Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Глущенко, Прогнозирование эффективных параметров многокомпонентных вязкопластических микронеоднородных сред, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1998, выпуск 6, 40–46

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu6>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:27:33

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

Рассматривается применение метода сингулярного приближения теории случайных полей для описания макроскопических свойств многокомпонентных изотропных вязкопластических композиционных материалов.

Математическое моделирование макроскопических реологических законов деформирования сред со случайными неоднородностями позволяет оценивать предельные нагрузки и несущую способность элементов конструкций, давать достоверные прогнозы параметров течения суспензий, эмульгированных жидкостей и других дисперсных систем.

В работе рассматривается применение гипотезы сингулярного приближения теории случайных полей для моделирования эффективных параметров течения многокомпонентных вязкопластических сред типа “взаимопроникающие каркасы” и “матрица-включения” с общим нелинейным механизмом вязкости.

1. Пусть несжимаемая микронеоднородная среда, образованная из n компонентов, соединенных между собой с идеальной адгезией, занимает объем V , ограниченный поверхностью S , подчиняется нелинейному вязкопластическому закону течения

$$s_{ij} = k_s \frac{e_{ij}}{\sqrt{e_{kl} e_{kl}}} + \mu_s \left(\sqrt{e_{kl}(\mathbf{r}) e_{kl}(\mathbf{r})} \right) e_{ij}, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Здесь k_s , $\mu_s \left(\sqrt{e_{kl}(\mathbf{r}) e_{kl}(\mathbf{r})} \right)$ - пределы текучести и коэффициенты нелинейной вязкости фаз; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{pp}$; σ_{ij} - тензор напряжений; e_{ij} - тензор скоростей деформаций, удовлетворяющий условию несжимаемости $e_{pp} = 0$; $V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$, V_s - объемы компонентов.

Структуру исследуемой неоднородной среды будем описывать системой изотропных случайных индикаторов функций $\chi_s(\mathbf{r})$, $s = 1, 2, \dots, n$, равных единице на множестве точек s -того компонента и нулю вне этого множества; $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ - радиус-вектор координат.

С помощью системы индикаторных функций локальный закон течения среды можно записать следующим образом:

$$s_{ij}(\mathbf{r}) = k(\mathbf{r}) \frac{e_{ij}(\mathbf{r})}{\sqrt{e_{kl}(\mathbf{r}) e_{kl}(\mathbf{r})}} + \mu \left(\sqrt{e_{kl}(\mathbf{r}) e_{kl}(\mathbf{r})} \right) e_{ij}(\mathbf{r}). \quad (2)$$

$$\text{Здесь } k(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^n k_s \chi_s(\mathbf{r}), \quad \mu \left(\sqrt{e_{kl}(\mathbf{r}) e_{kl}(\mathbf{r})} \right) = \sum_{s=1}^n \mu_s \left(\sqrt{e_{kl}(\mathbf{r}) e_{kl}(\mathbf{r})} \right) \chi_s(\mathbf{r}).$$

Функции $\chi_s(\mathbf{r})$, тензоры напряжений и скоростей деформаций предполагаются случайными статистически однородными и эргодическими полями, а их математические ожидания заменяются соответствующими осредненными по объемам величинами [1]:

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V f(\mathbf{r}) d(\mathbf{r}), \quad \langle f(\mathbf{r}) \rangle_s = \frac{1}{V_s} \int_{V_s} f(\mathbf{r}) d(\mathbf{r}).$$

Здесь угловыми скобками обозначается операция осреднения.

Присоединим к определяющим соотношениям (2) уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3)$$

и формулы Коши

$$2e_{ij}(\mathbf{r}) = v_{i,j}(\mathbf{r}) + v_{j,i}(\mathbf{r}); v_{p,p}(\mathbf{r}) = 0, \quad (4)$$

связывающие компоненты тензора скоростей деформаций с компонентами вектора скоростей перемещений $v_i(\mathbf{r})$. Получим замкнутую систему уравнений деформирования рассматриваемого композиционного материала, граничными условиями для которой являются условия отсутствия флуктуаций напряжений и скоростей деформаций на поверхности S объема V :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in S} = \langle \sigma_{ij} \rangle, \quad e_{ij}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in S} = \langle e_{ij} \rangle.$$

Система уравнений (2) - (4) является физически нелинейной из-за нелинейной связи величин $s_{ij}(\mathbf{r})$ и $e_{ij}(\mathbf{r})$.

Для того, чтобы воспользоваться методами теории упругости установления эффективных реологических законов, нелинейное уравнение (1) необходимо линеаризовать, сделав определенные допущения. Ограничимся здесь способом линеаризации определяющего соотношения (2), при котором величина $\sqrt{e_{kl}(\mathbf{r})e_{kl}(\mathbf{r})}$ считается однородной в объеме V , положив $\Lambda = \langle \sqrt{e_{kl}(\mathbf{r})e_{kl}(\mathbf{r})} \rangle$.

Введем величины $\lambda_s = \frac{k_s}{\Lambda} + \mu_s(\Lambda)$ и перепишем соотношение (2) в виде

$$s_{ij}(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^n \lambda_s \mathcal{J}_s(\mathbf{r}) e_{ij}(\mathbf{r}). \quad (5)$$

Для установления связи между макроскопическими напряжениями $\langle s_{ij} \rangle$ и скоростями деформаций $\langle e_{ij} \rangle$ осредним соотношение (5) по полному объему композиционного материала V :

$$\langle s_{ij} \rangle = \sum_{s=1}^n \lambda_s c_s \langle e_{ij} \rangle_s. \quad (6)$$

Здесь $c_s = \frac{V_s}{V}$ - объемные содержания компонентов.

Соотношение (6) показывает, что для нахождения макроскопического реологического закона среды необходимо определить величины $\langle e_{ij} \rangle_s$, $s = 1, 2, \dots, n$ и Λ .

Скорости деформаций, осредненные по объемам компонентов, можно найти, воспользовавшись соотношением

$$\langle e_{ij} \rangle_s = \langle e_{ij} \rangle + c_s^{-1} \langle \mathcal{J}'_s e'_{ij} \rangle, \quad (7)$$

полученным при статистическом осреднении по полному объему структурно-неоднородной среды выражений $\mathcal{J}_s(\mathbf{r}) e_{ij}(\mathbf{r})$. Здесь и далее штрихами обозначены флуктуации величин в объеме V .

Для вычисления значения ковариации случайных величин $\langle \mathcal{J}'_s e'_{ij} \rangle$ через макроскопический тензор скоростей деформаций $\langle e_{ij} \rangle$ заменим систему уравнений (2) - (4) уравнениями равновесия в скоростях перемещений. Подставляя в уравнения равновесия (3) определяющие соотношения (2) и формулы Коши (4), получим

$$\langle \lambda \rangle v'_{i,pp} + 2 \sum_{s=1}^n \lambda_s \left(\mathcal{J}'_s e'_{ip} - \langle \mathcal{J}'_s e'_{ip} \rangle \right)_{,p} + 2 \sigma'_{,i} = 0. \quad (8)$$

Здесь $\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{pp}$ - гидростатическое давление; $\langle \lambda \rangle = \sum_{s=1}^n \lambda_s c_s$.

С помощью тензора Грина для несжимаемой среды $G_{ik}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} (\delta_{ij} r_{,pp} - r_{,ik})$; $r = |\mathbf{r}|$ уравнения (8) можно заменить системой интегральных уравнений

$$e'_{ij} = \int_V G_{ik,lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \tau'_{kl}(\mathbf{r}_1) d(\mathbf{r}_1), \quad (9)$$

в которых

$$\tau_{kl} = \frac{-2 \sum_{q=1}^n \lambda_g \mathbf{j}'_q e_{kl}}{\langle \lambda \rangle}. \quad (10)$$

Умножая уравнение (9) на $\mathbf{j}'_s$ и осредняя по полному объему V , получаем

$$\langle \mathbf{j}'_s e_{ij} \rangle = \int_V G_{ik,lj}(\mathbf{r}_1) \langle \mathbf{j}'_s(\mathbf{r}) \tau'_{kl}(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) \rangle d(\mathbf{r}_1).$$

При определении момента $\langle \mathbf{j}'_s e_{ij} \rangle$ ограничимся сингулярным приближением теории случайных полей, согласно которому вторые производные тензора Грина в уравнениях (9) заменяются их сингулярной составляющей [2]. Тогда

$$\langle \mathbf{j}'_s e_{ij} \rangle = \frac{1}{5} \langle \mathbf{j}'_s \tau'_{ij} \rangle. \quad (11)$$

Подстановка в (11) выражения для τ_{kl} (10) дает

$$\langle \mathbf{j}'_s e_{ij} \rangle = \frac{-2 \sum_{q=1}^n \lambda_g \langle \mathbf{j}'_s \mathbf{j}'_q e_{kl} \rangle}{5 \langle \lambda \rangle}.$$

Использование формул (7) и соотношений

$$\langle \mathbf{j}'_s \mathbf{j}'_q e_{ij} \rangle = \begin{cases} c_s c_q (\langle e_{ij} \rangle - \langle e_{ij} \rangle_s - \langle e_{ij} \rangle_q), & s \neq q, \\ c_q (c_q \langle e_{ij} \rangle + (1 - 2c_q) \langle e_{ij} \rangle_q), & s = q, \end{cases} \quad (12)$$

которые образуются осреднением по полному объему композиционного материала выражений $\mathbf{j}_s(\mathbf{r}) \mathbf{j}_q(\mathbf{r}) e_{ij}(\mathbf{r})$, приводит к системе уравнений относительно $\langle e_{ij} \rangle_s$:

$$\sum_{q=1}^n \lambda_q c_q \langle e_{ij} \rangle_q - a_s \langle e_{ij} \rangle_s = -\frac{3}{2} \langle \lambda \rangle \langle e_{ij} \rangle, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

$$\text{Здесь } a_s = \frac{5 \langle \lambda \rangle + 2 [\lambda_s]}{2}, \quad [\lambda_s] = \lambda_s - \langle \lambda \rangle.$$

Решение системы (13) записывается в виде

$$\langle e_{ij} \rangle_s = \frac{\frac{3 \langle \lambda \rangle}{2 a_s} \langle e_{ij} \rangle}{1 - \sum_{q=1}^n \frac{\lambda_q c_q}{a_q}}, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Подстановка формул (14) в соотношение (6) приводит к макроскопическому закону течения рассматриваемой микронеоднородной среды

$$\langle s_{ij} \rangle = \langle \lambda \rangle \frac{3 \xi}{1 - 2 \xi} \langle e_{ij} \rangle. \quad (15)$$

$$\text{Здесь } \xi = \sum_{q=1}^n \frac{\lambda_q c_q}{5 \langle \lambda \rangle + 2 [\lambda_q]}.$$

Для дальнейшего расчета эффективных параметров вязкопластического течения рассматриваемого композиционного материала необходимо вычислить Λ .

Рассмотрим функцию скорости диссипации энергии в объеме V : $D = s_{ij}(\mathbf{r}) e_{ij}(\mathbf{r})$.

Ее среднее значение с учетом выбранного способа линеаризации соотношения (2) имеет вид

$$\langle D \rangle = \left\langle k(\mathbf{r}) \sqrt{e_{kl}(\mathbf{r}) e_{kl}(\mathbf{r})} + \mu \left(\sqrt{e_{kl}(\mathbf{r}) e_{kl}(\mathbf{r})} \right) e_{ij}(\mathbf{r}) e_{ij}(\mathbf{r}) \right\rangle = \langle \lambda \rangle \Lambda^2. \quad (16)$$

С другой стороны, для определения среднего значения диссипативной функции $\langle D \rangle$ воспользуемся интегральным уравнением равновесия среды, записанным для флуктуаций напряжений и скоростей деформаций $\frac{1}{V} \int_V s'_{ij} e'_{ij} d(\mathbf{r}) = 0$, из которого следует

$$\langle D \rangle = \langle s'_{ij} e'_{ij} \rangle = \langle s'_{ij} \rangle \langle e'_{ij} \rangle. \quad (17)$$

Подставляя в (17) соотношения (16) и (15), получаем уравнение относительно Λ

$$\Lambda = \sqrt{\frac{3\xi}{1-2\xi}} e, \quad (18)$$

где $e^2 = \langle e'_{ij} \rangle \langle e'_{ij} \rangle$; $\xi = \sum_{q=1}^n \frac{\lambda_q c_q}{5\langle \lambda \rangle + 2[\lambda_q]}$; $[\lambda_s] = \lambda_s - \langle \lambda \rangle$.

Уравнение (18) следует решать численно после задания вида функций $\mu_s \left(\sqrt{e_{kl} e_{kl}} \right)$.

Соотношение (15) можно записать в виде

$$s = \left(\langle k \rangle + \langle \mu \rangle \Lambda \right) \frac{\Lambda}{e}. \quad (19)$$

$$\text{Здесь } s^2 = \langle s'_{ij} \rangle \langle s'_{ij} \rangle, \quad \langle k \rangle = \sum_{s=1}^n k_s c_s, \quad \langle \mu \rangle = \sum_{s=1}^n \mu_s(\Lambda) c_s.$$

Уравнения (18) и (19) представляют макроскопические реологические уравнения нелинейного вязкопластического течения рассматриваемой микронеоднородной среды.

Из инвариантности выражения (15) относительно величин $c_s, k_s, \mu_s(\lambda_s)$ и $c_q, k_q, \mu_q(\lambda_q)$ при перестановках $q \leftrightarrow s$ следует, что формулы (18) и (19) описывают течение среды, все компоненты которой принимают одинаковое участие в течении среды, являются односвязными областями и образуют взаимопересекающуюся хаотически переплетенную матричную смесь.

2. Соотношения (18), (19) не описывают течение вязкопластических сред, для которых характерно однородное распределение дисперсных частиц в связующей матрице.

Пусть первый компонент микронеоднородной среды представляет собой однородную матрицу с хаотически распределенными в ней включениями других компонентов, имеющих сферическую форму.

Перепишем локальные определяющие соотношения (5) в виде

$$s_{ij}(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^n [\lambda_s] \mathcal{J}_s(\mathbf{r}) e_{ij}(\mathbf{r}) + \lambda_1 e_{ij}(\mathbf{r}). \quad (20)$$

Здесь $[\lambda_s] = \lambda_s - \lambda_1$.

Подставляя (20) в уравнения равновесия (3), находим

$$\lambda_1 e'_{ij,j} + \left(\sum_{s=1}^n [\lambda_s] \mathcal{J}_s e'_{ij} \right)'_{,j} + \sigma'_{,i} = 0 \quad (21)$$

Присоединяя к (21) соотношения Коши $2e'_{ij}(\mathbf{r}) = v'_{i,j}(\mathbf{r}) + v'_{j,i}(\mathbf{r})$, записанные для флуктуаций величин, получим относительно v'_i замкнутую систему уравнений течения в скоростях перемещений

$$\lambda_1 v'_{j,pp} + 2 \left(\sum_{s=1}^n [\lambda_s] \mathcal{J}_s e'_{ip} \right)'_{,p} + 2\sigma'_{,i} = 0, \quad (22)$$

которая при помощи тензора Грина преобразуется в систему интегральных уравнений относительно компонент тензора e'_{ij} вида (9), где

$$\tau_{kl} = \frac{-2 \sum_{q=1}^n [\lambda_s] \mathcal{J}_q e_{kl}}{\lambda_1}. \quad (23)$$

Использование гипотезы сингулярного приближения приводит к системе уравнений относительно $\langle e_{ij} \rangle_s$:

$$\sum_{q=1}^n [\lambda_q] c_q \langle e_{ij} \rangle_q - a_s \langle e_{ij} \rangle_s = -\frac{5}{2} \lambda_1 \langle e_{ij} \rangle, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (24)$$

$$\text{Здесь } a_s = \frac{5\lambda_1 + 2[\lambda_s]}{2}, \quad [\lambda_s] = \lambda_s - \lambda_1.$$

Осреднение соотношения (20) по полному объему дает

$$\langle s_{ij} \rangle = \sum_{s=1}^n [\lambda_s] c_s \langle e_{ij} \rangle_s + \lambda_1 \langle e_{ij} \rangle. \quad (25)$$

Исключая из (24) и (25) величины $\langle e_{ij} \rangle_s$, находим

$$\langle s_{ij} \rangle = \lambda_1 \frac{3\zeta}{1 - 2\zeta} \langle e_{ij} \rangle, \quad (26)$$

$$\text{где } \zeta = \sum_{q=1}^n \frac{\lambda_q c_q}{5\lambda_1 + 2[\lambda_q]}; \quad [\lambda_s] = \lambda_s - \lambda_1.$$

Величина Λ определяется выражением

$$\Lambda = \sqrt{\frac{\lambda_1 3\zeta}{\langle \lambda \rangle (1 - 2\zeta)}} e, \quad (27)$$

после задания вида функций $\mu_s \left(\sqrt{e_{kl} e_{kl}} \right)$. Здесь $e^2 = \langle e_{ij} \rangle \langle e_{ij} \rangle$.

Формулы (26), (27) не являются симметричными относительно одновременных перестановок материальных параметров $c_s, k_s, \mu_s(\lambda_s)$ и $c_q, k_q, \mu_q(\lambda_q)$; из них видно, что первый компонент играет роль связующей матрицы, а остальные - роль отдельных включений.

3. Другим типом связности фаз обладает неоднородная среда, у которой связующая матрица образована не одним, а несколькими взаимопроникающими компонентами.

Разделим все компоненты композиционного материала на две группы, считая, что первые m компонентов обладают одинаковой связностью и образуют матрицу из взаимопересекающихся каркасов, а остальные $n - m$ компонентов распределены в этой матрице в виде отдельных включений.

Введем обозначения для средних значений величин в объеме матрицы

$$\{\lambda\} = \sum_{s=1}^m \lambda_s c_s; \quad [\lambda_s] = \lambda_s - \{\lambda\}. \quad (28)$$

Тогда локальные определяющие соотношения примут вид

$$s_{ij}(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^n [\lambda_s] \mathcal{J}_s(\mathbf{r}) e_{ij}(\mathbf{r}) + \{\lambda\} e_{ij}(\mathbf{r}). \quad (29)$$

Запишем систему уравнений течения композиционных материалов в скоростях перемещений

$$\{\lambda\} v'_{i,pp} + 2 \sum_{s=1}^n \lambda_s \left(\mathcal{J}_s e_{ip} \right)'_{,p} + 2 \sigma'_{,i} = 0 \quad (30)$$

и с помощью тензора Грина для несжимаемого материала перейдем к системе интегральных уравнений вида (9), в которых

$$\tau_{kl} = \frac{-2 \sum_{q=1}^n [\lambda_s] \mathcal{J}_q e_{kl}}{\{\lambda\}}. \quad (31)$$

Применение метода сингулярного приближения приводит к соотношениям

$$\langle e_{ij} \rangle_s = \frac{2 \langle s_{ij} \rangle + 3 \{\lambda\} \langle e_{ij} \rangle}{5 \{\lambda\} + 2 [\lambda_s]}, \quad (32)$$

$$\langle s_{ij} \rangle = \{\lambda\} \frac{3\zeta}{1-2\zeta} \langle e_{ij} \rangle. \quad (33)$$

$$\text{Здесь } \zeta = \sum_{q=1}^n \frac{\lambda_q c_q}{5 \{\lambda\} + 2 [\lambda_q]}, \quad [\lambda_s] = \lambda_s - \{\lambda\}.$$

Константа линеаризации Λ определяется уравнением

$$\Lambda = \sqrt{\frac{\{\lambda\} 3\zeta}{\langle \lambda \rangle (1-2\zeta)}} e \quad (34)$$

после задания вида функций $\mu_s \left(\sqrt{e_{kl} e_{kl}} \right)$.

Формулы (33), (34) симметричны относительно перестановок индексов материальных параметров компонентов $c_s, k_s, \mu_s(\lambda_s)$ и $c_q, k_q, \mu_q(\lambda_q)$ внутри каждой группы $\{q, s: q \leq m, s \leq m\}$, $\{q, s: q > m, s > m\}$ и несимметричны при перестановке индексов между этими группами, т. е. первые m компонентов образуют матричную смесь, а остальные $m - n$ представляют собой отдельные включения.

4. Введем неопределенные величины k и μ , удовлетворяющие неравенствам

$$\min_s \{k_s\} \leq k \leq \max_s \{k_s\},$$

$$\min_s \{\mu_s(\Lambda)\} \leq \mu \leq \max_s \{\mu_s(\Lambda)\}.$$

Здесь k является постоянной величиной, а значение μ в общем случае зависит от константы линеаризации Λ .

С помощью величин k и μ локальные определяющие уравнения (5) записываются следующим образом:

$$\Lambda s_{ij}(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^n \left([k_s] + \Lambda [\mu_s(\Lambda)] \right) \mathcal{J}_s(\mathbf{r}) e_{ij}(\mathbf{r}) + (k + \Lambda \mu) e_{ij}(\mathbf{r}). \quad (35)$$

$$\text{Здесь } [k_s] = k_s - k; \quad [\mu_s(\Lambda)] = \mu_s(\Lambda) - \mu.$$

Сведем систему (3), (4), (35) к системе интегральных уравнений равновесия вида (9), в которых

$$\tau_{kl} = \frac{-2 \sum_{q=1}^n \left([k_q] + \Lambda [\mu_q(\Lambda)] \right) \mathcal{J}_q e_{kl}}{k + \Lambda \mu}. \quad (36)$$

Замена в уравнениях (9), (36) (согласно гипотезе сингулярного приближения) вторых производных тензора Грина их сингулярной частью приводит к уравнениям относительно компонентов тензора $\langle e_{ij} \rangle_s$:

$$\langle e_{ij} \rangle_s = \frac{2 \Lambda \langle s_{ij} \rangle + 3(k + \Lambda \mu) \langle e_{ij} \rangle}{5(k + \Lambda \mu) + 2([k_s] + \Lambda [\mu_s(\Lambda)])}, \quad (37)$$

подстановка которых в осредненное по полному объему соотношение (35) дает макроскопические уравнения течения

$$\langle s_{ij} \rangle = \left(\frac{k}{\Lambda} + \mu \right) \frac{3\theta}{1-2\theta} \langle e_{ij} \rangle; \quad (38)$$

$$\Lambda = \sqrt{\frac{(k + \Lambda\mu)3\theta}{(\langle k \rangle + \Lambda\langle \mu(\Lambda) \rangle)(1-2\theta)}} e; \quad (39)$$

$$\theta = \sum_{q=1}^n \frac{(k_q + \Lambda\mu_q(\Lambda))c_q}{5(\langle k \rangle + \Lambda\langle \mu(\Lambda) \rangle) + 2([k_q] + \Lambda[\mu_q(\Lambda)])};$$

$$e^2 = \langle e_{ij} \rangle \langle e_{ij} \rangle; \quad \langle k \rangle = \sum_{s=1}^n k_s c_s; \quad \langle \mu(\Lambda) \rangle = \sum_{s=1}^n \mu_s(\Lambda) c_s.$$

Выбор величин k и μ задает способ участия компонентов среды в процессе течения и определяет различные модели многокомпонентных композиционных материалов с любой степенью связности составляющих компонентов.

Если в уравнениях (38) и (39) положить $k = \langle k \rangle$, $\mu = \langle \mu(\Lambda) \rangle$, то получится модель композиционного материала типа “взаимопересекающиеся каркасы” вида (15), (18). В случае, если все $\mu_s(\Lambda) = 0$, эти формулы определяют эффективный предел текучести жесткопластических микронеоднородных сред, который при $n = 2$ определяется соотношением [3]

$$k^* = \sqrt{\langle k^2 \rangle - \frac{2[k^2]^2 c_1 c_2}{5\langle k^2 \rangle + 2[k^2](c_1 - c_2)}}.$$

$$\text{Здесь } [k^2] = k_2^2 - k_1^2; \quad \langle k^2 \rangle = k_1^2 c_1 + k_2^2 c_2.$$

Если все $k_s = 0$, то уравнения (38), (39) описывают течение нелинейных вязких сред.

Если положить $k = k_1$, $\mu = \mu_1(\Lambda)$, то получится модель типа “матрица-включения”. При всех $k_s = 0$ и $\mu_s = \text{const}$, $\mu = \mu_1$ формулы (38), (39) описывают эффективный закон течения несжимаемой ньютоновской жидкости.

При $k = \{k\}$, $\mu = \{\mu\}$ формулы (38) и (39) сводятся к соотношениям (33), (34) и описывают течение микронеоднородных сред, у которых первые m компонентов обладают одинаковой связностью и образуют матрицу из взаимопересекающихся каркасов, а остальные $n - m$ компонентов распределены в этой матрице в виде отдельных включений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
2. Сараев Л.А., Шермергор Т.Д. Сингулярное приближение теории вязкопластических микронеоднородных сред // Механизмы релаксационных явлений в твердых телах: Мат. VII Всесоюз. конф., Воронеж, 1981. С. 28-31.
3. Сараев Л.А., Шермергор Т.Д. Сингулярное приближение в теории идеальной пластичности микронеоднородных сред // Прикладная механика. 1985. Т. 21, № 5. С. 92-97.