Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Богатырев, Циклы-утки в системе Лъенарда, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2001, выпуск 12, 36–39

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu59>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 12:33:45

ЦИКЛЫ-УТКИ В СИСТЕМЕ ЛЬЕНАРДА

Рассматривается возможность применения теории Мельникова о предельных циклах слабо-возмущенных двумерных дифференциальных систем к изучению циклов-уток в сингулярно-возмущенной системе Льенарда. Находится асимптотическое разложение первого порядка значения параметра, при котором в системе Льенарда существует цикл-утка.

Работа посвящена изучению циклов-уток в двумерной сингулярно-возмущенной системе

$$\epsilon x' = y - f(x), \quad y' = a - g(x, y), \quad (1)$$

где $\epsilon > 0$ - малый параметр, a - параметр, а $f(x)$ и $g(x, y)$ - аналитические функции.

Если функция $g(x, y)$ зависит только от переменной x , то систему (1) можно переписать в виде дифференциального уравнения второго порядка

$$\epsilon x'' + f'(x)x' + g(x) - a = 0, \quad (2)$$

известного под названием сингулярно-возмущенного уравнения Льенарда [1]. Поэтому систему (1) будем называть системой Льенарда.

График функции $y = f(x)$ называется медленной кривой системы (1). Если медленная кривая имеет S -образную форму, то в системе (1) при некоторых значениях параметра a могут появиться релаксационные циклы. При $\epsilon \rightarrow 0$ релаксационные циклы стремятся к кривым, состоящим из участков быстрого движения и устойчивых дуг медленной кривой. Но в некоторых случаях система (1) может иметь также решения, фазовые кривые которых при $\epsilon \rightarrow 0$ стремятся к кривым, содержащим неустойчивые дуги медленной кривой. Такие решения называются решениями-утками [2]. Если решение-утка является предельным циклом, то это решение называется циклом-уткой.

Известно [3], что если медленная кривая имеет точку складки, через которую с ненулевой скоростью проходит особая точка системы (1) при прохождении параметром a некоторого значения a_0 , то при некотором значении $a = a_0 + O(\epsilon)$ система (1) будет иметь траекторию-утку. Для системы (1) эти условия выполняются в том случае, когда функции $f(x)$ и $g(x, y)$ удовлетворяют условиям

$$\exists x_0: f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) \neq 0, \quad g'_x(x_0, y_0) \neq 0, \quad (3)$$

где $y_0 = f(x_0)$. В дальнейшем мы будем считать, что эти условия выполнены.

Тогда замена переменных

$$x = x_0 + x, \quad y = y_0 + h, \quad a = g(x_0, y_0) + b \quad (4)$$

приведет систему (1) к виду

$$\epsilon x' = h - p(x), \quad h' = b - q(x, h), \quad (5)$$

где

$$p(x) = f(x_0 + x) - f(x_0), \quad q(x, h) = g(x_0 + x, y_0 + h) - g(x_0, y_0). \quad (6)$$

Из (3) и (6) следует, что

$$p(0) = 0, \quad p'(0) = 0, \quad p''(0) \neq 0, \quad q(0, 0) = 0, \quad q'_x(0, 0) \neq 0. \quad (7)$$

Из (7) следует, что для функций $p(x)$ и $q(x, h)$ имеют место следующие разложения:

$$p(x) = \sum_{k=2}^{\infty} p_k x^k, \quad q(x, h) = \sum_{k+n \geq 1} q_{kn} x^k h^n, \quad (8)$$

причем $p_2 \neq 0$ и $q_{10} \neq 0$. Таким образом, систему (5) можно переписать в виде

$$\epsilon x' = h - p_2 x^2 - \sum_{k=3}^{\infty} p_k x^k, \quad h' = b - q_{10} x - q_{01} h - \sum_{k+n \geq 2} q_{kn} x^k h^n. \quad (9)$$

Доказательство существования циклов-уток в системе (1) может быть получено с помощью, так называемой, теории Мельникова. После опубликования работы [4] зарубежные математики называют теорией Мельникова метод исследования дифференциальных систем, близких к

гамильтоново-вым системам, с помощью техники регулярных возмущений. Обычно предполагается, что гамильтонова система имеет семейство специальных решений, например, периодических орбит. Тогда регулярное малое возмущение гамильтоновой системы может привести к разрушению всего семейства специальных решений. Но при этом одно, или несколько специальных решений могут выжить. Под теорией Мельникова понимают метод нахождения этого выжившего решения. Специальное решение невозмущенной системы называют порождающим, если оно выживает в возмущенной системе.

Существует большое количество версий теории Мельникова. В настоящей работе будем пользоваться вариантом теории Мельникова, полученным в работе [5]. В этой работе изучались предельные циклы системы

$$z' = f(z) + e g(z, e), \quad (10)$$

где $e > 0$ - малый параметр, $z \in R^2$, а $f(z)$ и $g(z, e)$ - аналитические функции. Предполагалось, что система (10) при $e = 0$ имеет однопараметрическое семейство периодических орбит $\Gamma_h : g_h(t)$, $h \in (0, \infty)$ периода T_h . Было показано, что порождающую периодическую орбиту можно найти с помощью, так называемой, функции Мельникова.

О п р е д е л е н и е 1. [5] *Функцией Мельникова возмущенной системы (10) вдоль цикла $\Gamma_h : g_h(t)$ периода T_h соответствующей невозмущенной системы называется функция*

$$M(h) = \int_0^{T_h} e^{-\int_0^t (\nabla, f(g_h(s))) ds} (f \wedge g)(g_h(t), 0) dt, \quad (11)$$

где произведение $x \wedge y$ векторов $x, y \in R^2$ определяется равенством $x \wedge y = x_1 y_2 - y_1 x_2$.

Т е о р е м а 1. [5] *Если существует такое $h_0 \in (0, \infty)$, что*

$$M(h_0) = 0, \quad M'(h_0) \neq 0, \quad (12)$$

то для всех достаточно малых $e \neq 0$ система (10) имеет единственный гиперболический предельный цикл в $O(e)$ -окрестности орбиты Γ_{h_0} . Если $M(h_0) \neq 0$, то для всех достаточно малых $e \neq 0$ система (10) не имеет циклов в $O(e)$ -окрестности орбиты

Отметим, что похожий результат (теорему о циклах слабо-возмущенных гамильтоновых систем) был намного раньше доказан Понтрягиным [6,7].

В настоящей работе будет показано, как с помощью теоремы 1 получить доказательство теоремы о существовании циклов-уток у системы (1). Кроме этого будет найдена аппроксимация первого порядка значения параметра a , при котором циклы-утки существуют. Отметим, что похожий подход для доказательства существования циклов-уток применялся в работах [8,9]. В [10] похожий подход был применен для нахождения первого члена разложения значения параметра, соответствующего циклу-утке в системе Ван-дер-Поля.

Прежде всего преобразуем систему (9) к виду (10). Это преобразование может быть выполнено с помощью нормирующей замены переменных

$$x = \sqrt{e}u, \quad h = ev, \quad t = \sqrt{e}t, \quad b = ed, \quad e = m^2. \quad (13)$$

В новых переменных система (9) примет вид

$$u' = v - p_2 u^2 - m p_3 u^3 + O(m^2), \quad v' = -q_{10}u + m(d - q_{01}v - q_{20}u^2) + O(m^2). \quad (14)$$

Система (14) является слабым возмущением системы

$$u' = v - p_2 u^2, \quad v' = -q_{10}u. \quad (15)$$

Систему (15) нетрудно проинтегрировать. Все фазовые траектории этой системы лежат на кривых, являющихся решениями семейства уравнений

$$\exp\left(-\frac{2p_2}{q_{10}}v\right) \left[u^2 - \frac{1}{p_2}v - \frac{q_{10}}{2p_2^2}\right] = h \equiv const. \quad (16)$$

Элементарный анализ уравнений (16) позволяет доказать следующий результат.

Л е м м а 1. *Если $q_{10} > 0$, то кривая (16) является замкнутой для всех $h \in (-q_{10}/2p_2^2, 0)$.*

Во всех остальных случаях кривая (16) не будет замкнутой ни для каких значений h .

Таким образом, при описанных в лемме 1 значениях параметра h (эти значения мы будем называть допустимыми) система (15) имеет однопараметрическое семейство периодических орбит $\Gamma_h : g_h(t)$, форма которых определяется уравнением (16). Поэтому для изучения

предельных циклов системы (14) можно применить теорему 1. Прежде всего найдем функцию Мельникова (11) для системы (14). С помощью несложных преобразований получим

$$M(h, d) = \int_{\Gamma_h} \exp\left(-\frac{2p_2}{q_{10}}v\right) \left[(d - q_{01}v - q_{20}u^2)du + p_3u^3dv \right] = \\ \frac{1}{q_{10}} \iint_{\Omega_h} \exp\left(-\frac{2p_2}{q_{10}}v\right) \left[(3p_3q_{10} - 2p_2q_{20})u^2 - 2p_2q_{01}v + (2p_2d + q_{10}q_{01}) \right] dudv, \quad (17)$$

где Ω_h является областью, ограниченной замкнутой кривой Γ_h . В рассматриваемом случае функция Мельникова зависит от двух параметров h и d .

Легко видеть, что для любого допустимого значения h уравнение $M(h, d) = 0$ имеет единственное решение относительно $d = d(h)$. Это означает, что каждая замкнутая кривая Γ_h будет порождающей орбитой системы (15) при некотором значении параметра d , то есть в некоторой ее $O(m)$ -окрестности будет лежать предельный цикл системы (14).

Каждому предельному циклу системы (14) соответствует через замену переменных (13) предельный цикл системы (9). Но не каждый из этих предельных циклов системы (9) будет ее циклом-уткой. Если через $R(h)$ обозначить размер замкнутой кривой (16), то размер соответствующего предельного цикла системы (9) будет равен $eR(h) + O(e^{3/2})$. Для того, чтобы этот предельный цикл был циклом-уткой системы (9) необходимо выполнение условия $R(h) \sim 1/e$.

Кривая Γ_h расположена симметричным образом относительно вертикальной оси Ov . Ее размер $R(h)$ можно охарактеризовать разностью ординат точек, в которых эта кривая пересекает ось Ov . Эта разность равна

$$R(h) = \frac{q_{10}}{2p_2} \left[W_0\left(\frac{2p_2^2}{eq_{10}}h\right) - W_{-1}\left(\frac{2p_2^2}{eq_{10}}h\right) \right], \quad (18)$$

где через W_0 и W_{-1} обозначены две вещественные ветви функции Ламберта W [11], которая определяется как функция, обратная к отображению $w \mapsto we^w$. Описание этой функции и ее свойств можно найти также в обзорной статье [12], помещенной в Share Library пакета аналитических вычислений Maple V.

Известно [12], что при $h \rightarrow 0$ имеют место следующие асимптотические разложения:

$$W_0(h) = h - h^2 + o(h^2), \quad W_{-1}(h) = \ln|h| - \ln|\ln|h| + o(\ln|\ln|h|).$$

Поэтому $R(h) \sim 1/e$ лишь для $h \sim \exp(-1/e)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 2. Для каждого допустимого и достаточно маленького значения параметра h ($h \sim \exp(-1/e)$) найдется такое значение $b = ed(h)$, где $d(h)$ является решением уравнения $M(h, d) = 0$, что в некоторой $O(e)$ -окрестности кривой

$$\exp\left(-\frac{2p_2}{eq_{10}}h\right) \left[x^2 - \frac{1}{p_2}h - e\frac{q_{10}}{2p_2^2} \right] = eh \quad (19)$$

будет лежать предельный цикл системы (9). Этот цикл будет циклом-уткой системы (9).

Теперь найдем первый член разложения решения $d(h)$ уравнения $M(h, d) = 0$. Для этого в двойном интеграле из формулы (17) сделаем замену переменных

$$u = (\sqrt{q_{10}}/p_2)x, \quad v = (q_{10}/p_2)y.$$

Тогда для функции $M(h, d)$ получим представление

$$M(h, d) = \frac{\sqrt{q_{10}}}{p_2^2} \iint_{\Omega_H} e^{-2y} \left[(3p_3q_{10} - 2p_2q_{20})\frac{q_{10}}{p_2^2}x^2 - (2q_{10}q_{01})y + (2p_2d + q_{10}q_{01}) \right] dx dy,$$

где Ω_H - область, ограниченная кривой $e^{-2y}(x^2 - y - 1/2) = H$, ($H = p^2h/q_{10}$). Отсюда имеем

$$M(h, d) = \frac{\sqrt{q_{10}}}{p_2^2} \left[(3p_3q_{10} - 2p_2q_{20})\frac{q_{10}}{p_2^2}I_2 - (2q_{10}q_{01})I_1 + (2p_2d + q_{10}q_{01})I_0 \right], \quad (20)$$

$$I_2 = \iint_{\Omega_H} x^2 e^{-2y} dx dy, \quad I_1 = \iint_{\Omega_H} y e^{-2y} dx dy, \quad I_0 = \iint_{\Omega_H} e^{-2y} dx dy.$$

Область Ω_H в плоскости переменных x и y является криволинейной трапецией, ограниченной слева и справа кривыми $x = \pm \sqrt{He^{2y} + y + 1/2}$, а снизу и сверху соответственно прямыми $y = -(1 + W_0(2H/e))/2$ и $y = -(1 + W_{-1}(2H/e))/2$. Это позволяет свести двойные интегралы I_0 , I_1 и I_2 к однократным интегралам и найти их асимптотические разложения при $H \rightarrow 0$:

$$I_0 = \frac{1}{4} e \sqrt{2p} + o(1), \quad I_1 = \frac{1}{16} e \sqrt{2p} + o(1), \quad I_2 = \frac{1}{16} e \sqrt{2p} + o(1).$$

Отсюда и из представления (20) функции $M(h, d)$ получим первый член асимптотического разложения решения $d(h)$ уравнения $M(h, d) = 0$ при $h \rightarrow 0$ вида

$$d(h) = -\frac{q_{10}}{8p_2^3} (3p_3 q_{10} - 2p_2 q_{20} + 2q_{01} p_2^2) + o(1). \quad (21)$$

Этот результат позволяет сформулировать следующую теорему об асимптотическом разложении значения параметра a , при котором в системе (1) имеется цикл-утка.

Т е о р е м а 3. Если система (1) удовлетворяет условиям (3) и, кроме этого $g'_x(x_0, y_0) > 0$, то найдется такое значение параметра a , при котором эта система будет иметь цикл-утку. Первые два члена асимптотического разложения этого значения параметра a при $e \rightarrow 0$ могут быть вычислены по формуле

$$a = g - e \frac{g'_x}{2f'^3} [f''' g'_x - 2f'' g''_{xx} + f''^2 g'_y] + O(e^2), \quad (22)$$

где значения функций f , g и их производных вычисляются в точке (x_0, y_0) .

В качестве примера рассмотрим систему Ван-дер-Поля

$$ex' = y - (x^3/3 - x), \quad y' = a - x. \quad (23)$$

Медленная кривая этой системы имеет две точки складки $(1, -2/3)$ и $(-1, 2/3)$. Для обеих точек выполнены условия теоремы 3. Таким образом, система (23) имеет два семейства циклов-уток, соответствующих этим точкам складки. С помощью формулы (22) для первой точки получим $a = 1 - e/8 + O(e^2)$, а для второй - $a = -1 + e/8 + O(e^2)$. Эти разложения совпадают с разложениями, полученными в [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Lins A., de Melo W., Pugh C. On Lienard's Equation. Lecture Notes in Mathematics. Vol.597. Springer-Verlag. New York, 1977. P. 335.
2. Звонкин А. К., Шубин М. А. Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 1984. Т.39. №2. С.77-127.
3. Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильясенко Ю. С., Шильников Л. П. Теория бифуркаций // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фунд. напр. 5: Динамические системы - 5. М.: ВИНТИ, 1986. С.5-219.
4. Мельников В. К. Об устойчивости центра для периодических по времени возмущений // Труды московского математического общества. 1963. Т.12. С.1-57.
5. Blows T. R., Perko L. M. Bifurcation of limit cycles from centers and separatrix cycles of planar analytic systems // SIAM Rev. 1994. V.36. № 3. P. 341.
6. Баутин Н.Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 420 с.
7. Арнольд В. И., Ильясенко Ю. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фунд. напр. 1: Динамические системы - 1. М.: ВИНТИ, 1985. С. 7-149.
8. Мищенко Е. Ф., Колесов А. Ю. Асимптотическая теория релаксационных колебаний // Труды МИАН. М.: МИАН. 1991. Т. 197. С. 3-84.
9. Мищенко Е. Ф., Колесов Ю. С., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущённых системах. М.: Наука. 1995. 330 с.
10. Freire E., Gamero E., Rodriguez-Luis A. J. First-order approximation for canard periodic orbits in a van der Pol electronic oscillator // Applied Mathematics Letters. 1999. V. 12. P.73-78.
11. Wright E. M. Solution of the equation $ze^z = a$. Proc. Roy. Soc. Edinburgh.(A). 1959. V.65. P.193-203.
12. Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G., Jeffrey D. J., Knuth D. E. On the Lambert W function // Share Library Maple V. P.1-32.