Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Зотеев, А. С. Овсиенко, Параметрическая идентификация специального уравнения Рикатти на основе стохастических разностных уравнений, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 1(), 171–174

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu595>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:31:12

Математическое моделирование

УДК 519.246

В. Е. Зотеев, А. С. Овсиенко

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РИКАТТИ НА ОСНОВЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается построение стохастических разностных уравнений, связывающих результаты наблюдений мгновенных значений динамических процессов, описываемых специальным уравнением Рикатти. На основе разностных уравнений предлагается эффективный метод параметрической идентификации систем, описываемых специальным уравнением Рикатти.

Уравнение Риккати

$$y'(t) = p(t)y^2(t) + q(t)y(t) + r(t),$$

где $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ — непрерывные в некотором интервале изменения t функции, широко используется в различных приложениях, например, при анализе решений линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\omega'' + p(t)\omega' + q(t)\omega = 0,$$

играя заметную роль в квантовой механике в связи с исследованием уравнения Шредингера [1].

Специальное уравнение Рикатти имеет вид

$$y' + ay^2 = bt^n,$$

где a , b и n — постоянные величины. Применение стохастических разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений мгновенных значений его решения, позволит обеспечить высокую точность оценивания параметров этого уравнения.

Рассмотрим решение специального уравнения Риккати для частного случая при $n = 0$:

$$y' + ay^2 = b. \quad (1)$$

В зависимости от знаков коэффициентов a и b это уравнение может иметь различные решения. Пусть $ab > 0$, то есть коэффициенты a и b одного знака. Тогда не трудно убедиться, что решение уравнения (1) имеет вид

$$\tilde{y}(t) = \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \frac{1 + ce^{-2t\text{sign}(a)\sqrt{ab}}}{1 - ce^{-2t\text{sign}(a)\sqrt{ab}}},$$

где c — произвольная постоянная. Обозначая $a_0 = \sqrt{\frac{b}{a}}$ и $\alpha = 2\text{sign}(a)\sqrt{ab}$, имеем

$$\tilde{y}(t) = a_0 \frac{1 + ce^{-\alpha t}}{1 - ce^{-\alpha t}}. \quad (2)$$

При различных знаках коэффициентов уравнения (1), т. е., когда $ab < 0$, можно показать, что решение специального уравнения Риккати имеет вид

$$\tilde{y}(t) = a_0 \text{tg}(\omega t + \varphi_0), \quad (3)$$

где $a_0 = \sqrt{-\frac{b}{a}}$, $\omega = \text{sign}(b)\sqrt{-ab}$, а φ_0 — произвольная постоянная.

Рассмотрим построение линейно параметрической дискретной модели процесса, описываемого специальным уравнением Риккати (1), в форме разностного уравнения, рекуррентно связывающего последовательные отсчеты функции (2). Полагая в выражении (2) $t = \tau k$, где τ — период равномерной дискретизации функции $\tilde{y}(t)$, получаем дискретную функцию $\tilde{y}_k = \tilde{y}(\tau k)$ вида

$$\tilde{y}_k = a_0 \frac{1 + ce^{-\alpha \tau k}}{1 - ce^{-\alpha \tau k}}, \quad k \in \{0\} \cup \mathbb{N}. \quad (4)$$

Полагая $k = k - 1$, из выражения (4) можно получить

$$(1 - ce^{-\alpha\tau\kappa}e^{\alpha\tau})\tilde{y}_{k-1} = a_0(1 + ce^{-\alpha\tau\kappa}e^{\alpha\tau}).$$

Отсюда имеем

$$ce^{-\alpha\tau\kappa} = \frac{\tilde{y}_{k-1} - a_0}{e^{\alpha\tau}(a_0 + \tilde{y}_{k-1})}.$$

Подставляя этот результат в (4), после простых алгебраических преобразований получаем рекуррентную формулу

$$\tilde{y}_k - \tilde{y}_{k-1} = \frac{1 - e^{\alpha\tau}}{a_0(1 + e^{\alpha\tau})}\tilde{y}_{k-1}\tilde{y}_k + \frac{a_0(e^{\alpha\tau} - 1)}{1 + e^{\alpha\tau}}$$

или разностное уравнение вида

$$\tilde{y}_k - \tilde{y}_{k-1} = \lambda_1\tilde{y}_{k-1}\tilde{y}_k + \lambda_2, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Коэффициенты в разностном уравнении (5) описываются следующими формулами:

$$\lambda_1 = \frac{1 - e^{\alpha\tau}}{a_0(1 + e^{\alpha\tau})}, \quad \lambda_2 = \frac{a_0(e^{\alpha\tau} - 1)}{1 + e^{\alpha\tau}}. \quad (6)$$

Очевидно, что при $a > 0$ и $b > 0$ имеем $\alpha > 0$, $e^{\alpha\tau} > 1$ и, следовательно, $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 > 0$. В противном случае, когда $a < 0$ и $b < 0$, имеем $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 < 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда коэффициенты дифференциального уравнения (1) имеют различные знаки (т.е. $ab < 0$). Аналогично, полагая в выражении (3) $t = \tau k$, получаем дискретную функцию

$$\tilde{y}_k = a_0 \operatorname{tg}(\omega\tau k + \varphi_0), \quad k \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \quad (7)$$

описывающую последовательность мгновенных значений $\tilde{y}_k$ решения (3) специального уравнения Риккати при различных знаках его коэффициентов. Тогда, полагая в (7) $k = k - 1$, из формулы

$$\tilde{y}_{k-1} = a_0 \operatorname{tg}(\omega\tau k - \omega\tau + \varphi_0) = a_0 \frac{\operatorname{tg}(\omega\tau k + \varphi_0) - \operatorname{tg} \omega\tau}{1 + \operatorname{tg}(\omega\tau k + \varphi_0) \operatorname{tg} \omega\tau}$$

выражаем

$$\operatorname{tg}(\omega\tau k + \varphi_0) = \frac{\tilde{y}_{k-1} + a_0 \operatorname{tg} \omega\tau}{a_0 - \tilde{y}_{k-1} \operatorname{tg} \omega\tau}.$$

Подставляя это выражение в (7), получаем

$$\tilde{y}_k = a_0 \frac{\tilde{y}_{k-1} + a_0 \operatorname{tg} \omega\tau}{a_0 - \tilde{y}_{k-1} \operatorname{tg} \omega\tau}.$$

Отсюда после простых преобразований получаем рекуррентную формулу разностного уравнения

$$\tilde{y}_k - \tilde{y}_{k-1} = \lambda_1\tilde{y}_k\tilde{y}_{k-1} + \lambda_2, \quad (8)$$

в которой коэффициенты описываются выражениями

$$\lambda_1 = \frac{\operatorname{tg} \omega\tau}{a_0}, \quad \lambda_2 = a_0 \operatorname{tg} \omega\tau. \quad (9)$$

Очевидно, что вне зависимости от знаков коэффициентов специального уравнения Риккати (1) линейно параметрические дискретные модели в форме разностных уравнений (5) и (8) имеют один и тот же вид. Однако коэффициенты разностных уравнений (5) и (8) выражаются через параметры уравнения (1) по-разному.

При обработке экспериментальных данных формируется выборка результатов наблюдений y_k ($k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, где N — объём выборки). Результаты наблюдений y_k содержат аддитивную

случайную помеху ε_k : $y_k = \tilde{y}_k + \varepsilon_k$, где $\tilde{y}_k$ — точные значения дискретной функции. С учётом случайной помехи в результатах наблюдений линейно параметрическую дискретную модель можно представить в форме стохастических разностных уравнений

$$\begin{cases} y_0 &= \lambda_3 + \varepsilon_0, \\ y_k - y_{k-1} &= \lambda_1 y_k y_{k-1} + \lambda_2 + \eta_k, \\ \eta_k &= -(1 + \lambda_1 y_k) \varepsilon_{k-1} + (1 - \lambda_1 y_{k-1}) \varepsilon_k + \lambda_1 \varepsilon_k \varepsilon_{k-1}, \end{cases}$$

где $\lambda_3 = \tilde{y}_0$, $k = 1, 2, \dots, N-1$. Пренебрегая в выражении для η_k слагаемыми второго порядка малости относительно ε_k , получаем систему

$$\begin{cases} y_0 &= \lambda_3 + \varepsilon_0, \\ y_k - y_{k-1} &= \lambda_1 y_k y_{k-1} + \lambda_2 + \eta_k, \\ \eta_k &= -(1 + \lambda_1 y_k) \varepsilon_{k-1} + (1 - \lambda_1 y_{k-1}) \varepsilon_k. \end{cases} \quad (10)$$

Линейно параметрическая дискретная модель в форме стохастических разностных уравнений (10) в матричной форме имеет вид

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_{\lambda,y}\varepsilon, \end{cases} \quad (11)$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ — вектор неизвестных коэффициентов линейно параметрической дискретной модели; $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1})^T$ — вектор случайной помехи в результатах наблюдения; $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{N-1})^T$ — вектор эквивалентного возмущения в стохастическом разностном уравнении; $b = (y_0, y_1 - y_0, y_2 - y_1, \dots, y_{N-1} - y_{N-2})^T$ — N -мерный вектор правой части; F — матрица регрессоров размера $N \times 3$, имеющая вид

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ y_0 y_1 & 1 & 0 \\ y_1 y_2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ y_{N-2} y_{N-1} & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица $P_{\lambda,y}$ размера $N \times N$ в стохастическом разностном уравнении эквивалентного возмущения η имеет вид

$$P_{\lambda,y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ -(1 + \lambda_1 y_1) & 1 - \lambda_1 y_0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & -(1 + \lambda_1 y_2) & 1 - \lambda_1 y_1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1 + \lambda_1 y_3) & 1 - \lambda_1 y_2 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -(1 + \lambda_1 y_{N-1}) & 1 - \lambda_1 y_{N-2} \end{bmatrix}.$$

Построенная линейно параметрическая дискретная модель в форме обобщённой регрессионной модели (11) может быть эффективно использована в задаче параметрической идентификации решений специального уравнения Рикати (1). В основе помехоустойчивого метода определения параметров процессов, описываемых функциями (4) или (7), лежит итерационная процедура среднеквадратичного оценивания коэффициентов λ_j стохастического разностного уравнения [2]. В соответствии с алгоритмом этой процедуры минимизируется функционал:

$$\|\varepsilon\|^2 = \|P_{\lambda,y}^{-1}b - P_{\lambda,y}^{-1}F\lambda\|^2 \longrightarrow \min.$$

Для этого формируется последовательность приближенных решений

$$\hat{\lambda}^{(i)} = \left(F^T \Omega_{\hat{\lambda}^{(i-1)}}^{-1} F \right)^{-1} F^T \Omega_{\hat{\lambda}^{(i-1)}}^{-1} b, \quad i \in \mathbb{N},$$

где $\Omega_{\hat{\lambda}^{(i-1)}}^{-1} = \left(P_{\hat{\lambda}^{(i-1)},y} P_{\hat{\lambda}^{(i-1)},y}^T \right)^{-1}$, $\hat{\lambda}^{(0)} = (F^T F)^{-1} F^T b$, сходящаяся к решению λ матричного уравнения

$$F^T (P_{\lambda,y} P_{\lambda,y}^T)^{-1} F \lambda = F^T (P_{\lambda,y} P_{\lambda,y}^T)^{-1} b,$$

на котором указанный функционал достигает своего минимума. По найденным оценкам $\hat{\lambda}_j$ ($j = 1, 2, 3$) параметры функции (2) вычисляются по формулам

$$\hat{a}_0 = \sqrt{\frac{-\hat{\lambda}_2}{\hat{\lambda}_1}}, \quad \hat{\alpha} = \frac{1}{\tau} \operatorname{sign}(\hat{\lambda}_2) \ln \frac{1 + \sqrt{-\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2}}{1 - \sqrt{-\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2}}, \quad \hat{c} = \frac{\hat{\lambda}_3 - \hat{a}_0}{\hat{\lambda}_3 + \hat{a}_0},$$

а параметры функции (3) — по формулам

$$\hat{a}_0 = \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_2}{\hat{\lambda}_1}}, \quad \hat{\omega} = \frac{1}{\tau} \operatorname{sign}(\hat{\lambda}_1) \operatorname{arctg} \sqrt{\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2}, \quad \hat{\varphi}_0 = \operatorname{arctg} \frac{\hat{\lambda}_3}{\hat{a}_0}.$$

Оценки коэффициентов специального уравнения Риккати (1) могут быть вычислены по формулам $\hat{a} = \frac{\hat{\alpha}}{2\hat{a}_0}$ и $\hat{b} = \frac{\hat{\alpha}\hat{a}_0}{2}$ для случая одинаковых знаков этих коэффициентов или по формулам $\hat{a} = -\frac{\hat{\omega}}{\hat{a}_0}$ и $\hat{b} = \hat{\omega}\hat{a}_0$ в случае различных знаков.

Очевидно, что на этапе вычисления коэффициентов стохастического разностного уравнения можно идентифицировать тип решения специального уравнения Риккати. При $\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 < 0$ коэффициенты дифференциального уравнения (1) имеют одинаковые знаки, причём при $\hat{\lambda}_1 > 0$ коэффициенты имеют знаки $a < 0$ и $b < 0$, а при $\hat{\lambda}_1 < 0$ — $a > 0$ и $b > 0$. При $\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 > 0$, наоборот, коэффициенты уравнения (1) имеют противоположные знаки, а решение специального уравнения Риккати описывается функцией (3).

Таким образом, построена линейно параметрическая дискретная модель, описывающая в форме стохастического разностного уравнения результаты наблюдений мгновенных значений решений специального уравнения Риккати. Установленные соотношения между параметрами решения дифференциального уравнения и коэффициентами стохастического разностного уравнения позволяют свести задачу параметрической идентификации систем, описываемых специальным уравнением Риккати, к среднеквадратичному оцениванию коэффициентов линейно параметрической модели, что обеспечивает высокую точность идентификации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тихонов, А. Н. Дифференциальные уравнения [Текст] / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. — М.: Наука, 1998. — 332 с.
2. Зотеев, В. Е. Помехозащищенный метод определения параметров линейной динамической системы на основе импульсной характеристики [Текст] / В. Е. Зотеев // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. — 2007. — № 1 (14). — С. 138–142. — ISSN 1991–8615.

Самарский государственный технический университет, г. Самара
zoteev@pm.samgtu.ru

Поступила 3.11.2007

V. E. Zoteev, A. S. Ovsienko

PARAMETRICAL IDENTIFICATION OF THE SPECIAL EQUATION RICATTI ON THE BASIS OF STOCHASTIC DIFFERENCE EQUATIONS

Construction stochastic difference equations connecting results of supervision of instant values of dynamic processes described by special equation Ricatti, is considered. On the basis difference equations the effective method of parametrical identification of the systems described by special equation Ricatti is offered.

Samara State Technical University, Russia
zoteev@pm.samgtu.ru

Received 3.11.2007