Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. К. Чостковский, Д. А. Смородинов, Математическая модель витой пары радиочастотного кабеля объекта управления, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 1(), 113–118

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu582>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 17:43:26

УДК 621.315

Б. К. Чостковский, Д. А. Смородинов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВИТОЙ ПАРЫ РАДИОЧАСТОТНОГО КАБЕЛЯ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Разработана математическая модель формирования электрических параметров витой пары LAN-кабелей, на основе которой становится возможным точный расчет параметров межконтурной связи, обеспечивающей оптимизацию двухконтурной системы автоматического управления параметрами экструдированной пористой изоляции.

Первичные и вторичные параметры передачи и параметры взаимных влияний кабелей связи определяются геометрическими и электрическими параметрами направляющей среды. Не имеющими общего решения являются задачи оценивания рабочей ёмкости кабеля и эквивалентной диэлектрической проницаемости среды между двумя проводниками. Решение данной задачи является актуальным при алгоритмизации автоматического управления параметрами экструдированной пористой изоляции с введением межконтурной связи, которая обеспечивает компенсацию влияния динамической ошибки регулирования одного из параметров (диаметра или диэлектрической проницаемости изоляции) на обобщённый параметр качества кабеля (рабочую ёмкость или волновое сопротивление) путём формирования возмущённого процесса в контуре автоматической стабилизации второго параметра (диэлектрической проницаемости или диаметра изоляции) [1].

В настоящей работе рассматривается задача определения электрических параметров витой пары, которая составляет основу радиочастотных кабелей для передачи данных (LAN-кабель). На рис. 1 показано сечение неэкранированной витой пары, содержащей две жилы.

Обычно эквивалентная диэлектрическая проницаемость направляющей среды оценивается как средневзвешенное значение изоляции обеих жил, с учётом соотношения площадей их сечения. Данная оценка характеризуется невысокой точностью, что недопустимо при проектировании и изготовлении кабелей с высокой пропускной способностью. Для оценки рабочей ёмкости традиционно останавливаются на формуле, выведенной В. Н. Кулешовым [2], которая также характеризуется невысокой точностью. Решение данной задачи ищется методом конформных преобразований.

Для получения исходных соотношений, определяющих процессы в цепях, используют первичные параметры цепи (рис. 2): R , L , C , G , где R — погонное сопротивление линии, L — погонная индуктивность, C — погонная ёмкость линии, G — погонный коэффициент утечки.

Если значение первичных параметров цепи остаются неизменными по всей длине, то такую цепь называют регулярной (однородной) [3]. При этом активные потери электромагнитной энергии при её распространении вдоль цепи обусловлены первичными параметрами R и G : первый характеризует тепловые потери в проводниках и других металлических частях направляющей системы (экран, оболочка, броня), второй — потери в изоляции.

Рассмотрим однородную цепь с первичными параметрами R , L , C , G (рис. 2). Система диффе-

Рис. 1. Сечение LAN-кабеля: D — расстояние между жилами; D_1 , D_2 — соответствующие размеры жил, D_{n1} , D_{n2} — соответствующие размеры изоляций

Рис. 2. Эквивалентная схема линии связи

ренциальных уравнений, определяющая напряжение и ток в любой точке цепи как функции координаты x , имеет следующий вид [4]:

$$\begin{cases} -\frac{dU}{dx} = I(R - j\omega L), \\ -\frac{dI}{dx} = U(G - j\omega C). \end{cases} \quad (1)$$

Данная система справедлива по отношению к любой однородной цепи, независимо от её конструкции. Изменение конструкции приводит только к изменению значений первичных и вторичных параметров, в том числе волнового сопротивления

$$Z = \sqrt{\frac{\omega L + jR}{\omega C + jG}}. \quad (2)$$

Будем рассматривать LAN-кабель как линию без потерь. Это значит, что утечка полагается равной нулю ($G = 0$), т. е. считается, что пространство между проводниками является непроводящим. Кроме того, пренебрегаем потерями в проводах, считая их идеально проводящими ($R = 0$). Так как для идеальных проводников внутренняя индуктивность равна нулю, то в этом случае полная погонная индуктивность линии L сводится к её внешней индуктивности L_e . При этих упрощениях формула (2) принимает вид

$$Z = \sqrt{\frac{L_e}{C}}. \quad (3)$$

Для определения рабочей ёмкости C воспользуемся конформным преобразованием, используя дробно-линейную функцию, которая имеет вид [5]

$$\omega = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (4)$$

где a, b, c, d — постоянные, причём $ad - bc \neq 0$. Разрешая соотношение (4) относительно z , получаем обратное дробно-линейное преобразование

$$z = \frac{-d\omega + b}{c\omega - a}. \quad (5)$$

Дробно-линейное преобразование обладает важным свойством сохранения симметричных точек: оно преобразует любую пару точек z_1 и z_2 , симметричных относительно произвольной окружности C_z в плоскости $\mathbb{C}$, в пару точек ω_1 и ω_2 , симметричных относительно C_ω — образа окружности C_z на плоскости $\mathbb{W}$ [5].

Используя свойство дробно-линейного преобразования сохранять окружности, отображим область между жилами LAN-кабеля (рис. 3) на концентрическое кольцо, которое представляет собой простейшую двухсвязную область (рис. 4).

Если разыскать положение точек z_1 и z_2 , одновременно симметричных относительно обеих данных окружностей C_1 и C_2 , которые совпадают с поверхностями электродов, то при отображении

$$\omega = \frac{z - z_1}{z - z_2} \quad (6)$$

окружностей C_1 и C_2 перейдут в окружности C'_1 и C'_2 , для которых точки $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = \infty$ также будут симметричными. Отсюда следует, что окружности C'_1 и C'_2 — концентрические, и их центр совпадает с началом координат в плоскости $\mathbb{W}$, что даёт возможность определить рабочую ёмкость, возникающую между жил LAN-кабеля, по известной формуле для сферического конденсатора (рис. 4).

Найдем теперь симметричные точки относительно окружностей C_1 и C_2 [5]. На основании данных (рис. 3) получаем систему

$$\begin{cases} a_1(D - a_2) = R_1^2, \\ a_2(D - a_1) = R_2^2, \end{cases} \quad (7)$$

разрешив которую относительно a_1 и a_2 , получим:

$$a_1 = h_1 \pm \sqrt{h_1^2 - R_1^2}, \quad a_2 = h_2 \pm \sqrt{h_2^2 - R_2^2}. \quad (8)$$

 Рис. 3. Взаимное расположение жил LAN-кабеля в плоскости $\mathbb{C}$

 Рис. 4. Взаимное расположение жил LAN-кабеля в плоскости $\mathbb{W}$

Здесь введены следующие обозначения:

$$h_1 = \frac{1}{2D}(D^2 + R_1^2 - R_2^2), \quad h_2 = \frac{1}{2D}(D^2 + R_2^2 - R_1^2).$$

В выражениях (8) перед корнями, очевидно, необходимо взять знак минус, так как $a_1 < R_1$ и $a_2 < R_2$.

Поместив начало координат в симметричную точку Z_1 , расположенную внутри окружности C_1 , получим:

$$Z_1 = 0, \quad Z_2 = \sqrt{h_1^2 - R_1^2} + \sqrt{h_2^2 - R_2^2} = 2\sqrt{h_1^2 - R_1^2},$$

так как легко убедиться, что $\sqrt{h_1^2 - R_1^2} = \sqrt{h_2^2 - R_2^2}$.

Таким образом, функция ω имеет вид:

$$\omega = \frac{z}{z - 2\sqrt{h_1^2 - R_1^2}}. \quad (9)$$

Вычислим радиусы ρ_1 и ρ_2 (рис. 4). Радиус внутренней окружности C'_1 определим, например, по положению точки M'_1 , соответствующей точке M_1 ($z = R_1 - a_1$) окружности C_1 . Получаем

$$\rho_1 = \frac{R_1 - h_1 + \sqrt{h_1^2 - R_1^2}}{R_1 - h_1 - \sqrt{h_1^2 - R_1^2}} = \frac{(\sqrt{h_1^2 - R_1^2} + R_1 - h_1)^2}{2R_1(h_1 - R_1)}. \quad (10)$$

Аналогично определим радиус окружности C'_2 по точке M_2 ($z = D + R_2 - a_1$) окружности C_2 :

$$\rho_2 = \frac{(\sqrt{h_2^2 - R_2^2} + R_2 + h_2)^2}{2R_2(h_2 + R_2)}. \quad (11)$$

Принимая во внимание свойство сохранения неизменной величины ёмкости при конформных преобразованиях, найдём последнюю в плоскости $\mathbb{W}$ для параллельно расположенных жил кабеля [5]:

$$\begin{aligned} C &= \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_{\text{ЭКВ}}}{\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}} = 2\pi\epsilon_0\epsilon_{\text{ЭКВ}} \cdot \ln^{-1} \frac{(\sqrt{h_2^2 - R_2^2} + R_2 + h_2)^2 R_1(h_1 - R_1)}{R_2(h_2 + R_2) (\sqrt{h_1^2 - R_1^2} + R_1 - h_1)^2} = \\ &= 2\pi\epsilon_0\epsilon_{\text{ЭКВ}} \cdot \ln^{-1} \left(\left(\sqrt{\left(\frac{h_1}{R_1}\right)^2 - 1} + \left(\frac{h_1}{R_1}\right) \right) \cdot \left(\sqrt{\left(\frac{h_2}{R_2}\right)^2 - 1} + \left(\frac{h_2}{R_2}\right) \right) \right), \quad (12) \end{aligned}$$

где $\epsilon_{\text{ЭКВ}}$ — эквивалентная диэлектрическая проницаемость изоляции жил кабеля, ϵ_0 — электрическая постоянная.

Считая, что $R_1 = R_2 = R$, выражению (12) можно придать вид

$$C = \pi \varepsilon_0 \varepsilon_{\text{экв}} \cdot \ln^{-1} \left(\sqrt{\frac{D^2}{4R^2} - 1} + \frac{D}{2R} \right). \quad (13)$$

Чтобы определить эквивалентную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_{\text{экв}}$ снова воспользуемся конформным отображением, но теперь отобразим плоскость $\mathbb{C}$ (рис. 5) на плоскость $\mathbb{T}$ (рис. 6):

$$c = f(t) = x(u, v) + jy(u, v), \quad (14)$$

где

$$t = u + jv. \quad (15)$$

Рис. 5. Взаимное расположение жил LAN-кабеля с изоляцией в плоскости $\mathbb{C}$

Рис. 6. Результат отображения плоскости $\mathbb{C}$ на плоскость $\mathbb{W}$

Для данного отображения необходимо, чтобы выполнялось следующее условие [5]:

$$z = \frac{2r_1 r_2}{j(r_1 + r_2)t + r_2}. \quad (16)$$

Учитывая выражения (14)–(16), определим u и v :

$$t = \frac{2r_1 r_2 - r_2(x + jy)}{j(r_1 + r_2)(x + jy)} = -\frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} + j \left(\frac{r_2}{r_1 + r_2} - \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \right). \quad (17)$$

Рис. 7. Эквивалентная схема соединения трёх конденсаторов с однородными диэлектриками между их пластин

Отобразив плоскость $\mathbb{C}$ на плоскость $\mathbb{T}$, получим плоский конденсатор с бесконечными пластинами. В данном случае представляется возможным определение его диэлектрической проницаемости. Она и будет являться неизвестной эквивалентной диэлектрической проницаемостью среды между двумя проводниками.

Для решения данной задачи полученный конденсатор можно разделить на три последовательно соединённых конденсатора с однородными диэлектриками между их пластин с соответствующими диэлектрическими проницаемостями ε_1 , ε_2 , ε (см. рис. 7).

Общая ёмкость C схемы, расположенной на рис. 7, определяется из выражения

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}. \quad (18)$$

Подставив параметры конденсаторов в выражение (18), получим

$$\frac{1}{C} = \frac{a}{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S} + \frac{b}{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S} + \frac{c}{\varepsilon_0 \varepsilon S},$$

из которого следует, что

$$C = \varepsilon_0 S \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon}{a \varepsilon_2 \varepsilon + b \varepsilon_1 \varepsilon + c \varepsilon_1 \varepsilon_2}, \quad (19)$$

где a, b, c — соответствующие расстояния между пластинами конденсаторов C_1, C_2, C_3 (рис. 7), S — площадь их пластин.

Ёмкость конденсатора рассчитывается по формуле

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{l}, \quad (20)$$

где l — расстояние между пластинами:

$$l = a + b + c. \quad (21)$$

Введём

$$m = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon}{a \varepsilon_2 \varepsilon + b \varepsilon_1 \varepsilon + c \varepsilon_1 \varepsilon_2}. \quad (22)$$

Тогда

$$\varepsilon_{\text{экв}} = m(a + b + c). \quad (23)$$

Остаётся лишь найти расстояния a, b, c , определив координаты точек на плоскости $\mathbb{T}$ (рис. 6), имеющие на плоскости $\mathbb{C}$ (рис. 5) следующие координаты:

$$(2r_1; 0), \quad (r_1 + r; 0), \quad (-2r_2; 0), \quad (-r_2 - r; 0).$$

Используя (17), получим координаты этих точек на плоскости $\mathbb{T}$, соответственно:

$$(0; 0), \quad \left(0; \frac{r_2(r - r_1)}{(r_1 + r_2)(r_1 + r)}\right), \quad (0; 1), \quad \left(0; \frac{r_2(r_2 + r + 2r_1)}{(r_1 + r_2)(r_2 + r)}\right).$$

Следовательно,

$$a = \frac{r_2(r_1 - r)}{(r_1 + r_2)(r_1 + r)}, \quad b = \frac{r_1(r_2 - r)}{(r_1 + r_2)(r_2 + r)}, \quad c = 1. \quad (24)$$

Подставляя выражения (22) и (24) в (23), и учитывая, что

$$r_1 = \frac{D_{\text{и1}}}{2}, \quad r_2 = \frac{D_{\text{и2}}}{2}, \quad r = \frac{d}{2},$$

где $D_{\text{и1}}, D_{\text{и2}}$ — диаметры изоляций (см. рис. 1); d — диаметр проводящей жилы, получим

$$\varepsilon_{\text{экв}} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon \left[D_{\text{и2}} (D_{\text{и1}} - d) (D_{\text{и2}} + d) + D_{\text{и1}} (D_{\text{и2}} - d) (D_{\text{и1}} + d) + (D_{\text{и1}} + D_{\text{и2}}) (D_{\text{и1}} + d) (D_{\text{и2}} + d) \right]}{\varepsilon_2 \varepsilon D_{\text{и2}} (D_{\text{и1}} - d) (D_{\text{и2}} + d) + \varepsilon_1 \varepsilon D_{\text{и1}} (D_{\text{и2}} - d) (D_{\text{и1}} + d) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 (D_{\text{и1}} + D_{\text{и2}}) (D_{\text{и1}} + d) (D_{\text{и2}} + d)}. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (13), и учитывая, что

$$D = \frac{D_{\text{и1}} + D_{\text{и2}}}{2}, \quad R = \frac{d}{2},$$

получим

$$C = \frac{\pi \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon (l + p + q)}{\ln k \cdot (\varepsilon_2 \varepsilon l + \varepsilon_1 \varepsilon p + \varepsilon_1 \varepsilon_2 q)}, \quad (26)$$

где $l = D_{\text{и2}} (D_{\text{и1}} - d) (D_{\text{и2}} + d)$, $p = D_{\text{и1}} (D_{\text{и2}} - d) (D_{\text{и1}} + d)$, $q = (D_{\text{и1}} + D_{\text{и2}}) (D_{\text{и1}} + d) (D_{\text{и2}} + d)$, $k = \sqrt{\frac{(D_{\text{и1}} + D_{\text{и2}})^2}{4d^2} - 1} + \frac{D_{\text{и1}} + D_{\text{и2}}}{2d}$.

Заметим, что выражение (25) будет справедливо и для экранированной витой пары LAN-кабеля, если ввести в него коэффициент экранирования и коэффициент скрутки.

Полученное выражение (26) позволяет оценить характер зависимости между регулируемым диаметром и диэлектрической проницаемостью изоляции в процессе её наложения, которая обеспечивает инвариантность обобщённых параметров кабеля — рабочей ёмкости и волнового сопротивления — к возможным вариациям регулируемых параметров.

Данная зависимость определяется как решение уравнений [1]

$$P(D_{\text{и}}, \varepsilon_{\text{и}}) = \text{const}, \quad (27)$$

где P — обобщённый параметр кабеля, описываемый выражениями (25), (26).

Если считать, что $D_{\text{и}}(x) = \text{const}$ и $\varepsilon_{\text{и}}(x) = \text{const}$, то цель управления [1] имеет вид

$$\Delta C(x) = K_D \cdot \Delta D_{\text{и}}(x) + K_{\varepsilon} \cdot \Delta \varepsilon_{\text{и}}(x) = 0, \quad (28)$$

а закон управления —

- $\Delta D_{\text{и}}(x) = -\frac{K_{\varepsilon}}{K_D} \Delta \varepsilon_{\text{и}}(x)$, если датчик диаметра изоляции установлен до датчика её диэлектрической проницаемости;
- $\Delta \varepsilon_{\text{и}}(x) = -\frac{K_D}{K_{\varepsilon}} \Delta D_{\text{и}}(x)$, если датчик диаметра изоляции установлен после датчика её диэлектрической проницаемости.

Здесь

$$K_{\varepsilon} = \frac{\partial C}{\partial \varepsilon_1} = C \left(\frac{1}{\varepsilon_2 \varepsilon l + \varepsilon_1 \varepsilon p + \varepsilon_1 \varepsilon_2 q} + \frac{1}{\varepsilon_1} \right),$$

$$K_D = \frac{\partial C}{\partial D_{\text{и1}}} = \frac{\pi \varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon}{\ln k} \left(\frac{\frac{p}{D_{\text{и1}}} + \frac{p+q}{D_{\text{и1}}+d} + \frac{l}{D_{\text{и1}}-d} + \frac{q}{D_{\text{и1}}+D_{\text{и2}}}}{\varepsilon_2 \varepsilon l + \varepsilon_1 \varepsilon p + \varepsilon_1 \varepsilon_2 q} - \right. \\ \left. - \frac{(l+p+q) \left(\varepsilon_2 \varepsilon \frac{q}{D_{\text{и1}}-d} + \varepsilon_1 \varepsilon p \left(\frac{1}{D_{\text{и1}}+d} + 1 \right) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 q \left(\frac{1}{D_{\text{и1}}+d} + \frac{1}{D_{\text{и1}}+D_{\text{и2}}} \right) \right)}{(\varepsilon_2 \varepsilon l + \varepsilon_1 \varepsilon p + \varepsilon_1 \varepsilon_2 q)^2} - \frac{v(l+p+q)}{k \cdot \ln k} \right), \\ v = \frac{D_{\text{и1}} + D_{\text{и2}}}{4d^2 \sqrt{\frac{(D_{\text{и1}}+D_{\text{и2}})^2}{4d^2} - 1}} + \frac{1}{2d}.$$

Параметры кабеля выбираются согласно известным требованиям.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Чостковский, Б. К. Структурный синтез оптимального управления обобщенными параметрами электрических кабелей связи [Текст] / Б. К. Чостковский // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Техн. науки. — 2007. — 1. — С. 54–57. — ISBN 5-7964-0873-9.
- Власов, В. Е. Кабели цифровых сетей электросвязи. Конструирование, технология, применение [Текст] / В. Е. Власов, Ю. А. Парфенов. — М.: Эко-Трендз, 2005. — 216 с. — ISBN 5-88405-072-0.
- Ионов, А. Д. Линии связи: Учеб. пособ. для вузов [Текст] / А. Д. Ионов, Б. В. Попов. — М.: Радио и связь, 1990. — 168 с. — ISBN 5-256-00680-0.
- Вайнштейн, Л. А. Электромагнитные волны [Текст] / Л. А. Вайнштейн; 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Радио и связь, 1998. — ISBN 5-256-00064-0.
- Миролюбов, Н. Н. Методы расчёта электростатических полей [Текст] / Н. Н. Миролюбов. — М.: Высш. шк., 1963. — 415 с. — ISBN 5-283-03052-0.

Самарский государственный технический университет, г. Самара
beria_1987@mail.ru

Поступила 29.12.2007

В окончательном варианте
17.01.2008

B. K. Chostkovsky, D. A. Smorodinov

MATHEMATICAL MODEL OF TWISTED PAIRS RADIO-FREQUENCY CABLE OF CONTROL OBJECT

Mathematical model of configuration of electrical quantities in LAN-cable twisted pairs has been developed; the exact calculation of inter contour connection parameters based on it became possible. That provides optimization of double-loop automatic control system of extruded bubble-formed insulation parameters.

Samara State Technical University, Samara
beria_1987@mail.ru

Received 29.12.2007