \eta_k, \\ \eta_0 = 2\varepsilon_0 a_0, \\ \eta_k = -2\varepsilon_k a_k [\lambda_0 k^4 + \lambda_1 k^2 + 1] + 2\varepsilon_{k-1} a_{k-1} [\lambda_0 (k-1)^4 + \lambda_1 (k-1)^2 + 1], \end{cases} \quad (7)$$

где $k = 1, 2, \dots, N-1$.

Коэффициенты в модели (7) связаны с параметрами АЧХ следующими соотношениями:

$$\lambda_0 = \frac{\Delta\omega^4\pi^2}{p^2(\delta^2 - \delta^2n + \pi^2)}, \quad \lambda_1 = \frac{(\delta^2n - 2\pi^2)\Delta\omega^2}{p^2(\delta^2 - \delta^2n + \pi^2)}, \quad \lambda_2 = \frac{\pi^2}{\delta^2 - \delta^2n + \pi^2}. \quad (8)$$

В матричной форме ЛПДМ (7), описывающая последовательность результатов измерений мгновенных значений АЧХ, имеет вид

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_{a,\lambda}\varepsilon. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ — вектор неизвестных коэффициентов ЛПДМ; $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1})^T$ — N -мерный вектор случайной помехи в результатах наблюдений; $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{N-1})^T$ — N -мерный вектор эквивалентного возмущения в стохастическом разностном уравнении; $b = (a_0^2, a_0^2 - a_1^2, \dots, a_{N-2}^2 - a_{N-1}^2)^T$ — N -мерный вектор правой части; F — матрица регрессоров размера $N \times 4$, столбцы которой описываются следующими формулами:

$$\begin{aligned} f_{i1} &= (0, a_1^2, 16a_2^2 - a_1^2, \dots, (N-1)^4 a_{N-1}^2 - (N-2)^4 a_{N-2}^2)^T, \\ f_{i2} &= (0, a_1^2, 4a_2^2 - a_1^2, \dots, (N-1)^2 a_{N-1}^2 - (N-2)^2 a_{N-2}^2)^T, \\ f_{i3} &= (1, 0, \dots, 0)^T, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Матрица P размера $N \times N$ в стохастическом разностном уравнении эквивалентного возмущения — нижняя треугольная, ленточная, двухдиагональная. Первый столбец матрицы P имеет вид

$p_{i1} = (2a_0, 2a_0, 0, \dots, 0)^T$ ($i = 1, 2, \dots, N$). Остальные столбцы матрицы P ($j = 2, 3, \dots, N$) описываются формулами

$$p_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i < j \text{ и } i > j + 1, \\ -2a_{i-1} (\lambda_0(i-1)^4 + \lambda_1(i-1)^2 + 1), & \text{если } i = j, \\ -p_{i-1,j}, & \text{если } i = j + 1. \end{cases} \quad (10)$$

Построенная в форме стохастических разностных уравнений, линейно параметрическая дискретная модель служит основой нового, помехозащищённого метода определения динамических характеристик систем с диссипативными силами по их АЧХ. Этот метод включает следующие основные этапы:

- 1) формирование выборки a_k ($k = 0, 1, \dots, N-1$), результатов измерений с шагом $\Delta\omega$ амплитудно-частотной характеристики системы, где N — объём выборки;
- 2) вычисление по приведённым выше формулам элементов матрицы F и вектора b ;
- 3) среднеквадратичное оценивание коэффициентов λ_i ($i = 0, 1$) из первого стохастического разностного уравнения системы (10); при этом наиболее эффективным является итерационный метод среднеквадратичного оценивания коэффициентов линейно параметрической дискретной модели [1]; в соответствии с этим методом вначале вычисляются МНК-оценки $\hat{\lambda}^{(0)} = (F^T F)^{-1} F^T b$, на основе которых формируется первое приближение матрицы $P_{\hat{\lambda}}$; затем первое уравнение в системе (10) преобразуется к виду $P_{\hat{\lambda}}^{-1} b = P_{\hat{\lambda}}^{-1} F \lambda + \varepsilon$ и вновь вычисляются МНК-оценки, но уже для преобразованного уравнения, при этом процедура уточнения повторяется несколько раз;
- 4) вычисление на основе среднеквадратичных оценок $\hat{\lambda}_i$ параметров системы с диссипативными силами по формулам

$$\hat{p} = \sqrt[4]{\frac{\hat{\lambda}_2}{\hat{\lambda}_0}} \Delta\omega, \quad \hat{\delta} = \pi \sqrt{1 + \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_0} + \hat{\lambda}_1 \sqrt{\hat{\lambda}_2}}{\sqrt{\hat{\lambda}_0 \hat{\lambda}_2}}}, \quad \hat{n} = \frac{\lambda_1 \sqrt{\lambda_0 \lambda_2} + 2\lambda_0 \lambda_2}{\lambda_1 \sqrt{\lambda_0 \lambda_2} + \lambda_0 \lambda_2 + \lambda_0}. \quad (11)$$

Проведены численно-аналитические исследования по сравнению данного метода с существующим методом определения декремента по кривой резонанса. Численный эксперимент проводился следующим образом. Генерировалась выборка a_k ($k = 0, 1, \dots, N-1$) дискретных значений функции, описывающей амплитудно-частотную характеристику в системе с диссипативными силами, пропорциональными n -степени скорости движения, с параметрами $\delta_0 = 0,05$, $p = 2\pi$, $n = 2$. Период дискретизации выбирался таким образом, что при $T = \frac{2\pi}{\omega_p} = 1$ отношение $\frac{\Delta\omega}{T} = 0,1$. Объём выборки составил $N = 100$. В отсчёты $\tilde{a}_k$, соответствующие точным значениям функции, добавлялась аддитивная помеха ε_k , мощность которой изменялась в диапазоне от 0 до 3 %. Для каждой точки эксперимента результаты вычислений относительной погрешности усреднялись по $M = 100$ реализациям.

На рисунке представлены зависимости относительной погрешности вычислений декремента колебаний от мощности случайной помехи. Точки 1 соответствуют методу определения декремента по кривой резонанса, точки 2 — рассмотренному методу.

Из результатов исследования видно, что погрешность оценивания декремента колебаний по предложенному методу на порядок выше точности оценивания декремента колебаний по кривой резонанса. Таким образом, применение метода определения динамических характеристик на основе ЛПДМ в форме стохастического разностного уравнения, построенного для АЧХ диссипативной механической системы, увеличивает точность вычисления декремента по сравнению с методом определения декремента по кривой резонанса.

Зависимости относительной погрешности вычисления декремента колебаний от величины случайной помехи в результатах наблюдений при использовании методов определения по ширине пика (кривая 1) и на основе линейно параметрической дискретной модели (кривая 2)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Зотеев, В. Е.* Определение динамических характеристик нелинейных диссипативных систем на основе стохастического разностного уравнения [Текст] / В. Е. Зотеев, Д. Н. Попова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. — 2006. — № 42. — С. 162–168. — ISBN 5–7964–0815–1.
2. *Писаренко, Г. С.* Методы определения характеристик колебаний упругих систем [Текст] / Г. С. Писаренко, В. А. Матвеев, А. П. Яковлев. — Киев: Наук. думка, 1976. — 88 с.
3. *Пановко, Г. Я.* Основы прикладной теории колебаний и удара [Текст] / Г. Я. Пановко. — Л.: Машиностроение, 1976. — 320 с.

Самарский государственный технический университет, г. Самара
dashek@mail.ru

Поступила 01.11.2007

D. N. Popova

NONLINEAR DISSIPATIVE SYSTEMS DYNAMICAL CHARACTERISTICS DETERMINATION BASED ON LINEAR-PARAMETRICAL DISCRETE MODEL OF AMPLITUDE-FREQUENCY CHARACTERISTIC

Considering the mechanical system linear-parametrical discrete model of AFC with dissipative nonlinear forces in form of accidental difference equation, this work offers effective method of dynamical characteristics determination based on numeral iterative procedure of LPD model mean-square coefficient evaluation

Samara State Technical University, Samara, Russia
dashek@mail.ru

Received 01.11.2007