Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Вирченко, Об обобщенной гипергеометрической функции Гаусса, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 1(), 154–156

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu589>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 16:06:15

Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.581

Н. А. Вирченко

ОБ ОБОБЩЁННОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ГАУССА

Рассмотрена (τ, β) -гипергеометрическая функция Гаусса, исследованы её основные свойства, даны некоторые применения.

Среди специальных функций гипергеометрические функции играют важную роль как в теории, так и в применении при решении разнообразных задач прикладной математики, физики и т. д.

В XX в. значительно усиливается исследование и изучение обобщённых гипергеометрических функций, в частности, обобщений по Райту [1]. Следует отметить, что отдельные случаи обобщённых гипергеометрических функций имеют большое значение в теории вероятностей и математической статистики, теории кодирования, в квантовой механике, астрофизике, биомедицине и других научных дисциплинах.

1. Введём (τ, β) -обобщённую (по Райту) гипергеометрическую функцию Гаусса в виде:

$${}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} {}_2\Psi_1 \left[\begin{matrix} (a, 1), (c, \tau); \\ (c, \beta); \end{matrix} \middle| zt^\tau \right] dt, \quad (1)$$

где $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$, $\operatorname{Re} a > 0$; $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$; $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\tau - \beta \leq 1$; Γ — классическая Гамма-функция [2], ${}_2\Psi_1$ — функция Фокса–Райта [3]. Если $\beta = \tau$ в (1), то получим функцию ${}_2R_1^{\tau}(z)$ [4]; при $\tau = \beta = 1$ имеем классическую гипергеометрическую функцию Гаусса [2].

Изучим основные свойства функции ${}_2F_1^{\tau, \beta}$. Формулу (1) можно рассматривать как аналог формулы Эйлера для ${}_2F_1(a, b; c; z)$ [2].

ЛЕММА 1. При условиях существования функции ${}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z)$ справедливы следующие функциональные соотношения:

$$(b - a\tau) {}_2F_1^{\tau, \beta} = b {}_2F_1^{\tau, \beta}(b + 1) - a\tau {}_2F_1^{\tau, \beta}(a + 1), \quad (2)$$

$$\Gamma(b)\Gamma(c + \beta) {}_2F_1^{\tau, \beta} = \Gamma(b)\Gamma(c + \beta) {}_2F_1^{\tau, \beta}(a + 1) - z\Gamma(c)\Gamma(b + \tau) {}_2F_1^{\tau, \beta}(a + 1, b + \tau; c + \beta; z), \quad (3)$$

$$(c + a\beta - 1) {}_2F_1^{\tau, \beta} = (c - 1) {}_2F_1^{\tau, \beta} - a\beta {}_2F_1^{\tau, \beta}(a + 1), \quad (4)$$

где ${}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z) = {}_2F_1^{\tau, \beta}$, ${}_2F_1^{\tau, \beta}(a + 1, b; c; z) = {}_2F_1^{\tau, \beta}(a + 1)$, ${}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b + 1; c; z) = {}_2F_1^{\tau, \beta}(b + 1)$.

Доказательство соотношений (2)–(4) выполняется непосредственно представлением функции ${}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z)$ в виде ряда и использованием формулы (1).

Аналогично можно получить много обобщённых соотношений вида (28)–(45) из [2, 2.9].

ЛЕММА 2. Для (τ, β) -обобщённой гипергеометрической функции Гаусса имеют место следующие дифференциальные формулы:

$$\frac{d}{dz} {}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z) = a \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(b + \tau)}{\Gamma(c + \beta)} {}_2F_1^{\tau, \beta}(a + 1, b + \tau; c + \beta; z), \quad (5)$$

$$\frac{d^n}{dz^n} {}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a + n)\Gamma(b + \tau n)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c + \beta n)} {}_2F_1^{\tau, \beta}(a + n, b + \tau n; c + \beta n; z), \quad (6)$$

$$\frac{d^n}{dz^n} \left[z^{a+n-1} {}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z) \right] = \frac{\Gamma(a + n)}{\Gamma(a)} z^{n-1} {}_2F_1^{\tau, \beta}(a + n, b; c; z). \quad (7)$$

Доказательство формулы (5) выполняется непосредственной проверкой. А формулы (6), (7) легко доказываются методом математической индукции.

ЛЕММА 3 (ОБОБЩЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ Г. БЕЙТМЕНА [2, 2.4(2)]). При условиях: $\operatorname{Re} c > 0$, $z \neq 1$, $\arg(1 - z) < \pi$; $\{\tau, \beta\} \subset \mathbb{R}$, $\operatorname{Re} \tau > 0$, $\operatorname{Re} \beta > 0$, $\operatorname{Re} \delta > 0$ справедлива формула:

$${}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c + \delta; z) = \frac{\Gamma(c + \delta)}{\Gamma(c)\Gamma(\delta)} \int_0^1 t^{c-1}(1-t)^{\delta-1} {}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; zt^\beta) dt.$$

Доказательство. Разложим функцию ${}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; zt^\beta)$ в ряд, почленно проинтегрируем и получим:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^{c-1}(1-t)^{\delta-1}}{\Gamma(c)\Gamma(\delta)} {}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; zt^\beta) dt = \\ = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(\delta)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(a+n) \frac{\Gamma(b+\tau n)}{\Gamma(c+\beta n)} \cdot \frac{z^n}{n!} \int_0^1 t^{c+\beta n-1}(1-t)^{\delta-1} dt = \\ = \frac{1}{\Gamma(c+\delta)} {}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c + \delta; z). \end{aligned}$$

2. Функцию ${}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z)$ можно использовать для вычисления несобственных интегралов, например, интегралов вида (5)–(15) из [2, 2.12] и некоторых других.

Применим функцию ${}_2F_1^{\tau, \beta}$ для получения новых обобщений Гамма-функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть a, b, c, p — комплексные параметры; $\{\tau, \beta\} \subset \mathbb{R}$, $\tau < 0$, $\beta > 0$, $\operatorname{Re} u > 0$, $\operatorname{Re} p > 0$, $|\arg \nu| < \pi$, $c \neq 0, -1, -2, \dots$. Выражение

$$\Gamma \left(\begin{matrix} a, b; c; \\ u, \nu, \end{matrix} \middle| p, \tau, \beta \right) = \nu^{-a} \int_0^\infty t^{u-1} e^{-pt} {}_2F_1^{\tau, \beta} \left(a, b; c; -\frac{t}{\nu} \right) dt$$

будем называть *обобщённой Гамма-функцией*.

Частные производные для $\Gamma \left(\begin{matrix} a, b; c; \\ u, \nu, \end{matrix} \middle| p, \tau, \beta \right)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n \Gamma}{\partial u^n} \left(\begin{matrix} a, b; c; \\ u, \nu, \end{matrix} \middle| p, \tau, \beta \right) &= \nu^{-a} \int_0^\infty t^{u-1} e^{-pt} (\ln t)^n {}_2F_1^{\tau, \beta} \left(a, b; c; -\frac{t}{\nu} \right) dt, \\ \frac{\partial^n \Gamma}{\partial \nu^n} \left(\begin{matrix} a, b; c; \\ u, \nu, \end{matrix} \middle| p, \tau, \beta \right) &= (-1)^n \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \Gamma \left(\begin{matrix} a+n, b; c; \\ u, \nu, \end{matrix} \middle| p, \tau, \beta \right). \end{aligned}$$

ЛЕММА 4. Если a, b, c, p — комплексные параметры, $c \neq 0$, $\operatorname{Re} p > 0$, $\{\tau, \beta\} \subset \mathbb{R}$, $\tau > 0$, $\beta > 0$, то выполняется соотношение

$$\begin{aligned} \Gamma \left(\begin{matrix} a, b; c; \\ u, \nu, \end{matrix} \middle| p, \tau, \beta \right) &= pu^{-1} \Gamma \left(\begin{matrix} a, b; c; \\ u+1, \nu, \end{matrix} \middle| p, \tau, \beta \right) + \\ &+ au^{-1} \frac{\Gamma(c)\Gamma(b+\tau)}{\Gamma(b)\Gamma(c+\beta)} \Gamma \left(\begin{matrix} a+1, b+\tau; c+\beta; \\ u+1, \nu, \end{matrix} \middle| p, \tau, \beta \right). \end{aligned}$$

Используя соотношения (2)–(4) и другие подобные соотношения между ${}_2F_1^{\tau, \beta}(a, b; c; z)$ и смежными функциями, можно получить много новых соотношений для $\Gamma \left(\begin{matrix} a, b; c; \\ u, \nu, \end{matrix} \middle| p, \tau, \beta \right)$. Например, формула (2) даёт

$$(b - a\tau) \Gamma \left(\begin{matrix} a, b; c; \\ u, \nu, \end{matrix} \middle| p, \tau, \beta \right) = b \Gamma \left(\begin{matrix} a, b+1; c; \\ u, \nu, \end{matrix} \middle| p, \tau, \beta \right) = a\tau \nu \Gamma \left(\begin{matrix} a+1, b; c; \\ u, \nu, \end{matrix} \middle| p, \tau, \beta \right).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Wright, E. M.* On the coefficient of power series having exponential singularities [Text] / E. M. Wright // J. London Math. Soc. — 1933. — Vol. 8. — P. 71–79.
2. *Бейтмен, Г.* Высшие трансцендентные функции [Текст] / Г. Бейтмен, А. Эрдейи; Пер. с англ. — М.: Наука, 1965. — Т. 1: Гипергеометрическая функция, функции Лежандра. — 296 с.
3. *Kilbas, A. A.* H-Transforms. Theory and Applications [Text] / A. A. Kilbas and M. Saigo. — Charman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004. — 390 p.
4. *Virchenko, N.* On some generalization of gamma functions [Text] // Доп. НАН України. — 1999. — No. 10. — P. 39–44.

Національний технічний університет України
«КПІ», г. Київ, Україна

Поступила 08.11.2007
В окончательном варианте
06.02.2008

N. A. Virchenko

ON THE GENERALIZED GAUSS HYPERGEOMETRIC FUNCTION

In this work the (τ, β) -hypergeometric Gauss function is considered, the basic properties of this function are investigated, some applications are given.

National Technical University of Ukraine «KPI», Kyiv, Ukraine

Received 08.11.2007