Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Абрамов, Математическое моделирование движения астероида 99942
Ароphis на основе методов Адамса с переменным шагом, *Вестн. Сам. гос. техн.
ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 1(), 144–148

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu587>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 16:09:36

УДК 521.1; 523.642

В. В. Абрамов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ АСТЕРОИДА 99942 APORHIS НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ АДАМСА С ПЕРЕМЕННЫМ ШАГОМ

Обоснован выбор методов Адамса с разделёнными разностями для решения уравнений движения малых тел Солнечной системы. С помощью данных методов произведено численное интегрирование с переменным шагом дифференциальных уравнений движения астероида 99942 Apophis. Определены моменты тесных сближений данного малого тела с большими планетами и Луной. Проведено исследование эволюции его орбиты на интервале времени 600 лет.

В настоящее время по-прежнему актуальной является проблема выбора эффективного метода численного интегрирования для решения дифференциальных уравнений движения небесных тел Солнечной системы. Например, специализированный метод Эверхарта [1], который является неявным одношаговым методом, демонстрирует высокую точность вычислений, сохраняя устойчивость даже при наличии тесных сближений небесных тел. Однако интегрирование с помощью метода Эверхарта осуществляется достаточно медленно, что может являться существенным недостатком, например, при исследовании эволюции орбит большого числа малых тел Солнечной системы на длительных интервалах времени.

Для решения задач небесной механики также могут применяться универсальные методы, такие как многошаговые методы Адамса [2]. Они обладают значительно более высоким быстродействием по сравнению с методом Эверхарта. Но методы Адамса являются весьма чувствительными к резким изменениям величин, входящих в правую часть дифференциального уравнения, что имеет место, например, в моменты тесных сближений небесных тел.

В работах [3–5] предлагались различные способы решения данной проблемы, например, применение в моменты тесных сближений метода Эверхарта с переменным шагом или скачкообразное уменьшение величины шага интегрирования в методе Адамса. При этом, во втором случае для закладки таблицы интегрирования при переключении шага также использовался метод Эверхарта. В обоих случаях происходило заметное снижение скорости вычислений, особенно для малых тел, имеющих большое количество тесных сближений на исследуемом интервале времени. Примером таких объектов является астероид 99942 Apophis.

В данной работе для исследования эволюции орбиты астероида 99942 Apophis были применены методы Адамса в форме записи с разделёнными разностями, которая позволяет производить численное интегрирование с переменным шагом. Это позволило устранить сразу несколько недостатков, рассмотренных выше. Во-первых, изменение величины шага интегрирования в методах Адамса с разделёнными разностями не требует производить закладку таблицы интегрирования и какие-либо другие дополнительные вычисления. Во-вторых, возможность плавного изменения величины шага упрощает построение критериев выбора оптимального шага интегрирования. В-третьих, данный алгоритм обладает более высоким быстродействием по сравнению с двумя другими подходами, рассмотренными выше.

Алгоритм численного интегрирования с использованием методов Адамса с переменным шагом можно реализовать в виде метода прогноза и коррекции $P_k E C_{k+1} E$ [2]:

$$\begin{aligned} P: \quad y_{n+1}^p &= y_n + \sum_{i=0}^{k-1} g_{i1} f_{n,n-1,\dots,n-i}, \\ E: \quad f_{n+1}^p &= f(x_{n+1}, y_{n+1}^p), \\ C: \quad y_{n+1} &= y_{n+1}^p + g_{k1} f_{n+1,n,\dots,n-k+1}^p, \\ E: \quad f_{n+1} &= f(x_{n+1}, y_{n+1}). \end{aligned} \quad (1)$$

Запись P в уравнениях (1) означает применение предсказывающей формулы, E — вычисление правой части дифференциального уравнения, C — применение исправляющей формулы. Выражение $f_{n,n-1,\dots,n-i}$ обозначает i -ю разделённую разность f , определяемую следующей рекуррентной формулой:

$$f_{n,n-1,\dots,n-i} = \frac{f_{n,n-1,\dots,n-i+1} - f_{n-1,n-2,\dots,n-i}}{x_n - x_{n-i}}. \quad (2)$$

Обозначение $f_{n+1,n,\dots,n-k+1}^p$ относится к разделённым разностям, образованным с помощью f_{n+1}^p . Переменные коэффициенты g_{ij} в уравнениях (1) можно определить из рекуррентного соотношения

$$g_{ij} = (x_{n+1} - x_{n-i+1})g_{i-1,j} - jg_{i-1,j+1}, \quad (3)$$

где

$$g_{0j} = \frac{(x_{n+1} - x_n)^j}{j!}. \quad (4)$$

Метод численного интегрирования (1) применялся к дифференциальным уравнениям движения, описывающим математическую модель движения небесных тел с учётом релятивистских эффектов [6]:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_i = & k^2 \sum_{j \neq i} m_j \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}^3} \left(1 - \frac{2k^2(\beta + \gamma)}{c^2} \sum_{k \neq i} \frac{m_k}{r_{ik}} - \frac{k^2(2\beta - 1)}{c^2} \sum_{k \neq j} \frac{m_k}{r_{jk}} + \right. \\ & + \gamma \left(\frac{v_i}{c} \right)^2 + (1 + \gamma) \left(\frac{v_j}{c} \right)^2 - \frac{2(1 + \gamma)}{c^2} \dot{\mathbf{r}}_i \dot{\mathbf{r}}_j - \frac{3}{2c^2} \left(\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \dot{\mathbf{r}}_i}{r_{ij}} \right)^2 + \frac{1}{2c^2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \ddot{\mathbf{r}}_j \Big) + \\ & + \frac{k^2}{c^2} \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}^3} \left((\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times ((2 + 2\gamma) \dot{\mathbf{r}}_i - (1 + 2\gamma) \dot{\mathbf{r}}_j) \right) (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j) + \frac{k^2(3 + 4\gamma)}{2c^2} \sum_{j \neq i} \frac{m_j \ddot{\mathbf{r}}_j}{r_{ij}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{r}_i$, $\dot{\mathbf{r}}_i$, $\ddot{\mathbf{r}}_i$ — координаты, скорость, ускорение в барицентрической системе координат i -го возмущаемого тела; $\mathbf{r}_j$, $\dot{\mathbf{r}}_j$, $\ddot{\mathbf{r}}_j$ — координаты, скорость, ускорение в барицентрической системе координат j -го возмущающего тела; k^2 — гравитационная постоянная, m_j — масса j -го тела; $r_{ij} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$, $v_i = |\dot{\mathbf{r}}_i|$; β и γ — релятивистские параметры ($\beta = \gamma = 1$); c — скорость света.

Методы Адамса с переменным шагом в виде (1) были применены к численному интегрированию дифференциальных уравнений движения (1) на интервале времени с 13 марта 1707 года по 8 мая 2307 года. Закладка таблицы интегрирования для инициализации многошагового метода осуществлялась с помощью одношагового метода Эверхарта с использованием уточнённых начальных параметров орбиты астероида 99942 Apophis за 10 апреля 2007 года, полученных из базы данных NASA JPL Small-Body¹, а также начальных данных больших планет и Луны из банка данных координат и скоростей, описанного в работе [7].

На каждом шаге интегрирования величина следующего шага в методе Адамса с разделёнными разностями определялась по алгоритму, который можно представить в виде:

$$h(a) = \begin{cases} h_0, & a \leq a_0, \\ h_0 \sqrt{\frac{a_0}{a}}, & a > a_0, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$a_0 = k^2 \frac{m_0}{r_0^2}. \quad (7)$$

Величина шага интегрирования h зависит только от величины a , которая выбиралась в следующем виде:

$$a = \max_{i=1,n} a_i, \quad (8)$$

где a_i — модуль ускорения, создаваемого i -м телом, влияющим на j -е тело, движение которого исследуется ($i \neq j$). При этом Солнце в множество объектов a_i не входит.

Остальные величины были выбраны ещё до запуска алгоритма, исходя из следующих соображений. Известно, что можно производить численное интегрирование методом Адамса с постоянным шагом $h_0 = 0,2$ дня до тех пор, пока исследуемый объект не сблизится с Землёй, масса которой составляет $m_0 = 3,00349 \cdot 10^{-6}$ солнечной, на расстояние $r_0 = 0,05$ а. е. Тогда согласно формуле (7), критическое ускорение $a_0 = 3,555 \cdot 10^{-7}$.

¹ <http://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi>

Таблица 1

Сближения астероида 99942 Аporhis с Землёй и Луной на расстоянии менее 0,05 а. е. на интервале времени с 1707 по 2307 гг.

Объект	Дата	а. е.	км
Земля	12.04.1730 (18:18:50)	0,022173112	3 317 050
Луна	12.04.1730 (18:18:50)	0,019902292	2 977 341
Луна	12.04.1747 (15:40:15)	0,032892195	4 920 602
Земля	13.04.1747 (00:52:16)	0,031915374	4 774 472
Луна	14.12.1762 (12:09:52)	0,041441443	6 199 552
Земля	16.12.1762 (03:56:27)	0,041919167	6 271 018
Земля	12.04.1772 (08:06:05)	0,036298647	5 430 200
Луна	12.04.1772 (08:06:05)	0,038734651	5 794 621
Луна	12.04.1813 (13:07:15)	0,007402272	1 107 364
Земля	13.04.1813 (05:10:17)	0,008334245	1 246 785
Земля	14.12.1829 (22:56:17)	0,047680406	7 132 887
Луна	15.12.1829 (17:08:00)	0,046533400	6 961 298
Земля	13.04.1866 (12:44:11)	0,004218737	631 114
Луна	14.04.1866 (02:29:16)	0,003316772	496 182
Земля	16.12.1889 (19:00:50)	0,049518828	7 407 911
Луна	16.12.1889 (19:00:50)	0,049347222	7 382 239
Земля	13.04.1907 (01:43:25)	0,027908926	4 175 116
Луна	15.04.1907 (15:54:19)	0,027543488	4 120 447
Земля	14.04.1949 (10:10:49)	0,027929987	4 178 267
Луна	14.04.1949 (23:34:21)	0,027789767	4 157 290
Земля	14.04.1990 (21:11:27)	0,032935860	4 927 134
Луна	15.04.1990 (06:35:11)	0,031328050	4 686 610
Земля	14.04.1998 (18:40:32)	0,024386532	3 648 173
Луна	15.04.1998 (01:40:31)	0,023696662	3 544 970
Земля	13.04.2029 (21:46:19)	0,000255231	38 182
Луна	14.04.2029 (14:29:48)	0,000638076	95 455
Земля	15.09.2059 (13:15:54)	0,039703123	5 939 503
Луна	15.09.2059 (13:15:54)	0,037671948	5 635 643
Земля	13.04.2095 (00:53:57)	0,026590425	3 977 871
Луна	13.04.2095 (03:26:01)	0,029060373	4 347 370
Луна	17.09.2103 (02:07:25)	0,037340415	5 586 047
Земля	17.09.2103 (16:25:18)	0,037145827	5 556 937
Земля	15.09.2125 (10:09:12)	0,022371950	3 346 796
Луна	15.09.2125 (14:25:30)	0,022450569	3 358 557
Земля	16.04.2139 (03:03:31)	0,018093516	2 706 752
Луна	16.04.2139 (03:03:31)	0,017101643	2 558 369
Земля	15.09.2147 (13:49:29)	0,025340379	3 790 867
Луна	15.09.2147 (23:29:19)	0,024026512	3 594 315
Луна	19.04.2177 (01:17:42)	0,028538811	4 269 345
Земля	19.04.2177 (18:37:25)	0,025896054	3 873 995
Луна	09.09.2222 (01:11:39)	0,043617491	6 525 084
Земля	13.09.2222 (01:32:05)	0,042108209	6 299 298
Луна	11.09.2297 (12:28:25)	0,041161126	6 157 617
Земля	12.09.2297 (01:00:31)	0,043328783	6 481 894
Земля	14.04.2304 (12:01:56)	0,048279658	7 222 534

вались начальные данные за 6 марта 2006 года, а в данной работе — за 10 апреля 2007 года). Для тесных сближений после 2029 года не совпадают даже годы сближений (в вышеупомянутой работе прогнозировались последующие сближения в 2037, 2059, 2066 и 2085 годах). Это указывает на важность проведения дополнительных наблюдений с целью более точного определения параметров его орбиты.

В табл. 2 для некоторых моментов времени, в том числе и для начального (10 апреля 2007 года),

Таким образом, в отсутствие тесных сближений численное интегрирование осуществлялось с постоянным шагом $h_0 = 0,2$ дня. После возникновения в процессе вычислений на определённом шаге у исследуемого астероида максимального ускорения a , больше критического a_0 , сообщаемого одним из других тел, за исключением Солнца, производилось плавное уменьшение величины шага h , согласно второму условию формулы (6), до тех пор, пока не прекращался рост ускорения a . После этого величина шага h вновь плавно увеличивалась до значения h_0 при уменьшении ускорения a до величины a_0 . Затем численное интегрирование вновь продолжалось с постоянным шагом h_0 .

В результате вычислений на интервале времени с 1707 по 2307 гг обнаружено 95 сближений астероида 99942 Аporhis с другими небесными телами на расстояние менее 0,1 а. е. (40 сближений с Землёй, столько же с Луной и 15 сближений с Венерой).

В табл. 1 приведены сближения астероида 99942 Аporhis на расстояние менее 0,05 а. е. на исследуемом интервале времени. Расстояния между центрами небесных тел в моменты сближений представлены в километрах и астрономических единицах (1 а. е. = 149 597 870 км).

Из табл. 1 видно, что наиболее тесное сближение данного астероида с Землёй произойдёт 13 апреля 2029 года в 21:46 по всемирному времени на геоцентрическое расстояние 38 182 км, что хорошо согласуется с результатами, полученными при численном интегрировании методом Адамса—Мултона с постоянным шагом. Расхождение для минимального геоцентрического расстояния в момент сближения в 2029 году составляет лишь 436 км [8]. Однако по остальным сближениям наблюдаются расхождения в связи с тем, что в данной работе использовались уточненные начальные данные астероида (например, в работе [8] использо-

приведены элементы орбиты астероида 99942 Apophis: средняя аномалия M , большая полуось a , эксцентриситет e , аргумент перигелия ω , долгота восходящего узла Ω , наклон орбиты i . Величины M , ω , Ω , i представлены в градусах; a — в астрономических единицах; e — безразмерная величина. Таким образом, табл. 2 показывает эволюцию орбиты данного астероида.

Таблица 2

Эволюция орбиты астероида 99942 Apophis на интервале времени с 1707 по 2307 гг.

Дата	M	a	e	ω	Ω	i
13.03.1707 (22:24:49)	0,7052428	0,9303491	0,1908806	113,76626	215,97118	2,7094444
24.04.1730 (10:39:48)	270,36645	0,9285462	0,1916905	114,90983	215,21158	2,7443539
03.04.1747 (01:02:39)	247,16269	0,9283718	0,1920085	115,21296	214,86554	2,7485547
06.12.1762 (20:57:38)	87,297230	0,9271583	0,1924704	116,13430	214,30240	2,7604792
03.04.1772 (23:14:03)	248,84071	0,9267927	0,1927272	116,84214	213,52877	2,7473274
29.03.1813 (15:55:02)	238,50617	0,9268410	0,1928373	118,38164	211,97527	2,7682214
10.12.1829 (08:28:52)	91,973569	0,9310846	0,1903542	118,03481	211,12214	2,9003817
29.03.1866 (22:41:06)	240,48531	0,9309129	0,1902411	119,03456	209,65726	2,9114522
18.12.1889 (23:12:26)	99,030972	0,9259617	0,1903232	121,90513	208,13457	3,2987401
27.04.1907 (07:26:50)	266,88872	0,9275130	0,1898123	122,07641	207,52442	3,3104324
25.04.1949 (19:14:29)	269,03284	0,9257476	0,1904755	123,65199	206,20274	3,3191705
24.04.1990 (23:05:49)	267,78192	0,9249740	0,1909312	125,04736	204,92974	3,3298152
26.04.1998 (14:23:59)	268,27349	0,9225507	0,1915836	126,03528	204,63106	3,3390705
10.04.2007 (00:00:00)	307,36308	0,9222614	0,1910594	126,43178	204,41302	3,3372298
30.03.2029 (00:00:00)	235,58632	0,9222135	0,1914259	126,76267	203,79912	3,3509423
27.04.2029 (19:11:09)	319,85587	1,1027182	0,1891611	71,651826	203,51862	2,2333121
23.09.2059 (08:07:15)	60,920001	1,1026320	0,1891150	72,646429	202,91239	2,2484335
24.04.2095 (06:11:32)	316,45195	1,1012634	0,1888249	73,842023	202,40403	2,2591452
25.09.2103 (11:33:53)	60,896085	1,1022857	0,1890859	74,538690	202,04407	2,2727247
27.09.2125 (09:45:07)	63,723635	1,1041030	0,1893357	75,922989	200,92921	2,3298124
28.04.2139 (17:05:59)	317,42992	1,1003635	0,1883698	76,999010	200,71314	2,3248126
28.09.2147 (12:55:02)	65,088355	1,0988253	0,1878057	77,431890	199,89702	2,3707469
03.05.2177 (20:55:35)	320,69683	1,1012606	0,1884943	77,206474	199,52969	2,3640533
23.09.2222 (02:18:34)	61,228355	1,0995044	0,1880765	77,774488	198,65432	2,3845573
19.09.2297 (23:18:58)	58,958840	1,1007003	0,1884818	78,349460	197,44374	2,4083746
17.04.2304 (15:40:14)	309,01859	1,0995020	0,1881050	78,606724	197,36090	2,4131980
08.05.2307 (01:16:14)	183,60927	1,0987260	0,1876366	78,728017	197,31846	2,4115664

Из табл. 2 видно, что наиболее значительные изменения в элементах орбиты астероида 99942 Apophis произойдут в результате тесного сближения 13 апреля 2029 года. Например, значение большой полуоси a изменится от 0,9222 а.е. до 1,1027 а.е., то есть данное малое тело перейдёт из группы астероидов Атона в группу Аполлона. Остальные сближения не приводят к столь значительным изменениям элементов его орбиты.

В заключение следует отметить, что при абсолютной звёздной величине $H = 19,2$ размеры астероида 99942 Apophis составляют примерно 350–400 метров, то есть в случае столкновения он может представлять серьёзную угрозу для жизни на Земле. Следовательно, необходимо продолжать исследования данного астероида, осуществлять расчёт его орбиты с помощью различных методов, проводить сопоставление полученных результатов для определения степени их достоверности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по образованию (проект № РНП.2.1.1.1689)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Everhart, E. Implicit single methods for integrating orbits [Text] / E. Everhart // Celestial mechanics, 1974. — No. 10. — P. 35–55.
2. Холл, Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / Дж. Холл, Дж. Уатт. — М.: Мир, 1979. — 312 с.
3. Абрамов, В. В. Применение методов Адамса к решению уравнений движения больших планет, Луны и Солнца [Текст] / В. В. Абрамов / Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. Третьей Всерос. научн. конф. — Самара: СамГТУ, 2006. — Ч. 3. — С. 13–19. — ISBN 5-7964-0802-X.
4. Абрамов, В. В. Совместное использование методов Адамса и Эверхарта для решения уравнений движения небесных

- тел [Текст] / В. В. Абрамов // СамДиф-2007: конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения», г. Самара, 29 января – 2 февраля 2007 г. Тезисы докладов. — Самара: «Универс групп», 2007. — С. 16–17.
5. Абрамов, В. В. Исследование сходимости решения при моделировании тесных сближений небесных тел с помощью метода Адамса" — Мултона [Текст] / В. В. Абрамов // Актуальные проблемы современной науки: Труды 3-го Международного форума (8-й Междунар. конф. молодых учёных и студентов). Естественные науки. Часть 3: Механика. Машиностроение. — Самара: СамГТУ, 2007. — С. 6–14.
 6. Newhall, X. X. DE 102: a numerically integrated ephemeris of the Moon and planets spanning forty-four centuries [Text] / X. X. Newhall, E. M. Standish, Jr. and J. G. Williams // Astron. Astrophys. — 1983. — No. 125. — P. 150–167.
 7. Заусаев, А. Ф. Каталог орбитальной эволюции короткопериодических комет с 1900 по 2100 гг. [Текст] / А. Ф. Заусаев, А. А. Заусаев — М.: Машиностроение-1, 2005. — 346 с.
 8. Абрамов, В. В. Математическое моделирование движения малых тел Солнечной системы на основе методов Адамса [Текст] / В. В. Абрамов // Вестн. Сам. госуд. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. — 2006. — № 43. — С. 192–194. — ISBN 5-7964-0877-1.

Самарский государственный технический университет, г. Самара
vva85@mail.ru

Поступила 07.12.2007

V. V. Abramov

MATHEMATICAL MODELING OF MOTION OF THE ASTEROID 99942 APOPHIS ON THE BASIS OF ADAMS METHODS WITH A VARIABLE STEP SIZE

The choice of Adams methods with divided differences has been validated for solving of the equations of motion of small bodies of the Solar system. The numerical integration with a variable step size of differential equations of motion of the asteroid 99942 Apophis has been carried out with the help of these methods. The moments of closest approaches to major planets and the Moon by this minor planet has been determined. The evolution of its orbit has been investigated on 600 years time interval.

Samara State Technical University, Samara, Russia
vva85@mail.ru

Received 07.12.2007