Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Евдокимов, В. В. Стулин, Аналитическое решение задач циклического контактного теплообмена для системы двух плоских тел, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 1(), 119–129

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu583>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 18:30:20

УДК 536.21

М. А. Евдокимов, В. В. Стулин

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЦИКЛИЧЕСКОГО КОНТАКТНОГО ТЕПЛООБМЕНА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ПЛОСКИХ ТЕЛ

С помощью интегрального преобразования Лапласа получены аналитические решения ряда циклических тепловых задач, включая задачи контактного теплообмена для системы двух бесконечных пластин с термическим сопротивлением в зоне контакта при различных условиях внешнего теплообмена. Для квазиустановившейся стадии процесса решения получены двумя методами в форме систем интегральных уравнений Фредгольма. Решения учитывают циклическое иницирование разнородных по характеру теплообразующих источников. Тепловой поток трения локализован в пределах пограничного термического слоя.

Вопросы управления и оптимизации большой группы процессов технологической теплофизики (это прежде всего процессы горячей обработки металлов давлением) связаны с необходимостью решения циклических тепловых задач контактного теплообмена с чередующимися краевыми условиями (IV $\rightleftharpoons$ II)-го (или (IV $\rightleftharpoons$ III)-го, (IV $\rightleftharpoons$ I)-го) рода на контактной поверхности. Обычно задачи такого класса решаются на основе редукции, а это неизбежно приводит к схематизации контактных систем разобшёнными (одноэлементными) моделями с однородными граничными условиями II-го или I-го рода, при этом автоматически возникают (и во многом остаются открытыми) вопросы выбора мощности и точности разнородных и одновременно действующих тепловых источников (определение которых требует решения обратных тепловых задач) как в зонах контактирования объектов, так и в зонах их пространственной аккумуляции. К последним следует прежде всего отнести тепловые потоки q_v от трения тел по контактной поверхности, тепловые потоки q_w от пластического формоизменения отдельных элементов и тепловые потоки q_f от начального теплосодержания элементов. С позиций временной схематизации и циклического характера реальных теплоконтактных систем в математической модели циклическое температурное воздействие можно представить состоящим из непрерывной последовательности следующих друг за другом единичных циклов контактирования (m — номер произвольного цикла), каждый цикл включает контактный период длительностью τ_c и неконтактный длительностью τ_r (длительность цикла $\tau^+ = \tau_c + \tau_r$).

Наиболее важной с практической точки зрения является квазиустановившаяся стадия процесса ($m \rightarrow \infty$), когда достигаются предельно допустимые эксплуатационные температуры технических объектов, поэтому ниже предлагаются два возможных аналитических подхода определения указанных температур, причём первый из них учитывает некоторые специальные условия (последовательные допущения), а второй — условия сопряжения. Каждый из методов может быть реализован как для одного теплоисточника, так и для их совокупности, но в последнем случае математические выкладки и итоговые решения становятся весьма громоздкими. Поэтому в первой из рассматриваемых ниже задач учитывается источник начального теплосодержания q_f (соответствующим величинам приписывается индекс f), а во второй q_v , и при этом присваивается индекс v . С целью наглядности и возможности последующего численного анализа рассмотрим циклическое контактирование двух плоских объектов (пластины конечных размеров l_1 и l_2), имеющих одну плоскость контактирования ($x = 0$) в принятой системе координат одномерной теплопередачи, при этом в постановке первой краевой задачи учитывается, что $q_w = 0$, $q_v = 0$, $q_f \neq 0$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) T_{fi}^{(m)}(x, t) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad t > 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где t — время, x — координата, $i = 1$ — номер (индекс) пластины толщиной l_1 ($x \in [-l_1, 0]$); $i = 2$ — номер (индекс) пластины толщиной l_2 ($x \in [0, l_2]$); $T_f^{(m)}$ — температура в m -ом цикле от действия циклического теплоисточника q_f ; λ_i , a_i — соответствующие номерам пластин коэффициенты тепло- и температуропроводности.

Начальное условие для контактной системы записывается следующим образом:

– при $t = 0$:

$$T_{f2}^{(1)}(x, t) = 0; \quad (2)$$

– для моментов времени $t = (m - 1)\tau^+$ в каждом m -ом цикле:

$$T_{f1}^{(m)}(x, t) = f_1^{(m)}(x) = \text{const}. \quad (3)$$

Граничные условия:

– при $x = -l_1, t > 0$ (адиабатическое условие):

$$\lambda_1 \frac{\partial T_{f1}^{(m)}(x, t)}{\partial x} = 0; \quad (4)$$

– при $x = l_2, t > 0$:

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_{f2}^{(m)}(x, t)}{\partial x} = \alpha_2 [T_{f2}^{(m)}(x, t) - T_0] = 0; \quad (5)$$

– при $x = 0, t \in [(m-1)\tau^+, (m-1)\tau^+ + \tau_c]$:

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_{f1}^{(m)}(x, t)}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial T_{f2}^{(m)}(x, t)}{\partial x} = 0; \quad (6)$$

– при $x = 0$:

$$-\lambda_2 \frac{\partial T_{f2}^{(m)}(x, t)}{\partial x} + H [T_{f1}^{(m)}(x, t) - T_{f2}^{(m)}(x, t)] = 0. \quad (7)$$

Коэффициент теплообмена H на контактной плоскости равен α для интервалов контактирования, а в периоды пауз ($t \in [(m-1)\tau^+ + \tau_c, m\tau^+]$) принимается равным нулю; α_2 — коэффициент теплообмена по закону Ньютона на границе $x = l_2$; $T_0 = 0$ — температура окружающей среды.

Решение сформулированной задачи (чтобы исключить выполнения поэтапных расчётов) осуществим для квазиустановившейся стадии теплообмена ($m \rightarrow \infty$) методом последовательных допущений: на первом этапе решения допускаем, что в период контактирования для некоторого произвольного m -го цикла известно начальное температурное распределение $f_2^{(m)}(x)$ в пластине 2, аналогично считается заданной и равномерной начальная температура первой пластины $f_1^{(m)}(x) = \text{const}$ (в общем случае температурное распределение может быть неравномерным). Тогда для единичного m -го акта теплопередачи температурные поля элементов системы можно выразить через $f_2^{(m)}(x)$, исходя из решения следующей краевой задачи:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) T_{fi}^{(m)}(x, t) = 0, \quad t > 0, \quad m \neq 1 \quad (i = 1, 2) \quad (8)$$

с граничными и начальными условиями:

$$\frac{\partial T_{f1}^{(m)}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=-l_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\alpha_2}{\lambda_2} \right) T_{fi}^{(m)}(x, t) \Big|_{x=l_2} = 0; \quad (9)$$

$$\lambda_1 \rho \frac{\partial T_{f1}^{(m)}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} - \lambda_2 \rho \frac{\partial T_{f2}^{(m)}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = (T_{f2}^{(m)}(x, t) - T_{f1}^{(m)}(x, t)) \Big|_{x=0}; \quad (10)$$

$$T_{f1}^{(m)}(x, 0) = f_{10}^{(m)}(x) = \text{const}, \quad T_{f2}^{(m)}(x, 0) = f_{20}^{(m)}(x), \quad (11)$$

где $\rho = \frac{1}{H}$ — термическое сопротивление в зоне контакта.

Если на границе $x = 0$ дополнительно генерируется тепловой поток трения $q_v(t)$, то его можно учесть введением в условие (10) соответствующего теплового потока. Применяя к системе (8)–(11) преобразование Лапласа по времени t [1, 2] (в предположении, что функции $T_{fi}^{(m)}(x, t)$ являются оригиналами) после соответствующих выкладок получим искомые решения в пространстве изображений:

– для пластины 1:

$$\bar{T}_{f1}^{(m)}(x, p) = \frac{1}{p} \left(f_{10}^{(m)} + \frac{\text{Bi}_{s1} \text{ch} \varepsilon_1 (l_1 + x)}{\mathcal{K}} \left\{ \varepsilon_1 \int_0^{l_2} f_{20}^{(m)}(\xi) \left[\varepsilon_1 l_1 \text{ch} \varepsilon_2 (l_2 - \xi) + \text{Bi}_2 \text{ch} \varepsilon_2 (l_2 - \xi) \right] d\xi - \right. \right. \\ \left. \left. - f_{10}^{(m)} \left(\varepsilon_2 l_2 \text{sh}(\varepsilon_2 l_2) + \text{Bi}_2 \text{ch}(\varepsilon_2 l_2) \right) \right\} \right); \quad (12)$$

– для пластины 2:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{f2}^{(m)}(x, p) = & \frac{1}{p\mathcal{K}} \left(K_\varepsilon \text{Bi}_{s1} f_{10}^{(m)} \text{sh}(\varepsilon_1 l_1) [\text{Bi}_2 \text{sh}(\varepsilon_2(l_2 - x)) + \varepsilon_2 l_2 \text{ch}(\varepsilon_2(l_2 - x))] + \right. \\ & \left. + \varepsilon_2 [\varepsilon_1 l_1 \text{sh}(\varepsilon_1 l_1) \text{ch}(\varepsilon_2 x) + \text{Bi}_{s1} [\text{ch}(\varepsilon_1 l_1) \text{ch}(\varepsilon_2 x) + K_\varepsilon \text{sh}(\varepsilon_1 l_1) \text{sh}(\varepsilon_1 x)]] \right) \times \\ & \times \int_0^{l_2} f_{20}^{(m)}(\xi) [\text{Bi}_2 \text{sh}(\varepsilon_2(l_2 - \xi)) + \varepsilon_2 l_2 \text{ch}(\varepsilon_2(l_2 - \xi))] d\xi \Bigg) - \frac{a_2}{\sqrt{p}} \int_0^x f_{20}^{(m)}(\xi) \text{sh}(\varepsilon_2(x - \xi)) d\xi. \quad (13) \end{aligned}$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$\bar{T}_{fi}^{(m)}(x, p) = \int_0^\infty T_{fi}^{(m)}(x, t) \exp(-pt) dt$$

– изображение по Лапласу функции-оригинала $T_{fi}^{(m)}$, $i = 1, 2$; $\text{Bi}_{s1} = \frac{\alpha}{\lambda_1} l_1$, $\text{Bi}_2 = \frac{\alpha_2}{\lambda_2} l_2$ – критерии Био; $K_\varepsilon = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}$ – критерий характеризующий тепловую активность первого объекта по отношению ко второму; $\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{p}{a_1}}$, $\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{p}{a_2}}$ – параметры;

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = & K_\varepsilon \text{Bi}_{s1} \text{sh}(\varepsilon_1 l_1) [\varepsilon_2 l_2 \text{ch}(\varepsilon_2 l_2) + \text{Bi}_2 \text{sh}(\varepsilon_2 l_2)] + \\ & + [\varepsilon_1 l_1 \text{ch}(\varepsilon_1 l_1) + \text{Bi}_{s1} \text{ch}(\varepsilon_1 l_1)] [\varepsilon_2 l_2 \text{sh}(\varepsilon_2 l_2) + \text{Bi}_2 \text{ch}(\varepsilon_2 l_2)]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись теоремами разложения и умножения изображений операционного исчисления, получим соответствующие температурные функции $T_{fi}^{(m)}(x, t)$ ($i = 1, 2$) в пространстве оригиналов в форме тригонометрических рядов:

– для пластины 1:

$$\begin{aligned} T_{f1}^{(m)}(x, t) = & 2 \sum_{n=1}^\infty \psi_f^{-1}(\mu_n) \cos \mu_n \left(1 + \frac{x}{l_1} \right) \left\{ f_{10}^{(m)} \left(\frac{H^*}{\mu_n} \cos \frac{\mu_n}{H^*} - \frac{1}{\text{Bi}_2} \sin \frac{\mu_n}{H^*} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} f_{20}^{(m)}(\xi) \left[\frac{\mu_n}{H^* \text{Bi}_2} \cos \frac{\mu_n}{H^*} \left(1 - \frac{\xi}{l_2} \right) + \sin \frac{\mu_n}{H^*} \left(1 - \frac{\xi}{l_2} \right) \right] d\xi \right\} \exp \left(-\frac{\mu_n^2}{(H^*)^2} \text{Fo}_2 \right); \quad (14) \end{aligned}$$

– для пластины 2:

$$\begin{aligned} T_{f2}^{(m)}(x, t) = & 2 \sum_{n=1}^\infty \psi_f^{-1}(\mu_n) \left\{ \frac{K_\varepsilon}{\mu_n} \left[\frac{H^*}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{H^*} \left(1 - \frac{x}{l_2} \right) + \frac{1}{\text{Bi}_2} \cos \frac{\mu_n}{H^*} \left(1 - \frac{x}{l_2} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{l_2} \left[\left(\cos \mu_n - \mu_n \frac{1}{\text{Bi}_{s1}} \sin \mu_n \right) \cos \frac{\mu_n x}{H^* l_2} - K_2 \sin \mu_n \sin \frac{\mu_n x}{H^* l_2} \right] \times \right. \\ & \left. \times \int_0^{l_2} f_{20}^{(m)}(\xi) \left[\frac{1}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{H^*} \left(1 - \frac{\xi}{l_2} \right) + \frac{1}{H^* \text{Bi}_2} \cos \frac{\mu_n}{H^*} \left(1 - \frac{\xi}{l_2} \right) \right] d\xi \right\} \exp \left(-\frac{\mu_n^2}{H^*} \text{Fo}_2 \right) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi a_2 t}} \int_0^x f_{20}^{(m)}(\xi) \exp \left(-\frac{(x - \xi)^2}{4 a_2 t} \right) d\xi. \quad (15) \end{aligned}$$

В приведенных решениях обозначено:

$$\begin{aligned} \psi_f(\mu_n) = \mu_n \left\{ K_\varepsilon \cos \mu_n \left(\frac{1}{\text{Bi}_2} \cos \frac{\mu_n}{H^*} + \frac{H^*}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{H^*} \right) + \frac{K_\varepsilon}{\mu_n} \sin \mu_n \times \right. \\ \times \left[\left(1 + \frac{1}{\text{Bi}_2} \right) \cos \frac{\mu_n}{H^*} - \frac{\mu_n}{H^* \text{Bi}_2} \sin \frac{\mu_n}{H^*} \right] + \left(\frac{H^*}{\mu_n} \cos \frac{\mu_n}{H^*} - \frac{1}{\text{Bi}_2} \sin \frac{\mu_n}{H^*} \right) \times \\ \times \left[\frac{\mu_n}{\text{Bi}_{s1}} \cos \mu_n + \left(1 + \frac{1}{\text{Bi}_{s1}} \right) \sin \mu_n \right] + \left(\frac{1}{\mu_n} \cos \mu_n - \frac{1}{\text{Bi}_{s1}} \sin \mu_n \right) \times \\ \left. \times \left[\frac{\mu_n}{H^* \text{Bi}_2} \cos \frac{\mu_n}{H^*} + \left(1 + \frac{1}{\text{Bi}_2} \right) \sin \frac{\mu_n}{H^*} \right] \right\}; \quad (16) \end{aligned}$$

$K_l = \frac{l_1}{l_2}$, $K_a = \frac{a_1}{a_2}$ — безразмерные параметры; $H^* = \frac{K_l}{\sqrt{K_a}} = \frac{l_1}{l_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}$ — безразмерный критерий, характеризующий темп перестройки температурной обстановки в пластине 2 по отношению к пластине 1; $\text{Fo}_2 = \frac{a_2}{l_2^2} t$ — критерий Фурье.

Суммирование в (14), (15) ведётся по всему множеству корней μ_n ($\mu_n > 0$), которое задаётся трансцендентным уравнением

$$\begin{aligned} \frac{K_\varepsilon}{\mu_n} \sin \mu_n \left(\frac{1}{\text{Bi}_2} \cos \frac{\mu_n}{H^*} + \frac{H^*}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{H^*} \right) - \\ - \left(\frac{1}{\text{Bi}_{s2}} \sin \mu_n - \frac{1}{\mu_n} \cos \mu_n \right) \left(\frac{1}{\text{Bi}_2} \sin \frac{\mu_n}{H^*} - \frac{H^*}{\mu_n} \cos \frac{\mu_n}{H^*} \right) = 0. \quad (17) \end{aligned}$$

Полученные температурные функции позволяют найти в общем виде такую важную характеристику процесса, как поток теплообмена $q^{(m)}(t)$ между контактирующими элементами:

$$\begin{aligned} q^{(m)}(t) = -\lambda_1 \frac{\partial T_{f1}^{(m)}(0, t)}{\partial x} = 2 \frac{\lambda_1}{l_1} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \sin \mu_n \left\{ f_{10}^{(m)} \left(\frac{H^*}{\mu_n} \cos \frac{\mu_n}{H^*} - \frac{1}{\text{Bi}_2} \sin \frac{\mu_n}{H^*} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} f_{20}^{(m)}(\xi) \left[\frac{\mu_n}{H^* \text{Bi}_2} \cos \frac{\mu_n}{H^*} \left(1 - \frac{\xi}{l_2} \right) + \sin \frac{\mu_n}{H^*} \left(1 - \frac{\xi}{l_2} \right) \right] d\xi \right\} \exp \left(-\frac{\mu_n^2}{(H^*)^2} \text{Fo}_2 \right). \quad (18) \end{aligned}$$

Отметим, что в выражении (18) функционально взаимосвязаны две неизвестные функции: $f_{20}^{(m)}(x)$ и $q^{(m)}(t)$. Очевидно, для нахождения указанных функций необходимо иметь два функциональных уравнения. Второе искомое функциональное уравнение может быть получено на основе следующего последовательного допущения: предположим, что поток $q^{(m)}(t)$ известен и циклически действует на контактную поверхность пластины 2 и требуется найти её температурное поле (временные параметры теплового нагружения соответствуют их значениям для всей контактной системы). Для решения этой задачи в общем виде предварительно рассмотрим частично редуцированную модель теплообмена: на пластину циклически действует поток с закреплённой мощностью $q_c^{(m)} = q_c = \text{const}$ в периоды контактирования τ_c . В этом случае температурные поля для m -го цикла контактирования можно получить интегрированием уравнения теплопроводности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) T_c^{(m)}(x, t) = 0, \quad t > 0, \quad x \in [0, l_2], \quad m \in \mathbb{N} \quad (19)$$

при следующих краевых условиях:

$$\lambda_2 \frac{\partial T_c^{(m)}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_c \sum_{\nu=1}^m \left\{ \eta [t - (\nu - 1) \tau^+ - \tau_c] - \eta [t - (\nu - 1) \tau^+] \right\} \Big|_{x=0}; \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\alpha_2}{\lambda_2} \right) T_c^{(m)}(x, t) \Big|_{x=l_2} = 0 \quad T_c^{(1)}(x, 0) = 0, \quad (21)$$

где $\eta(t - \tau)$ — функция Хевисайда с параметром запаздывания τ .

В постановке, аналогичной (19)–(21), возможно рассмотрение и другого важного случая чередующихся граничных условий (IV–III)-го рода, когда на этапе (τ_r) контактная поверхность охлаждается по закону Ньютона, в частном случае, с постоянной интенсивностью. Тогда правая часть (20) задаётся в виде ступенчатой знакопеременной функции

$$(-q_c)\eta(t) + q \sum_{\nu=1}^m \left\{ \eta[t - (\nu - 1)\tau^+ - \tau_c] - \eta[t - (\nu - 1)\tau^+] \right\},$$

где $q_r = q - q_c$ — постоянная интенсивность теплоотвода с поверхности $x = 0$, определяемая величиной q .

Систему (19)–(21) решаем для произвольного m -го цикла методом преобразования Лапласа и выполняем предельный переход $m \rightarrow \infty$, в результате получим для квазиустановившейся стадии процесса и периодов τ_c и τ_r соответственно решения, представляющие ряды по собственным функциям, зависящим от пространственной переменной:

$$T_c^{(\infty)}(x, t_c) = \frac{q_c}{\lambda_2} \left[\frac{\lambda_2 + (l_2 - x)\alpha_2}{\alpha_2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x) \frac{\exp a_2 u_n^2 (\tau_c - t_c) - \exp a_2 u_n^2 (\tau^+ - t_c)}{1 - \exp a_2 u_n^2 \tau^+} \right], \quad (22)$$

$$T_r^{(\infty)}(x, t_r) = \frac{2q_c}{\lambda_2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x) \frac{\exp a_2 u_n^2 (\tau_r - t_r) - \exp a_2 u_n^2 (\tau^+ - t_r)}{1 - \exp a_2 u_n^2 \tau^+}, \quad (23)$$

где обозначено

$$C_n(x) = \frac{\lambda_2 u_n \cos u_n (l_2 - x) + \alpha_2 \sin u_n (l_2 - x)}{u_n^2 [\lambda_2 l_2 u_n \cos u_n l_2 + (\lambda_2 + \alpha_2 l_2) \sin u_n l_2]},$$

$\tau_r = \tau^+ - \tau_c$ — длительность этапа охлаждения пластины 2 с поверхности $x = 0$, причём $t_c \in [0, \tau_c]$, $t_r \in [0, \tau_r]$.

Положительные корни u_n , по которым ведётся суммирование в (22), (23), определяются из характеристического уравнения

$$\operatorname{tg}(u_n l_2) = \frac{\alpha_2}{\lambda_2 u_n}. \quad (24)$$

Приведённая выше постановка краевой задачи (19)–(21) и её циклическое решение выгодно отличаются от известных тем, что предельный переход $m \rightarrow \infty$ совершается лишь после окончательного решения системы в пространстве изображений, что позволяет легко определить циклические температурные поля с использованием преобразования Лапласа. Одновременно отпадает необходимость в трудоёмких вычислениях вычетов в простых полюсах $\beta_n = \pm \frac{2\pi i}{\tau^+} n$ (здесь i — мнимая единица, $n \in \mathbb{N}$); исключается получение и последовательная численная обработка рядов Фурье, как правило, плохо сходящихся.

На следующем заключительном этапе решения общей краевой задачи осуществляется переход от циклического потока $q_c^{(m)}$ постоянной интенсивности к потоку переменной интенсивности $q^*(t)$ в периоды контактирования всего процесса. С этой целью, учитывая циклическость процесса, преобразуем ранее полученные решения (22), (23) согласно теореме Дюамеля. В основу указанного преобразования естественно положить понятие переходной температурной циклической функции, представляющей собой реакцию системы (объекта) на конечную или бесконечную периодическую последовательность прямоугольных тепловых импульсов единичной мощности. Для рассматриваемой краевой задачи переходными циклическими функциями для этапов τ_c и τ_r являются

$$T_{1c}(x, t_c) = \frac{1}{q_c} T_c^{(\infty)}(x, t_c), \quad T_{1r}(x, t_r) = \frac{1}{q_c} T_r^{(\infty)}(x, t_r).$$

Схема получения интеграла Дюамеля для случая циклического воздействия остаётся традиционной [3]: действительный циклический процесс внешнего теплового воздействия в виде импульсов произвольной формы разбивается на систему смещённых во времени элементарных периодических процессов с прямоугольной формой импульсов с последующим их суммированием.

Пусть элементарный скачок Δq^* циклического потока возникает в момент времени $\tau + \Delta\tau = \tau_c$ каждого цикла, тогда значение искомой температуры от действия Δq^* для квазиустановившейся стадии с учётом введённых по аналогии обозначений и переходных характеристик будет [3]:

– для периода нагрева (величина $\tau + \Delta\tau$ входит параметрически в функцию двух переменных):

$$\Delta q^* T_{1c}(x, t_c; \tau + \Delta\tau) = \frac{\Delta q^*}{\lambda_2} \left[\frac{\lambda_2 + (l_2 - x)\alpha_2}{\alpha_2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x) \frac{\exp a_2 u_n^2 (\tau_c - t_c) - \exp a_2 u_n^2 (\tau^+ - t_c + \tau + \Delta\tau)}{1 - \exp a_2 u_n^2 \tau^+} \right];$$

– для периода охлаждения:

$$\Delta q^* T_{1r}(x, t_r; \tau + \Delta\tau) = \frac{2\Delta q^*}{\lambda_2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x) \frac{\exp a_2 u_n^2 (\tau_r - t_r + \tau + \Delta\tau) - \exp a_2 u_n^2 (\tau^+ - t_r)}{1 - \exp a_2 u_n^2 \tau^+}.$$

Суммируя по всем элементарным циклическим потокам Δq^* , включённым в соответствующие моменты $\tau + \Delta\tau > \tau_c$, и переходя к пределу $\Delta\tau_{\max} \rightarrow 0$, с учётом предельного соотношения

$$\Delta q^* \rightarrow dq^*(\tau) = [q^*(\tau)]' d\tau$$

получим искомые температурные функции от воздействия циклического потока в виде

$$T_c^*(x, t_c) = \frac{2a_2}{\lambda_2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 C_n(x) \exp(-a_2 u_n^2 t_c) \left[\int_0^{t_c} q^*(\tau) \exp(a_2 u_n^2 \tau) d\tau \right] - \frac{1}{1 - \exp(a_2 u_n^2 \tau^+)} \int_0^{\tau_c} q^*(\tau) \exp(a_2 u_n^2 \tau) d\tau, \quad (25)$$

$$T_r^*(x, t_r) = \frac{2a_2}{\lambda_2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 C_n(x) \frac{\exp(-a_2 u_n^2 (\tau_c + t_r))}{1 - \exp(-a_2 u_n^2 \tau^+)} \int_0^{\tau_c} q^*(\tau) \exp(a_2 u_n^2 \tau) d\tau. \quad (26)$$

Любое из последних двух решений можно использовать для получения второго уравнения в системе, связывающей функционально $q^*(t)$ и $f_{20}^{(m)}(x)$. Например, при $t_r = \tau_r$ из (26) получим

$$f_{20}^{(m)}(x) = \frac{2a_2}{\lambda_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n^2 C_n(x)}{\exp(a_2 u_n^2 \tau^+) - 1} \int_0^{\tau_c} q^*(\tau) \exp(a_2 u_n^2 \tau) d\tau. \quad (27)$$

При рассмотрении квазиустановившейся стадии решения (25), (26) остаются справедливыми с учётом предельных соотношений $f_{20}^{(m)}(x) \rightarrow f_{20}^{(\infty)}(x)$, $q^*(t) \rightarrow q^{(\infty)}(t)$, переход к $m \rightarrow \infty$ основывается на очевидных физических соображениях: квазиустановившаяся стадия теплообмена полностью определяется наличием периодической составляющей теплового нагружения и не зависит от пути, по которому система выходит на неё (начальное температурное распределение в пластине 2 в первом цикле и аperiodическая составляющая действительного теплового потока, действующего на пластину, повлияют лишь на момент выхода на квазиустановившуюся стадию). Отмеченное вполне согласуется с положениями и выводами, которые имеют место в теории электрических цепей [3], где применяются специальные приёмы, использующие операторные представления передаточных функций, а также свободной и принуждённой реакций электрической цепи на периодическую (несинусоидальную) воздействующую функцию.

Система уравнений (18), (27) для случая $m \rightarrow \infty$ однозначно разрешается относительно неизвестных функций $f_{20}^{(\infty)}(x)$, $q^{(\infty)}(t)$. После подстановки (27) в (18) получим неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, из которого временная функция $q^{(\infty)}(t)$ определяется методом итераций:

$$q^{(\infty)}(t) = F(t) + \frac{4a_2 \lambda_1}{\lambda_2 l_2 l_1} \int_0^{\tau_c} q^{(\infty)}(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad (28)$$

где свободный член $F(t)$ и ядро $K(t, \tau)$ уравнения записываются следующим образом:

$$F(t) = \frac{2\lambda_1}{l_1} f_{10}^{(\infty)} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \sin \mu_n \left(\frac{H^*}{\mu_n} \cos \frac{\mu_n}{H^*} - \frac{1}{\text{Bi}_2} \sin \frac{\mu_n}{H^*} \right) \exp \left(-\frac{\mu_n^2}{(H^*)^2} \text{Fo}_c \right),$$

$$K(t, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \sin \mu_n \exp \left(-\frac{\mu_n^2}{(H^*)^2} \text{Fo}_2 \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n^2 \exp(a_2 u_n^2 \tau)}{\exp(a_2 u_n^2 \tau^+) - 1} \times \\ \times \int_0^{l_2} C_n(\xi) \left[\frac{\mu_n}{H^* \text{Bi}_2} \cos \frac{\mu_n}{H^*} \left(1 - \frac{\xi}{l_2} \right) + \sin \frac{\mu_n}{H^*} \left(1 - \frac{\xi}{l_2} \right) \right] d\xi.$$

Определив $q^{(\infty)}(t)$, по формулам (25), (26) вычисляются температуры в любой момент единичного цикла на квазиустановившейся стадии. По аналогичной схеме вместо временной функции $q^{(\infty)}(t)$ находится координатная функция $f_{20}^{(\infty)}(x)$.

Для решения краевой задачи (1)–(7) (в предположении, что $q_w = 0$, $q_v \neq 0$, $q_f = 0$) можно использовать отмеченные выше условия сопряжения (метод сопряжения), в основе которого лежат условия периодичности и сопряжения температурных распределений по сечению пластины 2 от цикла к циклу на квазиустановившейся стадии. Действительно, в начале и в конце единичного циклов температуры должны совпадать (это минимальное распределение по сечению обозначим $f_{v2}^{(\infty)}(x)_{\min}$), температуры также равны в конце периода контактирования и в начале этапа охлаждения (это максимальное температурное распределение по сечению обозначим $f_{v2}^{(\infty)}(x)_{\max}$). Тогда выполняются равенства

$$T_{v2}^{(\infty)}(x, t_c) \Big|_{t_c=0} = T_{v2}^{(\infty)}(x, t_r) \Big|_{t_r=\tau_r} = f_{v2}^{(\infty)}(x)_{\min}, \quad t_c \in [0, \tau_c], \quad (29)$$

$$T_{v2}^{(\infty)}(x, t_c) \Big|_{t_c=\tau_c} = T_{v2}^{(\infty)}(x, t_r) \Big|_{t_r=0} = f_{v2}^{(\infty)}(x)_{\max}, \quad t_r \in [0, \tau_r]. \quad (30)$$

Соотношения (29), (30) полностью определяют цикличность процесса и чтобы связать $f_{v2}^{(\infty)}(x)_{\min}$ и $f_{v2}^{(\infty)}(x)_{\max}$ функциональной системой необходимо решить последовательно следующие две краевые задачи.

Рассмотрим задачу одноразового контакта пластины 1 с нулевой начальной температурой и пластины 2 с минимальной начальной температурой распределения по сечению при $m \rightarrow \infty$ и $q_v = \text{const}$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) T_{vi}^{(\infty)}(x, t_c) = 0, \quad t_c \in [0, \tau_c]. \quad (31)$$

Граничные условия:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + H_2 \right) T_{v2}^{(\infty)}(x, t_c) \Big|_{x=l_2} = 0, \quad H_2 = \frac{\alpha_2}{\lambda_2}; \quad (32)$$

$$\frac{\partial T_{v1}^{(\infty)}(x, t_c)}{\partial x} \Big|_{x=-l_1} = 0; \quad (33)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_{v1}^{(\infty)}(x, t_c)}{\partial x} \Big|_{x=0} + \lambda_2 \frac{\partial T_{v2}^{(\infty)}(x, t_c)}{\partial x} \Big|_{x=0} + q_v = 0; \quad (34)$$

$$\rho_1 \lambda_1 \frac{\partial T_{v1}^{(\infty)}(x, t_c)}{\partial x} \Big|_{x=0} + \rho_2 \lambda_2 \frac{\partial T_{v2}^{(\infty)}(x, t_c)}{\partial x} \Big|_{x=0} - T_{v2}^{(\infty)}(x, t_c) \Big|_{x=0} + T_{v1}^{(\infty)}(x, t_c) \Big|_{x=0} = 0, \quad (35)$$

где величины $\rho_1 = \frac{1}{\alpha_1^v}$, $\rho_2 = \frac{1}{\alpha_2^v}$ — учитывают локализацию потока трения в пределах пограничного термического слоя ($\rho_1 + \rho_2 = \rho$).

Начальные условия при $t_c = 0$:

$$T_{v1}^{(\infty)}(x, t_c) = 0, \quad T_{v2}^{(\infty)}(x, t_c) = f_{v2}^{(\infty)}(x)_{\min}. \quad (36)$$

Система (31)–(36) интегрируется с использованием преобразования Лапласа. Для дальнейшего потребуется температурное решение только для пластины 2, которое приведено ниже:

$$T_{v2}^{(\infty)}(x, t_c) = \frac{q_v l_2}{\lambda_2 \text{Bi}_2} + \frac{q_v(l_2 - x)}{\lambda_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{vc}^{-1}(u_{nc}) \left\{ \left(-\frac{q_v l_2^3 K_l^3}{\lambda_2 a_2 u_{nc}^3} \right) \times \right. \\ \times \left(\cos u_{nc} - \frac{u_{nc}}{\text{Bi}_1^v} \sin u_{nc} \right) \left[\sin \frac{u_{nc}}{H^*} \left(1 - \frac{x}{l_2} \right) + \frac{u_{nc}}{H^* \text{Bi}_2} \cos \frac{u_{nc}}{H^*} \left(1 - \frac{x}{l_2} \right) \right] + \\ + \left[\cos \frac{u_{nc} x}{H^* l_2} \left(\cos u_{nc} - \frac{u_{nc}}{\text{Bi}_1^v} \sin u_{nc} \right) - K_\varepsilon \sin u_{nc} \left(\sin \frac{u_{nc} x}{H^* l_2} + \frac{u_{nc}}{H^* \text{Bi}_2^v} \cos \frac{u_{nc} x}{H^* l_2} \right) \right] \times \\ \times \int_0^{l_2} f_{v2}^{(\infty)}(\xi)_{\min} \left[\frac{l_2}{a_2 \text{Bi}_2} \cos \frac{u_{nc}}{H^*} \left(1 - \frac{\xi}{l_2} \right) + \frac{l_2 H^*}{a_2 u_{nc}} \sin \frac{u_{nc}}{H^*} \left(1 - \frac{\xi}{l_2} \right) \right] d\xi \Big\} \times \\ \times \exp \left(-\frac{u_{nc}^2}{(H^*)^2} \text{Fo}_2 \right) + \frac{1}{\sqrt{\pi a_2 t_c}} \int_0^x f_{v2}^{(\infty)}(\xi)_{\min} \exp \left(-\frac{(x - \xi)^2}{4 a_2 t_c} \right) d\xi, \quad (37)$$

где $\text{Fo}_2 = \frac{a_2}{l_2^2} t_c$ — критерий Фурье;

$$\psi_{vc}(u_{nc}) = \left(-\frac{l_1^2}{2 u_{nc}^2 a_1} \right) \left\{ \sin u_{nc} \left[-\left(\frac{u_{nc}}{H^* \text{Bi}_2} + \frac{u_{nc}}{H^* \text{Bi}_2^v} \right) \cos \frac{u_{nc}}{H^*} + \left(\frac{u_{nc}}{H^* \text{Bi}_2} + \frac{u_{nc}}{H^* \text{Bi}_2^v} \right) \frac{u_{nc}}{H^*} \sin \frac{u_{nc}}{H^*} + \right. \right. \\ + \frac{2 u_{nc}^2}{H^* \text{Bi}_2 \text{Bi}_2^v} \sin \frac{u_{nc}}{H^*} - \left(1 - \frac{u_{nc}^2}{(H^*)^2 \text{Bi}_2 \text{Bi}_2^v} \right) \frac{u_{nc}}{H^*} \cos \frac{u_{nc}}{H^*} \Big] - u_{nc} \cos u_{nc} \left[\left(\frac{u_{nc}}{H^* \text{Bi}_2} + \frac{u_{nc}}{H^* \text{Bi}_2^v} \right) \cos \frac{u_{nc}}{H^*} + \right. \\ + \left(1 - \frac{u_{nc}^2}{(H^*)^2 \text{Bi}_2 \text{Bi}_2^v} \right) \sin \frac{u_{nc}}{H^*} \Big] - \left(\frac{u_{nc}}{H^*} \sin \frac{u_{nc}}{H^*} + \frac{u_{nc}}{H^* \text{Bi}_2} \sin \frac{u_{nc}}{H^*} + \frac{u_{nc}^2}{(H^*)^2 \text{Bi}_2} \cos \frac{u_{nc}}{H^*} \right) \left(\cos u_{nc} - \right. \\ \left. - \frac{u_{nc}}{\text{Bi}_1^v} \sin u_{nc} \right) - \left(\cos \frac{u_{nc}}{H^*} - \frac{u_{nc}}{H^* \text{Bi}_2} \sin \frac{u_{nc}}{H^*} \right) \left(u_{nc} \sin u_{nc} + \frac{u_{nc}}{\text{Bi}_1^v} \sin u_{nc} + \frac{u_{nc}^2}{\text{Bi}_1^v} \cos u_{nc} \right) \Big\}, \quad (38)$$

$\text{Bi}_1^v = \frac{\alpha_1^v}{\lambda_1} l_1$, $\text{Bi}_2^v = \frac{\alpha_2^v}{\lambda_2} l_2$ — критерии Био, $K_\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $K_a = \frac{a_1}{a_2}$, $K_l = \frac{l_1}{l_2}$, $H^* = \frac{K_l}{\sqrt{K_a}}$, $K_\varepsilon = \frac{K_\lambda}{\sqrt{K_a}}$ — безразмерные критерии.

Суммирование в (37) ведётся по всему множеству корней характеристического уравнения

$$\left(\cos \frac{u_{nc}}{H^*} - \frac{u_{nc}}{H^* \text{Bi}_2} \sin \frac{u_{nc}}{H^*} \right) \left(\cos u_{nc} - \frac{u_{nc}}{\text{Bi}_1^v} \sin u_{nc} \right) - \\ - K_\varepsilon \sin u_{nc} \left[\left(\frac{1}{\text{Bi}_2} + \frac{1}{\text{Bi}_2^v} \right) \frac{u_{nc}}{H^*} \sin \frac{u_{nc}}{H^*} + \left(1 - \frac{u_{nc}^2}{(H^*)^2 \text{Bi}_2 \text{Bi}_2^v} \right) \sin \frac{u_{nc}}{H^*} \right] = 0. \quad (39)$$

Перепишем решение (37) в более компактной интегральной форме:

$$T_{v2}^{(\infty)}(x, t_c) = \frac{q_v l_2}{\lambda_2 \text{Bi}_2} + \frac{q_v(l_2 - x)}{\lambda_2} + Q(x, \text{Fo}_2) + \int_0^{l_2} f_{v2}^{(\infty)}(\xi)_{\min} K_{vc}(x, \xi, \text{Fo}_2) d\xi + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi a_2 t_c}} \int_0^x f_{v2}^{(\infty)}(\xi)_{\min} \exp \left(-\frac{(x - \xi)^2}{4 a_2 t_c} \right) d\xi, \quad (40)$$

где функция K_{vc} явно определяется из (37) в виде ряда

$$K_{vc}(x, \xi, \text{Fo}_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{vc}^{-1}(u_{nc}) \times \\ \times \left[\cos \frac{u_{nc}x}{H^*l_2} \left(\cos u_{nc} - \frac{u_{nc}}{\text{Bi}_1^v} \sin u_{nc} \right) - K_\varepsilon \sin u_{nc} \left(\sin \frac{u_{nc}x}{H^*l_2} + \frac{u_{nc}}{H^*\text{Bi}_2^v} \cos \frac{u_{nc}x}{H^*l_2} \right) \right] \times \\ \times \left[\frac{l_2}{a_2\text{Bi}_2} \cos \frac{u_{nc}}{H^*} \left(1 - \frac{\xi}{l_2} \right) + \frac{l_2H^*}{a_2u_{nc}} \sin \frac{u_{nc}}{H^*} \left(1 - \frac{\xi}{l_2} \right) \right] \exp \left(-\frac{u_{nc}^2}{(H^*)^2} \text{Fo}_2 \right),$$

а функция $Q(x, \text{Fo}_2)$, соответственно,

$$Q(x, \text{Fo}_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{vc}^{-1}(u_{nc}) \left(-\frac{q_v l_2^3 K_l^3}{\lambda_2 a_2 u_{nc}^3} \right) \times \\ \times \left(\cos u_{nc} - \frac{u_{nc}}{\text{Bi}_1^v} \right) \left[\sin \frac{u_{nc}}{H^*} \left(1 - \frac{x}{l_2} \right) + \frac{u_{nc}}{H^*\text{Bi}_2} \cos \frac{u_{nc}}{H^*} \left(1 - \frac{x}{l_2} \right) \right] \exp \left(-\frac{u_{nc}^2}{(H^*)^2} \text{Fo}_2 \right).$$

Вторая вспомогательная задача формулируется только для пластины 2. Рассмотрим случай естественного (конвективного) охлаждения пластины с произвольной начальной температурой $f_{v2}^{(\infty)}(x)_{\max}$ в окружающую среду через обе ограничивающие поверхности ($x = 0$, $x = l_2$) по закону Ньютона.

Обозначенная задача имеет постановку:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) T_{v2}^{(\infty)}(x, t_r) = 0, \quad t_r \in [0, \tau_r], \quad x \in [0, l_2]; \quad (41)$$

– граничные условия:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - H_2' \right) T_{v2}^{(\infty)}(x, t_r) \Big|_{x=0} = 0, \quad (42)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + H_2 \right) T_{v2}^{(\infty)}(x, t_r) \Big|_{x=l_2} = 0; \quad (43)$$

– начальное условие при $t_r = 0$:

$$T_{v2}^{(\infty)}(x, t_r) = f_{v2}^{(\infty)}(x)_{\max} \quad (44)$$

где $H_2 = \frac{\alpha_2}{\lambda_2}$, $H_2' = \frac{\alpha_2'}{\lambda_2'}$ – относительные коэффициенты теплообмена.

Решение задачи после преобразований запишется так:

$$T_{v2}^{(\infty)}(x, t_r) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{vr}^{-1}(u_{nr}) \left\{ \left(\sin \frac{u_{nr}x}{l_2} + \frac{u_{nr}}{\text{Bi}_2'} \cos \frac{u_{nr}x}{l_2} \right) \times \right. \\ \times \int_0^{l_2} f_{v2}^{(\infty)}(\xi)_{\max} \left[\frac{l_2}{a_2 u_{nr}} \sin u_{nr} \left(1 - \frac{\xi}{l_2} \right) + \frac{l_2}{a_2 \text{Bi}_2'} \cos u_{nr} \left(1 - \frac{\xi}{l_2} \right) \right] d\xi \Big\} \exp(-u_{nr}^2 \text{Fo}_2) + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi a_2 t_r}} \int_0^x f_{v2}^{(\infty)}(\xi)_{\max} \exp \left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a_2 t_r} \right) d\xi, \quad (45)$$

где

$$\psi_{vr}(u_{nr}) = \left(-\frac{l_2^2}{2u_{nr}^2 a_2} \right) \left[\left(\frac{u_{nr}}{\text{Bi}_2} + \frac{u_{nr}}{\text{Bi}_2'} \right) \cos u_{nr} - u_{nr} \left(\frac{u_{nr}}{\text{Bi}_2} + \frac{u_{nr}}{\text{Bi}_2'} \right) \sin u_{nr} - \right. \\ \left. - \frac{2u_{nr}^2}{\text{Bi}_2 \text{Bi}_2'} \sin u_{nr} + \left(1 - \frac{u_{nr}^2}{\text{Bi}_2 \text{Bi}_2'} \right) u_{nr} \cos u_{nr} \right],$$

$\text{Bi}_2' = H_2' l_2 = \frac{\alpha_2'}{\lambda_2} l_2$, $\text{Bi}_2 = H_2 l_2 = \frac{\alpha_2}{\lambda_2} l_2$. Суммирование ведется по всем корням u_{nr} трансцендентного уравнения

$$\sin u_{nr} \left(1 - \frac{u_{nr}^2}{\text{Bi}_2 \text{Bi}_2'} \right) + \cos u_{nr} \left(\frac{u_{nr}}{\text{Bi}_2} + \frac{u_{nr}}{\text{Bi}_2'} \right) = 0. \quad (46)$$

Запишем (45) в интегральной форме:

$$T_{v2}^{(\infty)}(x, t_r) = \int_0^{l_2} f_{v2}^{(\infty)}(\xi)_{\max} K_{vr}(x, \xi, \text{Fo}_2) d\xi + \frac{1}{\sqrt{\pi a_2 t_r}} \int_0^x f_{v2}^{(\infty)}(\xi)_{\max} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a_2 t_r}\right) d\xi, \quad (47)$$

где функция K_{vr} представляет соответствующий ряд из (45):

$$K_{vr}(x, \xi, \text{Fo}_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{vr}^{-1}(u_{nr}) \left\{ \left(\sin \frac{u_{nr} x}{l_2} + \frac{u_{nr}}{\text{Bi}_2'} \cos \frac{u_{nr} x}{l_2} \right) \times \right. \\ \left. \left[\frac{l_2}{a_2 u_{nr}} \sin u_{nr} \left(1 - \frac{\xi}{l_2} \right) + \frac{l_2}{a_2 \text{Bi}_2'} \cos u_{nr} \left(1 - \frac{\xi}{l_2} \right) \right] \right\} \exp(-u_{nr}^2 \text{Fo}_2).$$

Полученные интегральные соотношения (40), (47) на заключительном этапе решения позволяют определить температурные функции $f_{v2}^{(\infty)}(x)_{\min}$, $f_{v2}^{(\infty)}(x)_{\max}$ и тем самым решить задачу циклического контактного теплообмена для квазиустановившейся стадии. С этой целью интегральные соотношения (40), (47) удовлетворяют условиям сопряжения (29), (30). В уравнении (40) следует принять $t_c = \tau_c$, а в (47) принять $t_r = \tau_r$. Тогда получим систему двух интегральных уравнений относительно двух искомых определяющих функций $f_{v2}^{(\infty)}(x)_{\min}$, $f_{v2}^{(\infty)}(x)_{\max}$:

$$f_{v2}^{(\infty)}(x)_{\max} = \frac{q_v l_2}{\lambda_2 \text{Bi}_2} + \frac{q_v (l_2 - x)}{\lambda_2} + Q(x, \text{Fo}_2) + \int_0^{l_2} f_{v2}^{(\infty)}(\xi)_{\min} K_{vc}(u_{nc}, x, \xi, \text{Fo}_{2c}) d\xi + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi a_2 \tau_c}} \int_0^x f_{v2}^{(\infty)}(\xi)_{\min} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a_2 \tau_c}\right) d\xi, \quad (48)$$

$$f_{v2}^{(\infty)}(x)_{\min} = \int_0^{l_2} f_{v2}^{(\infty)}(\xi)_{\max} K_{vr}(x, \xi, \text{Fo}_{2r}) d\xi + \frac{1}{\sqrt{\pi a_2 \tau_r}} \int_0^x f_{v2}^{(\infty)}(\xi)_{\max} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a_2 \tau_r}\right) d\xi, \quad (49)$$

где $\text{Fo}_{2c} = \frac{a_2}{l_2^2} \tau_c$, $\text{Fo}_{2r} = \frac{a_2}{l_2^2} \tau_r$ — безразмерные числа Фурье.

Составленная сложная система интегральных уравнений (48), (49) допускает лишь численное решение относительно искомых функций, знание которых позволяет определить переменные температуры и потоки в любой точке контактной системы на квазиустановившейся стадии. Один из наиболее простых методов решения систем подобного типа — замена известных и неизвестных функций ступенчатыми функциями с последующим применением формул численного интегрирования и получением систем рекуррентных уравнений. Полезно также отметить, что при наличии решений для квазиустановившейся стадии появляется возможность интерполяционного подхода к решению циклической задачи, когда температуры и потоки, рассчитанные постадийно для начальных циклов и квазиустановившейся стадии рассматриваются как опорные (узловые) точки при построении интерполяционной модели процесса теплообмена для произвольного цикла, что является основой термонапряжённого анализа контактной системы, управления и прогнозирования эксплуатационной стойкости объектов контактирования. Возможен переход к контактному теплообмену с полугограниченным телом при $l_2 \rightarrow \infty$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лыков, А. В.* Теория теплопроводности [Текст] / А. В. Лыков. — М.: Высш. шк., 1967. — 600 с.
2. *Карслоу, Х. С.* Теплопроводность твёрдых тел [Текст] / Х. С. Карслоу, Д. К. Егер. — М.: Наука, 1964. — 496 с.
3. *Атабеков, Г. И.* Основы теории цепей [Текст] / Г. И. Атабеков. — М.: Энергия, 1969. — 396 с.

Самарский государственный технический университет, г. Самара

Поступила 18.01.2008

M. A. Yevdokimov, V. V. Stulin

ANALYTIC SOLUTION TO CYCLIC CONTACT HEAT EXCHANGE PROBLEMS FOR A SYSTEM OF TWO FLAT BODIES

Analytic solutions to a number of cyclic heat problems, including those of contact heat exchange for a system of two infinite plates presenting thermal resistance within the contact zone under various conditions of external heat transfer, have been provided using the integral Laplace transformation. Solutions for the quasi-steady-state process stage were provided, using two methods, as sets of Fredholm integral equations. The solutions allow for cyclic initiation of heterogeneous heat-generating sources, the thermal friction flow being within the boundary thermal layer.

Samara State Technical University, Samara, Russia

Received 18.01.2008