Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Заусаев, А. Г. Ольхин, Оценка локальных ошибок дискретизации в численном интегрировании уравнений движения больших планет (Меркурий-Плутон) методом Эверхарта, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2001, выпуск 12, 40–44

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu60>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:00:15

ОЦЕНКА ЛОКАЛЬНЫХ ОШИБОК ДИСКРЕТИЗАЦИИ В ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ БОЛЬШИХ ПЛАНЕТ (МЕРКУРИЙ-ПЛУТОН) МЕТОДОМ ЭВЕРХАРТА

Проведено исследование локальной погрешности в численном интегрировании уравнений больших планет (Меркурий-Плутон) методом Эверхарта. Показано, что для внешних планет (Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун) координаты и скорость планет могут быть вычислены численным методом Эверхарта с высокой степенью точности на интервале времени порядка 10-20 тысяч лет.

Для повышения эффективности численного интегрирования уравнений движения небесных объектов: астероидов, комет, метеоритных роев, естественных и искусственных спутников и т.д., создаются банки данных координат больших планет на определенном интервале времени. В зависимости от применяемого метода, начальных данных, интервала интегрирования, точность координат больших планет может быть различной. Целью данной работы являлось нахождение интервала интегрирования, на котором ошибка в координатах больших планет не превосходит точности телескопических наблюдений.

Для решения этой задачи на интервале времени с 1950 по 965 г.г. проведено численное интегрирование уравнений движения больших планет (Меркурий-Плутон) методом Эверхарта [1] с переменным шагом и порядком. На основании анализа полученных результатов оценены локальные ошибки дискретизации на исследуемом интервале времени для каждой планеты в отдельности.

Метод Эверхарта является одним из самых эффективных по точности и быстродействию численным методом для решения задач небесной механики [2].

Рассмотрим основную идею построения алгоритмов Эверхарта на примере решения дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, t). \quad (1)$$

Представим правую часть (1) в виде ряда по степеням t в окрестности $t_1=0$.

$$F = F(x, t) = F_1 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_n t^n \quad (2)$$

Интегрируя уравнения (2) дважды, получим

$$\ddot{x} = \ddot{x}_1 + F_1 t + A_1 t^2 / 2 + A_2 t^3 / 3 + \dots + A_n t^{n+1} / (n+1), \quad (3)$$

$$x = x_1 + \dot{x}_1 t + F_1 t^2 / 2 + A_1 t^3 / 6 + \dots + A_n t^{n+2} / ((n+1)(n+2)). \quad (4)$$

Важно отметить, что полином, стоящий в правой части (2) не является отрезком ряда Тейлора. Коэффициенты A_i вычисляются из условий наилучшего приближения x и $\ddot{x}$ в момент времени T , соответствующий значению решения на конце шага h по формулам (3) и (4). Для связи A -значений с F -значениями используется выражение

$$F = F_1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t(t - t_2) + \alpha_3 t(t - t_2)(t - t_3) + \dots \quad (5)$$

В каждый момент времени t_i имеем

$$F_2 = F_1 + \alpha_1 t_2,$$

$$F_3 = F_1 + \alpha_1 t_3 + \alpha_2 t_3(t_3 - t_2),$$

...

Принимая $t_{nj}=t_n-t_j$, получим

$$\alpha_1 = (F_2 - F_1) / t_2,$$

$$\alpha_2 = ((F_3 - F_1) / t_3 - \alpha_1) / t_{32},$$

$$\alpha_3 = (((F_4 - F_1) / t_4 - \alpha_1) / t_{42} - \alpha_2) / t_{32},$$

$$\alpha_4 = (((((F_5 - F_1) / t_5 - \alpha_1) / t_{52} - \alpha_2) / t_{53} - \alpha_3) / t_{54}, \quad (6)$$

...

Связь A -значений с α -значениями находится из следующих соотношений:

$$A_1 = \alpha_1 + (-t_2 t_3) \alpha_2 + (t_2 t_3) \alpha_3 = c_{11} \alpha_1 + c_{21} \alpha_1 \alpha_2 + c_{31} \alpha_3 + \dots,$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \alpha_2 + (-t_2 - t_3)\alpha_3 + \dots = c_{22}\alpha_2 + c_{32}\alpha_3 + \dots, \\
A_3 &= \alpha_3 + \dots = c_{33}\alpha_3 + \dots, \\
&\dots
\end{aligned} \tag{7}$$

Коэффициенты c_{ij} определяются из рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= 1, \quad i = j, \\
c_{ij} &= -t_i c_{i-1,j}, \quad i > 1, \\
c_{ij} &= c_{i-1,j-1} - t_i c_{i-1,j}, \quad 1 < j < i.
\end{aligned} \tag{8}$$

В дальнейшем нахождение решения уравнения (1) сводится к нахождению узлов разбиения t_i шага h . Покажем нахождение узлов разбиения шага $h=[0,T]$ на примере алгоритма интегрирования пятого порядка ($n=5$). В начальный момент времени $t_1=0$ нам известны $x_1, \mathfrak{A}_1, F_1$. Значения x в момент времени t_2, t_3 и t_4 вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + \mathfrak{A}_1 t_2 + F_1 t_2^2 / 2 + [A_1 t_2^3 / 2 \cdot 3 + A_2 t_2^4 / 3 \cdot 4 + A_3 t_2^5 / 4 \cdot 5], \\
x_3 &= x_1 + \mathfrak{A}_1 t_3 + F_1 t_3^2 / 2 + A_1 t_3^3 / 2 \cdot 3 + [A_2 t_3^4 / 3 \cdot 4 + A_3 t_3^5 / 4 \cdot 5], \\
x_4 &= x_1 + \mathfrak{A}_1 t_4 + F_1 t_4^2 / 2 + A_1 t_4^3 / 2 \cdot 3 + A_2 t_4^4 / 3 \cdot 4 + [A_3 t_4^5 / 4 \cdot 5].
\end{aligned} \tag{9}$$

Выражения (9) являются предсказывающими уравнениями для определения коэффициентов A_i . С помощью следующих двух исправляющих уравнений находят значения решения на конце шага h :

$$\begin{aligned}
x(T) &= x_1 + \mathfrak{A}_1 T + F_1 T^2 / 2 + A_1 T^3 / 2 \cdot 3 + A_2 T^4 / 3 \cdot 4 + A_3 T^5 / 4 \cdot 5, \\
\mathfrak{A}(T) &= \mathfrak{A}_1 + F_1 T + A_1 T^2 / 2 + A_2 T^3 / 3 + A_3 T^4 / 4.
\end{aligned} \tag{10}$$

Значения t_2, t_3, t_4 определяются из условий, которые позволили бы с помощью формул (10) получить решения с точностью до седьмого порядка, т.е. разности решений пятого и седьмого порядков должны обратиться в нуль:

$$\Delta x = 0, \quad \Delta \mathfrak{A} = 0 \tag{11}$$

Вводя безразмерные величины $h_i = \frac{t_i}{T}$, можно получить систему алгебраических уравнений

для соответствующих им коэффициентов вида

$$\begin{aligned}
c'_{41} / 2 + c'_{42} / 3 + c'_{43} / 4 + 1/5 &= 0, \\
c'_{41} / 3 + c'_{42} / 4 + c'_{43} / 5 + 1/6 &= 0, \\
c'_{41} / 4 + c'_{42} / 5 + c'_{43} / 6 + 1/7 &= 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Решение этой системы

$$c'_{41} = -4/35 = -h_2 h_3 h_4; c'_{42} = 6/7 = h_2 h_3 + h_3 h_4 + h_2 h_4; c'_{43} = -12/7 = -h_2 - h_3 - h_4 \tag{13}$$

показывает, что значения h_2, h_3, h_4 являются корнями следующего полинома третьей степени:

$$h^3 + (-12/7)h^2 + (6/7)h - 4/35 = 0. \tag{14}$$

Из (14) следует, что полученные узлы разбиения шага h совпадают с квадратурной формулой Гаусса-Радона, а величины h_2, h_3, h_4 равны корням полинома Лежандра $P_3(2h-1)=0$.

Метод Эверхарта является неявным одношаговым методом. Для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений самим Эверхартом разработана универсальная программа RADA19[1], написанная на Фортране и адаптированная нами для C++.

Для оценки локальной погрешности численного метода Эверхарта нами решались дифференциальные уравнения движения, которые в гелиоцентрической системе координат имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x}{dt^2} &= -k^2 (1+m) \frac{x}{r^3} + \sum_i k^2 m_i \left(\frac{x_i - x}{\Delta_i^3} - \frac{x_i}{r_i^3} \right), \\
\frac{d^2 y}{dt^2} &= -k^2 (1+m) \frac{y}{r^3} + \sum_i k^2 m_i \left(\frac{y_i - y}{\Delta_i^3} - \frac{y_i}{r_i^3} \right), \\
\frac{d^2 z}{dt^2} &= -k^2 (1+m) \frac{z}{r^3} + \sum_i k^2 m_i \left(\frac{z_i - z}{\Delta_i^3} - \frac{z_i}{r_i^3} \right),
\end{aligned} \tag{15}$$

где m, x, y, z – масса и гелиоцентрические координаты возмущаемой планеты; m_i, x_i, y_i, z_i – массы и гелиоцентрические координаты возмущающих планет; r, Δ_i, r_i – расстояния, вычисляемые по формулам

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \Delta_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2, r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2;$$

k – постоянная Гаусса; масса солнца m_0 принята за единицу.

Начальные значения координат и компонент скорости в эпоху 1949дек. 30.0ЕТ=JED 2433280.5 (ЕТ–эфемеридное время, JED–юлианская дата в эфемеридном времени) приведены в таблице 1 [3], где x, y, z выражены в астрономических единицах, x', y', z' – в астрономических единицах в эфемеридные сутки.

Т а б л и ц а 1

Экваториальные прямоугольные координаты на эпоху 1949дек 30.0 ЕТ=JED2433280.5

Меркурий			Сатурн		
$x=$	0.3439262826	$x'=$ -0.0084663252	$x=$ -8.9724944563	$x'=$ -0.0018582755	
$y=$	0.0456120867	$y'=$ 0.0256147777	$y=$ 2.2797122950	$y'=$ -0.0049838514	
$z=$	-0.0109252378	$z'=$ 0.0145867628	$z=$ 1.3303683212	$z'=$ -0.0019802491	
Венера			Уран		
$x=$	0.1429705295	$x'=$ -0.0198937931	$x=$ -1.0029132696	$x'=$ -0.0039552572	
$y=$	0.6470040699	$y'=$ 0.0031132345	$y=$ 17.3234919405	$y'=$ -0.0003759007	
$z=$	0.2824815251	$z'=$ 0.0026594965	$z=$ 7.6048360565	$z'=$ -0.0001088437	
Земля+Луна			Нептун		
$x=$	-0.1363613301	$x'=$ -0.0173200155	$x=$ -29.1942677427	$x'=$ 0.0008207898	
$y=$	0.8933977569	$y'=$ -0.0022442677	$y=$ -7.7192336013	$y'=$ -0.0027720922	
$z=$	0.3874584316	$z'=$ -0.0009733419	$z=$ -2.4272492809	$z'=$ -0.0011561171	
Марс			Плутон		
$x=$	-1.3698312567	$x'=$ -0.0073845893	$x=$ -26.2317561603	$x'=$ -0.0013157218	
$y=$	0.8431371618	$y'=$ -0.0094773446	$y=$ 20.5615297781	$y'=$ -0.0026198366	
$z=$	0.4238360949	$z'=$ -0.0041516538	$z=$ 14.4436902948	$z'=$ -0.0004270513	
Юпитер					
$x=$	3.3493566446	$x'=$ 0.0055856550			
$y=$	-3.4737659939	$y'=$ 0.0049622487			
$z=$	-1.5721612031	$z'=$ 0.0019922661			

Данным значениям координат и скоростей планет соответствуют значения их обратных масс, представленные в табл. 2.

Оценка локальной погрешности дискретизации численного интегрирования больших планет (Меркурий –Плутон) методом Эверхарта проводилась нами двумя методами: экстраполяцией и вложенным методом [4].

Экстраполяция является наиболее распространенным методом оценки погрешности. Интегрирование на исследуемом интервале времени $(t-t_0)$ выполнялось дважды: один раз с шагом h , другой раз с шагом $h/2$. Тогда $d_n = \frac{(\text{разность значений } x)}{h(1-2^{-p})}$, где d_n – локальная ошибка

дискретизации; p –порядок метода; t –начальный момент интегрирования 1949.дек 30.0 ED=2443280.5JED; t_0 – конечный момент интегрирования – 2073280.5JED.

При использовании вложенного метода решение уравнений (16) на интервале времени $(t-t_0)$ также проводилось дважды: методом порядка p и методом порядка $p+1$. Разность полученных значений дает оценку величины d_n .

В табл. 3 и 4 ниже приведены координаты и скорости планет на конечный момент интегрирования, а также локальные погрешности в их значениях, вычисленные методом экстраполяции и вложенным методом.

Т а б л и ц а 2

Обратные массы планет

Планеты	m_0/m
Меркурий	6000000
Венера	408000
Земля+Луна	329390
Марс	3093500
Юпитер	1047.355
Сатурн	3501.6
Уран	22869
Нептун	19314
Плутон	360000

Т а б л и ц а 3

Экваториальные прямоугольные координаты на момент 2073280.5JED

Меркурий			Сатурн		
x=	-0.067450226	x'=- 0.022247753	x=	9.46735285	x'=- 0.000367267
y=	-0.40951509	y'=- 0.001326453	y=	-0.93364407	y'=- 0.005148022
z=	-0.211509717	z'=- 0.003056474	z=	-0.780356583	z'=- 0.002104081
Венера			Уран		
x=	0.618793222	x'=- 0.010552375	x=	-16.82062061	x'=- 0.001604489
y=	0.356552709	y'=- 0.015464962	y=	-7.108241065	y'=- 0.00342724
z=	0.119980039	z'=- 0.007591038	z=	-2.875325429	z'=- 0.00152506
Земля+Луна			Нептун		
x=	-0.509051005	x'=- 0.014583928	x=	-27.29215056	x'=- 0.001348825
y=	-0.802897292	y'=- 0.007965873	y=	-12.42017229	y'=- 0.00258905
z=	-0.350386958	z'=- 0.003473202	z=	-4.402056132	z'=- 0.00109439
Марс			Плутон		
x=	-1.175550092	x'=- 0.009235795	x=	-29.09700146	x'=- 0.00082459
y=	1.049657621	y'=- 0.00809684	y=	13.24623843	y'=- 0.00291887
z=	0.515432311	z'=- 0.003443543	z=	12.99169925	z'=- 0.00066926
Юпитер					
x=	0.650552679	x'=- 0.007407106			
y=	-4.752673184	y'=- 0.00126012			
z=	-2.055191307	z'=- 0.000359188			

Т а б л и ц а 4

Локальная погрешность дискретизации на конечный момент времени 2073280.5 JED

	15 порядок, вложенный ме- тод		15 порядок, метод экстрапо- ляции		19 порядок, метод экстра- поляции	
	координат	скоростей	координат	скоростей	Координат	скоростей
Меркурий	0.0001459	1.29526E-06	0.000145369	1.29049E-06	3.7766E-07	3.335E-09
	8.7496E-06	7.86318E-06	8.71776E-06	7.8343E-06	2.2751E-08	2.032E-08
	2.0072E-05	4.06121E-06	1.99982E-05	4.0463E-06	5.2017E-08	1.05E-08
Венера	5.4286E-08	2.48524E-09	1.0384E-07	4.75003E-09	6.6425E-09	3.031E-10
	8.0078E-08	1.43699E-09	1.52734E-07	2.74232E-09	9.7136E-09	1.744E-10
	3.9302E-08	4.83984E-10	7.49635E-08	9.23276E-10	4.7689E-09	5.871E-11
Земля	3.9694E-08	3.94973E-10	4.86998E-08	4.84438E-10	6.0537E-09	6.009E-11
	2.1649E-08	6.22589E-10	2.6576E-08	7.63852E-10	3.3077E-09	9.48E-11
	9.4439E-09	2.71768E-10	1.15928E-08	3.33423E-10	1.4424E-09	4.136E-11
Марс	6.9797E-09	5.72752E-11	8.14672E-09	6.69166E-11	8.3321E-10	6.873E-12
	6.0941E-09	5.26367E-11	7.1154E-09	6.12184E-11	7.3018E-10	6.143E-12
	2.587E-09	2.58867E-11	3.02196E-09	3.01006E-11	3.1135E-10	3.013E-12
Юпитер	1.2705E-10	2.3847E-13	2.58129E-10	2.57489E-13	3.7685E-11	8.4E-15
	2.697E-11	1.10692E-12	4.79501E-11	9.2435E-13	6.1995E-12	4.699E-14
	1.067E-11	5.89134E-13	1.641E-11	5.10072E-13	1.64E-12	2.004E-14
Сатурн	2.0691E-11	2.29083E-13	2.71907E-11	1.60636E-13	8.5798E-12	8.428E-14
	3.1539E-11	1.30758E-12	6.99529E-11	1.30644E-12	1.3688E-10	1.264E-14
	1.5862E-11	6.7514E-13	2.6075E-11	6.7686E-13	5.641E-11	9.18E-15
Уран	1.2601E-11	2.0579E-13	2.05986E-11	2.0346E-13	1.2601E-11	4.94E-15
	1.913E-11	1.30668E-12	4.91962E-12	1.3003E-12	2.855E-11	9.298E-16
	6.1204E-12	6.7582E-13	1.39888E-13	6.7297E-13	1.26E-11	6.199E-16
Нептун	2.3302E-11	2.1074E-13	2.16005E-11	2.0444E-13	2.64E-11	7.02E-15
	2.9008E-12	1.30858E-12	5.30065E-12	1.30057E-12	5.39E-11	6.27E-15
	1.7595E-12	6.7635E-13	1.39444E-13	6.7289E-13	2.286E-11	2.78E-15
Плутон	1.6698E-11	2.1295E-13	3.47988E-11	2.02977E-13	1.4399E-11	2.174E-15
	2.95E-11	1.30768E-12	2.57003E-11	1.30164E-12	4.6199E-11	5.01E-15
	1.08E-11	6.75554E-13	1.69997E-12	6.73791E-13	1.1399E-11	3.129E-15

Результаты вычислений показывают, что локальные погрешности, полученные двумя различными методами, отличаются друг от друга незначительно. Однако порядок точности координат и скоростей планет существенно зависит от порядка метода Эверхарта. Как видно из таблицы, интегрирование уравнений движения методом Эверхарта 15 порядка дает погрешность в координатах и скоростях Меркурия на два порядка больше по сравнению с методом 19 порядка. Следовательно, метод Эверхарта 19 порядка предпочтительнее при получении координат планет с высокой степенью точности.

Как видно из табл. 3 и 4 наибольшая локальная погрешность получается в координатах Меркурия. Полная погрешность дискретизации часто оценивается с помощью локальной погрешности. Однако для внутренних планет – Меркурия и Венеры – такое допущение не может быть оправданно, так как релятивистские эффекты, которые не учитывались в данном исследовании оказывают более существенное влияние на смещение координат, чем погрешность метода.

Хорошо известно, что основной вклад в эволюционные процессы малых тел солнечной системы вносят внешние планеты: Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун. Как показывают расчеты, значения максимальной локальной погрешности в координатах этих планет не превосходят $0.5 \cdot 10^{-10}$ а.е. Для внешних планет локальная погрешность сопоставима с полной погрешностью дискретизации.

Учитывая характер развития погрешности, можно утверждать, что метод Эверхарта позволяет создать банк данных координат больших планет с достаточно большой степенью точности на интервале времени порядка 10-20 тысяч лет. Банк данных можно эффективно использовать при исследовании эволюции орбит малых тел Солнечной системы: астероидов, комет и метеоритных роев.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Everhart E.* Implicit single methods for integrating orbits // *Celestial mechanics*. 1974. V.10. P. 35-55.
2. *Бордовицына Т.В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.
3. *Справочное руководство по небесной механике и астродинамике* // Под ред. Г.Н. Дубошина. М.: Наука, 1976. 862с.
4. *Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений* / Под ред. Дж. Холла и Дж. Уатта М.: Мир, 1979. 312с