Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. В. Чеботарева, Решение краевых задач для вырождающегося B -эллиптического уравнения второго рода методом потенциалов, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 2(), 38–48

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu603>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 11:52:30

УДК 517.956.226

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ
В-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО РОДА
МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Э. В. Чеботарева

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет,
420021, г. Казань, ул. Татарстан, 2.

E-mail: elvchb@mail.ru

Строятся фундаментальное решение и потенциалы типа простого и двойного слоев для вырождающегося В-эллиптического уравнения второго рода. С помощью этих потенциалов краевые задачи сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода.

Ключевые слова: вырождающееся В-эллиптическое уравнение второго рода, метод потенциалов, внешняя и внутренняя задачи Неймана, внешняя и внутренняя задачи Дирихле.

Пусть E_p^{++} — четверть $x_p > 0$, $x_{p-1} > 0$ p -мерного евклидова пространства точек $x = (x', x_p)$, $x' = (x'', x_{p-1})$, $x'' = (x_1, x_2, \dots, x_{p-2})$; Ω — конечная область в E_p^{++} , ограниченная гиперповерхностью Γ и частями Γ_0 и Γ_1 гиперплоскостей $x_{p-1} = 0$ и $x_p = 0$ соответственно; $\Omega_e = E_p^{++} \setminus (\Omega \cup \Gamma)$.

Рассмотрим в E_p^{++} вырождающееся В-эллиптическое уравнение

$$E[u(x)] = \Delta_{x''} u + B_{x_{p-1}} u + \frac{\partial}{\partial x_p} \left(x_p^\alpha \frac{\partial u}{\partial x_p} \right) = 0, \quad (1)$$

где $\Delta_{x''} = \sum_{j=1}^{p-2} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, $B_{x_{p-1}} = \frac{\partial^2}{\partial x_{p-1}^2} + \frac{k}{x_{p-1}} \frac{\partial}{\partial x_{p-1}}$ — оператор Бесселя, $0 < \alpha < 1$, $k > 0$ — постоянные, $p \geq 3$.

1. Фундаментальное решение. Будем искать решение уравнения (1) в виде

$$u(x) = (p_1^2)^{-\left(\frac{\gamma-2}{2} + \beta\right)} w(\sigma), \quad (2)$$

где $\sigma = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}$, $\beta = \frac{\alpha}{2(2-\alpha)}$, $\gamma = p + k$, $\rho^2 = |x'|^2 + \frac{4}{(\alpha-2)^2} \left(x_p^{\frac{2-\alpha}{2}} - x_{p0}^{\frac{2-\alpha}{2}} \right)^2$, $\rho_1^2 = |x'|^2 + \frac{4}{(\alpha-2)^2} \left(x_p^{\frac{2-\alpha}{2}} + x_{p0}^{\frac{2-\alpha}{2}} \right)^2$.

Подставляя функцию (2) в уравнение (1), имеем

$$\sigma(1-\sigma)w'' + \left[\frac{\gamma}{2} - \left(\frac{\gamma}{2} + 2\beta \right) \sigma \right] w' - \beta \left(\frac{\gamma-2}{2} + \beta \right) w = 0. \quad (3)$$

Известно [1], что в окрестности точки $\sigma = 1$ уравнение (3) имеет два

Чеботарева Эльвира Валерьевна — аспирант кафедры математического анализа Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета.

линейно независимых решения. Одно из них имеет вид

$$\begin{aligned} w(\sigma) &= (1-\sigma)^{1-2\beta} F\left(1-\beta, \frac{\gamma}{2}-\beta, 2-2\beta; 1-\sigma\right) = \\ &= \sigma^{-\frac{\gamma-2}{2}} (1-\sigma)^{1-2\beta} F\left(1-\beta, 2-\frac{\gamma}{2}-\beta, 2-2\beta; 1-\sigma\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2), получаем решение уравнения (1):

$$\begin{aligned} q(x; x_{p_0}) &= A (\rho_1^2)^{-\beta} (\rho^2)^{-\frac{\gamma-2}{2}} (1-\sigma)^{1-2\beta} \times \\ &\times F\left(1-\beta, 2-\frac{\gamma}{2}-\beta, 2-2\beta; 1-\sigma\right), \end{aligned} \quad (5)$$

где A — некоторая постоянная, $F(a, b, c; z)$ — гипергеометрическая функция. Известно [2], что решение (5) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} q(x; x_{p_0}) &= A (\rho_1^2)^{-\beta} (\rho^2)^{-\frac{\gamma-2}{2}} (1-\sigma)^{1-2\beta} \times \\ &\times \frac{\Gamma(2-2\beta) \Gamma\left(\frac{\gamma-2}{2}\right)}{\Gamma(1-\beta) \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}-\beta\right)} F\left(1-\beta, 2-\frac{\gamma}{2}-\beta, 2-\frac{\gamma}{2}; \sigma\right) + \\ &+ A (\rho^2)^{-(\frac{\gamma-2}{2}+\beta)} (1-\sigma)^{1-2\beta} \times \\ &\times \frac{\Gamma(2-2\beta) \Gamma\left(-\frac{\gamma-2}{2}\right)}{\Gamma(1-\beta) \Gamma\left(2-\frac{\gamma}{2}-\beta\right)} F\left(1-\beta, \frac{\gamma}{2}-\beta, \frac{\gamma}{2}; \sigma\right). \end{aligned} \quad (6)$$

С помощью ряда Гаусса, а также разложения в степенной ряд функций $(1-\sigma)^{1-2\beta}$ и $\left(1 + \frac{(2-\alpha)^2 \rho^2}{16(x x_0)^{\frac{2-\alpha}{2}}}\right)^{-\beta}$ при малых значениях ρ , решение (6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} q(x; x_{p_0}) &= A \frac{\Gamma(2-2\beta) \Gamma\left(\frac{\gamma-2}{2}\right)}{\Gamma(1-\beta) \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}-\beta\right)} \times \\ &\times \frac{(2-\alpha)^{2\beta} (x_p x_{p_0})^{-\frac{\alpha}{4}}}{2^{4\beta}} (\rho^2)^{-\frac{\gamma-2}{2}} + q^*(x; x_{p_0}), \end{aligned} \quad (7)$$

где $q^*(x; x_{p_0})$ — регулярная в точке $(0', x_{p_0})$ функция. Функция (7) по переменным $x_1, x_2, \dots, x_p$ является решением уравнения (1), имеет степенную особенность и, следовательно, является фундаментальным решением уравнения (1) с особенностью в точке $(0', x_{p_0})$.

Для получения фундаментального решения уравнения (1) с особенностью в произвольной точке $x_0 \in E_p^{++}$ применим к функции (7) оператор обобщенного сдвига $T_{x'}^{x'_0}$:

$$\mathcal{E}(x; x_{p_0}) = A \frac{\Gamma(2-2\beta) \Gamma\left(\frac{\gamma-2}{2}\right)}{\Gamma(1-\beta) \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}-\beta\right)} \frac{(2-\alpha)^{2\beta} (x_p x_{p_0})^{-\frac{\alpha}{4}}}{2^{4\beta}} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^\pi \left[|x'' - x_0''|^2 + x_{p-1}^2 + x_{p-1_0}^2 - 2x_{p-1}x_{p-1_0} \cos \varphi + \right. \\ & \quad \left. + \frac{4}{(2-\alpha)^2} \left(x_p^{\frac{2-\alpha}{2}} - x_{p_0}^{\frac{2-\alpha}{2}} \right)^2 \right]^{-\frac{\gamma-2}{2}} \sin^{k-1} \varphi d\varphi + \psi^{**}(x; x_0), \quad (8) \end{aligned}$$

где $C_k^{-1} = \int_0^\pi \sin^{k-1} \varphi d\varphi = \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{k+1}{2}\right)$, а $\psi^{**}(x; x_0)$ — регулярная в точке $(x; x_0)$ функция.

Аналогично доказательству, приведенному в [3], можно показать, что при малых значениях ρ_{xx_0} выполняется

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \left[|x'' - x_0''|^2 + x_{p-1}^2 + x_{p-1_0}^2 - 2x_{p-1}x_{p-1_0} \cos \varphi + \right. \\ & \quad \left. + \frac{4}{(2-\alpha)^2} \left(x_p^{\frac{2-\alpha}{2}} - x_{p_0}^{\frac{2-\alpha}{2}} \right)^2 \right]^{-\frac{\gamma-2}{2}} \sin^{k-1} \varphi d\varphi = \\ & \quad = (x_{p-1}x_{p-1_0})^{-\frac{k}{2}} \rho_{xx_0}^{2-p} + R(x; x_0), \end{aligned}$$

где $\rho_{xx_0}^2 = |x' - x_0'|^2 + \frac{4}{(2-\alpha)^2} \left(x_p^{\frac{2-\alpha}{2}} - x_{p_0}^{\frac{2-\alpha}{2}} \right)^2$. Отсюда следует, что фундаментальное решение (8) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x; x_0) &= A \frac{\Gamma(2-2\beta)\Gamma\left(\frac{\gamma-2}{2}\right)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}-\beta\right)} \times \\ & \quad \times \frac{(2-\alpha)^{2\beta}}{2^{4\beta}} (x_p x_{p_0})^{-\frac{\alpha}{4}} (x_{p-1}x_{p-1_0})^{-\frac{k}{2}} \rho_{xx_0}^{2-p} + \mathcal{E}^*(x; x_0), \quad (9) \end{aligned}$$

где $\mathcal{E}^*(x; x_0)$ — регулярная часть фундаментального решения.

Фундаментальное решение обладает следующими свойствами:

$$\mathcal{E}(\xi; x) = o(1) \text{ при } x_p \rightarrow 0, \quad (10)$$

$$\mathcal{E}(x; x_0) = O\left((\rho_{xx_0}^2)^{-\left(\frac{\gamma-2}{2} + \frac{4-3\alpha}{2(2-\alpha)}\right)}\right) \text{ при } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2} \rightarrow \infty. \quad (11)$$

2. Формулы Грина. Обозначим через $C_B^1(\Omega \cup \Gamma_0)$ множество четных по x_{p-1} один раз непрерывно дифференцируемых в $\Omega \cup \Gamma_0$ функций. Пусть $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \cap C_B^1(\Omega \cup \Gamma_0)$.

Непосредственными вычислениями можно проверить, что

$$\begin{aligned} vE[u] x_{p-1}^k + \left(\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} + x_p^\alpha \frac{\partial u}{\partial x_p} \frac{\partial v}{\partial x_p} \right) x_{p-1}^k = \\ = \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(x_{p-1}^k v \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_p} \left(x_{p-1}^k x_p^\alpha v \frac{\partial u}{\partial x_p} \right). \quad (12) \end{aligned}$$

Интегрируя обе части тождества (12) по области Ω и пользуясь формулой Остроградского, получим

$$\int_{\Omega} v E[u] x_{p-1}^k dx + \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} + x_p^\alpha \frac{\partial u}{\partial x_p} \frac{\partial v}{\partial x_p} \right) x_{p-1}^k dx = \int_{\Gamma} v A[u] x_{p-1}^k d\Gamma, \quad (13)$$

где $A[\] = \sum_{j=1}^{p-1} \cos(n, x_j) \frac{\partial}{\partial x_j} + x_p^\alpha \cos(n, x_p) \frac{\partial}{\partial x_p}$ — кономальная производная, n — внешняя нормаль к границе Γ . Меняя в формуле (13) u и v местами, имеем

$$\int_{\Omega} u E[v] x_{p-1}^k dx + \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} + x_p^\alpha \frac{\partial v}{\partial x_p} \frac{\partial u}{\partial x_p} \right) x_{p-1}^k dx = \int_{\Gamma} u A[v] x_{p-1}^k d\Gamma. \quad (14)$$

Вычитая (14) из (13), получим

$$\int_{\Omega} [v E[u] - u E[v]] x_{p-1}^k dx = \int_{\Gamma} [v A[u] - u A[v]] x_{p-1}^k d\Gamma. \quad (15)$$

Формулы (13) и (15) называются соответственно первой и второй формулами Грина для оператора E .

3. Интегральное представление и принцип максимума. Пусть функция $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \cap C_B^1(\Omega \cup \Gamma_0)$ является решением уравнения (1) в области Ω и точка $M_0(x_0) \in \Omega$. Рассмотрим сферу $S_{x_0\varepsilon}$ с центром в точке M_0 и радиуса ε такого, что $S_{x_0\varepsilon} \subset \Omega$. Обозначим через Ω_ε область, ограниченную координатными гиперплоскостями, гиперповерхностью Γ и сферой $S_{x_0\varepsilon}$ ($\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bar{S}_{x_0\varepsilon}$). Ясно, что фундаментальное решение $\mathcal{E}(x; x_0)$ принадлежит классу $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \cap C_B^1(\Omega \cup \Gamma_0)$. Применяя к функциям $\mathcal{E}(x; x_0)$ и $u(x)$ вторую формулу Грина для оператора E в области Ω_ε , получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} [\mathcal{E}(x; x_0) A[u(x)] - u(x) A[\mathcal{E}(x; x_0)]] x_{p-1}^k d\Gamma = \\ = \int_{S_{x_0\varepsilon}} [\mathcal{E}(x; x_0) A[u(x)] - u(x) A[\mathcal{E}(x; x_0)]] x_{p-1}^k dS_{x_0\varepsilon}, \end{aligned} \quad (16)$$

где A — внешняя кономаль к сфере $S_{x_0\varepsilon}$.

Переходя в формуле (14) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и выбирая значение

$$A = \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\frac{\gamma}{2}-\beta)}{4\pi^{\frac{\gamma}{2}}\Gamma(2-2\beta)} \left(\frac{4}{2-\alpha} \right)^{2\beta}, \quad (17)$$

будем иметь

$$u(x_0) = \int_{\Gamma} [\mathcal{E}(x; x_0) A[u(x)] - u(x) A[\mathcal{E}(x; x_0)]] x_{p-1}^k d\Gamma + \\ + \int_{\Gamma_1} u(x; 0) \frac{\partial \mathcal{E}(x', 0; x_0)}{\partial x_p} x_{p-1}^k dx'.$$

Отсюда и из (10) следует, что существует решение $u(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию $u(x) = o(1)$ при $x_p \rightarrow 0$. Для таких решений интегральное представление имеет вид

$$u(x_0) = \int_{\Gamma} [\mathcal{E}(x; x_0) A[u(x)] - u(x) A[\mathcal{E}(x; x_0)]] x_{p-1}^k d\Gamma, \quad (18)$$

из которого вытекает следующее свойство решения уравнения (1).

ТЕОРЕМА (ПРИНЦИП МАКСИМУМА). *Если $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \cap C_B^1(\Omega \cup \Gamma_0)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $u(x) = o(1)$ при $x_p \rightarrow 0$, то функция $u(x)$ достигает своего положительного наибольшего и отрицательного наименьшего значений на границе Γ , если она не равна нулю.*

Доказательство. Предположим, что функция $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \cap C_B^1(\Omega \cup \Gamma_0)$ удовлетворяет уравнению (1) и достигает своего положительного наибольшего значения в некоторой внутренней точке $M_0(x_0)$ области Ω . Тогда существует δ -окрестность точки x_0 , в которой $u(x) < u(x_0)$ при $x \neq x_0$ и $u(x) > 0$. Пусть $S_{x_0\delta}$ — сфера с центром в точке x_0 и радиусом δ . Полагая в интегральном представлении решения $u(x)$, что $\Gamma = S_{x_0\delta}$, получим

$$u(x_0) = \int_{S_{x_0\delta}} E(x; x_0) A[u(x)] x_{p-1}^k dS_{x_0\delta} - \\ - \int_{S_{x_0\delta}} u(x) A[E(x; x_0)] x_{p-1}^k dS_{x_0\delta} = I_1 + I_2. \quad (19)$$

Так как $u(x) > 0$ и $\mathcal{E}(x; x_0) > 0$, а кономаль A является внешней по отношению к сфере $S_{x_0\delta}$, то $A[u(x)] < 0$ и $A[\mathcal{E}(x; x_0)] < 0$, а значит, I_1 и I_2 имеют разные знаки. Если $I_1 < 0$, а $I_2 > 0$, то при $\delta \rightarrow 0$ I_1 , возрастая, стремится к нулю, а I_2 , возрастая, стремится к $u(x_0)$. Таким образом, $I_1 < 0$ и $I_2 < u(x_0)$. Учитывая это и заменяя в (19) $u(x)$ на $u(x_0)$, получим бессмысленное неравенство

$$u(x_0) < I_2 < u(x_0).$$

Следовательно, функция $u(x)$ может достигнуть своего положительного наибольшего значения лишь на границе Γ . Аналогичным образом можно доказать, что функция $u(x)$ достигает своего отрицательного наименьшего значения также на границе Γ . $\square$

СЛЕДСТВИЕ. *Если функция $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \cap C_B^1(\Omega \cup \Gamma_0)$ является решением уравнения (1), то $|u(x)| \leq \max_{\xi \in \Gamma} |u(\xi)|$. В частности, если $u|_{\Gamma} = 0$,*

$u|_{x_p=0} = 0$, то $u(x) \equiv 0$ в $\overline{\Omega}$.

4. Постановка краевых задач Дирихле и Неймана. Теоремы единственности.

ВНУТРЕННЯЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ (Задача D_i). Требуется найти четную по x_{p-1} функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), \quad (20)$$

$$E[u(x)] = 0, \quad x \in \Omega, \quad (21)$$

$$u(x) = o(1) \quad \text{при } x_p \rightarrow 0, \quad (22)$$

$$u|_{\Gamma} = \varphi(\xi), \quad \xi \in \Gamma, \quad \varphi(\xi) \in C(\Gamma). \quad (23)$$

ТЕОРЕМА 1. Задача D_i не может иметь более одного решения.

Доказательство теоремы 1 проводится с помощью принципа максимума.

ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ (Задача D_e). Требуется найти четную по x_{p-1} функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x) \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega_e}), \quad (24)$$

$$E[u(x)] = 0, \quad x \in \Omega_e, \quad (25)$$

$$u(x) = o(1) \quad \text{при } x_p \rightarrow 0, \quad (26)$$

$$u(x) = O\left((\rho_{xx_0}^2)^{-\left(\frac{\gamma-2}{2} + \frac{4-3\alpha}{2(2-\alpha)}\right)}\right) \quad \text{при } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2} \rightarrow \infty, \quad (27)$$

$$u|_{\Gamma} = \varphi(\xi), \quad \xi \in \Gamma, \quad \varphi(\xi) \in C(\Gamma). \quad (28)$$

ТЕОРЕМА 2. Задача D_e не может иметь более одного решения.

Доказательство теоремы 2 также следует из принципа максимума.

ВНУТРЕННЯЯ ЗАДАЧА НЕЙМАНА (Задача N_i). Требуется найти четную по x_{p-1} функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), \quad (29)$$

$$E[u(x)] = 0, \quad x \in \Omega, \quad (30)$$

$$u(x) = o(1) \quad \text{при } x_p \rightarrow 0, \quad (31)$$

$$A[u(x)]|_{\Gamma} = \psi(\xi), \quad \xi \in \Gamma, \quad \psi(\xi) \in C(\Gamma). \quad (32)$$

ТЕОРЕМА 3. Задача N_i не может иметь более одного решения.

Доказательство. Предположим, что задача N_i имеет два решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Тогда функция $w(x) = u_1(x) - u_2(x)$ является четной по x_{p-1} , удовлетворяет условиям (29) – (31) и граничному условию $A[w]|_{\Gamma} = 0$.

Полагая в (13) $u = v = w$, получим

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{p-1} \left(\frac{\partial w}{\partial x_j} \right)^2 + x_p^{\alpha} \left(\frac{\partial w}{\partial x_p} \right)^2 \right) x_{p-1}^k dx = \int_{\Gamma} w A[w] x_{p-1}^k d\Gamma.$$

Т.к. $A[w]|_{\Gamma} = 0$, то $\frac{\partial w}{\partial x_j} = 0$ ($j = 1, 2, \dots, p$), а значит, $w(x) = u_1(x) - u_2(x) = \text{const}$. В силу (31) $w(x) = u_1(x) - u_2(x) = 0$ или $u_1(x) \equiv u_2(x)$. $\square$

ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА НЕЙМАНА (Задача N_e). Требуется найти четную по x_{p-1} функцию $u(x)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x) \in C^2(\Omega_e) \cap C^1(\overline{\Omega_e}), \quad (33)$$

$$E[u(x)] = 0, \quad x \in \Omega_e, \quad (34)$$

$$u(x) = o(1) \quad \text{при} \quad x_p \rightarrow 0, \quad (35)$$

$$u(x) = O\left((\rho_{xx_0}^2)^{-\left(\frac{\gamma-2}{2} + \frac{4-3\alpha}{2(2-\alpha)}\right)}\right) \quad \text{при} \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2} \rightarrow \infty, \quad (36)$$

$$A[u(x)]|_{\Gamma} = \psi(\xi), \quad \xi \in \Gamma, \quad \psi(\xi) \in C(\Gamma). \quad (37)$$

ТЕОРЕМА 4. Задача N_e не может иметь более одного решения.

Доказательство. Предположим, что задача N_e имеет два решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Рассмотрим функцию $w(x) = u_1(x) - u_2(x)$, которая является четной по x_{p-1} , удовлетворяет условиям (33)–(36) и граничному условию $A[w]|_{\Gamma} = 0$.

Полагая в (13) $u = v = w$, для области Ω_{eR} получим

$$\int_{\Omega_{eR}} \left(\sum_{j=1}^{p-1} \left(\frac{\partial w}{\partial x_j} \right)^2 + x_p^\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_p} \right)^2 \right) x_{p-1}^k dx = \int_{S_R^+} w A[w] x_{p-1}^k dS_R^+.$$

Переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, получим

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^{p-1} \left(\frac{\partial w}{\partial x_j} \right)^2 + x_p^\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x_p} \right)^2 \right) x_{p-1}^k dx = 0,$$

откуда $\frac{\partial w}{\partial x_j} = 0$ ($i = 1, 2, \dots, p$), а значит, $w(x) = u_1(x) - u_2(x) = \text{const}$. Учитывая, что на бесконечности $w(x) \rightarrow 0$, имеем $u_1(x) \equiv u_2(x)$. $\square$

5. Потенциалы типа простого и двойного слоев. С помощью фундаментального решения $\mathcal{E}(x; x_0)$ образуем потенциал типа двойного слоя:

$$W(x) = \int_{\Gamma} v(\xi) A[\mathcal{E}(x; x_0)] \xi_{p-1}^k d\Gamma,$$

где $v(\xi)$ — непрерывная функция.

Потенциал $W(x)$ является регулярным решением уравнения (1) в любой области из E_p^{++} , не имеющей общих точек ни с гиперповерхностью Γ , ни с гиперплоскостями $x_{p-1} = 0$ и $x_p = 0$. В силу (10) $W(x) = o(1)$ при $x \rightarrow 0$.

ЛЕММА 1. Если Γ — поверхность Ляпунова, которая образует с гиперплоскостями $x_{p-1} = 0$ и $x_p = 0$ прямые углы, то

$$\int_{\Gamma} |A[\mathcal{E}(\xi, x)]| \xi_{p-1}^k d\Gamma \leq B, \quad (38)$$

где B — постоянная.

ЛЕММА (ГЕЛЛЕРСТЕДТ). Если Γ — поверхность Ляпунова, образующая с гиперплоскостями $x_{p-1} = 0$ и $x_p = 0$ прямые углы, то

$$\int_{\Gamma} A[\mathcal{E}(\xi, x)] \xi_{p-1}^k d\Gamma = \begin{cases} -1, & x \in \Omega, \\ -\frac{1}{2}, & x \in \Gamma, \\ 0, & x \in \Omega_e. \end{cases} \quad (39)$$

Доказательство следует из формул Грина для оператора E и леммы 1.

ТЕОРЕМА 5. Пусть Γ — поверхность Ляпунова, которая образует с гиперплоскостями $x_{p-1} = 0$ и $x_p = 0$ прямые углы, то при $v \in C(\Gamma)$ имеют место следующие предельные соотношения:

$$W_i(x_0) = -\frac{v_0}{2} + \widetilde{W}(x_0),$$

$$W_e(x_0) = \frac{v_0}{2} + \widetilde{W}(x_0),$$

где $W_i(x_0)$ и $W_e(x_0)$ означают предельные значения потенциала $W(x)$ в точке $x_0 \in \Gamma$ при $x \rightarrow x_0$ соответственно изнутри и извне границы Γ , а $\widetilde{W}(x_0)$ — прямое значение потенциала $W(x)$ в точке $x_0 \in \Gamma$.

Доказательство следует из лемм 1 и 2.

С помощью фундаментального решения $\mathcal{E}(x; x_0)$ уравнения (1) образуем поверхностный потенциал типа простого слоя:

$$V(x) = \int_{\Gamma} \mu(\xi) \mathcal{E}(x; x_0) \xi_{p-1}^k d\Gamma, \quad (40)$$

где $\mu(x)$ — непрерывная функция на Γ .

Очевидно, что потенциал $V(x)$ — регулярное решение уравнения (1) в любой области, лежащей в E_p^{++} , не имеющей общих точек ни с гиперповерхностью Γ , ни с гиперплоскостями $x_{p-1} = 0$ и $x_p = 0$.

Из формул (10) и (11) следует, что потенциал $V(x)$ обладает следующими свойствами:

$$V(x) = o(1) \text{ при } x_p \rightarrow 0, \quad (41)$$

$$V(x) = O\left((\rho_{xx_0}^2)^{-\left(\frac{\gamma-2}{2} + \frac{m+4}{2(m+2)}\right)}\right) \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (42)$$

Фундаментальное решение уравнения (1) имеет такую же особенность, что и уравнение Лапласа, поэтому потенциал (40) на границе Γ ведёт себя так же, как и гармонический потенциал простого слоя, т.е. имеют место следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 6. Пусть Γ — поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями $x_{p-1} = 0$ и $x_p = 0$ прямые углы. Тогда если $\mu \in C(\Gamma)$, то потенциал простого слоя $V(x)$ непрерывен в E_p^{++} .

ТЕОРЕМА 7. Пусть Γ — поверхность Ляпунова и образует с гиперплоскостями $x_{p-1} = 0$ и $x_p = 0$ прямые углы. Тогда при $\mu \in C(\Gamma)$ имеют место следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} A_{x_0} [V(x)] = A_{x_0} [V(x_0)]_i = \frac{\mu_0}{2} + \widetilde{A_{x_0}} [V(x_0)],$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} A_{x_0} [V(x)] = A_{x_0} [V(x_0)]_e = -\frac{\mu_0}{2} + \widetilde{A_{x_0}} [V(x_0)],$$

где $A_{x_0} [V(x_0)]_i$ и $A_{x_0} [V(x_0)]_e$ — предельные значения конормальной производной потенциала типа простого слоя в точке $x_0 \in \Gamma$ соответственно изнутри и извне границы Γ , $\mu_0 = \mu(x_0)$, а $\widetilde{A_{x_0}} [V(x_0)]$ — прямое значение конормальной производной потенциала типа простого слоя.

6. Сведение задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям. Решение задачи D_i будем искать в виде потенциала типа двойного слоя

$$u(x) = W(x) = \int_{\Gamma} v(\xi) A [\mathcal{E}(\xi, x)] \xi_{p-1}^k d\Gamma. \quad (43)$$

Очевидно, что функция $u(x)$ удовлетворяет условиям (20)–(22) внутренней задачи Дирихле. Плотность $\nu(\xi)$ — пока неопределенная функция. Ее найдем из требования, чтобы функция (43) удовлетворяла граничному условию (23) задачи D_i . С этой целью подставим $u(x)$ в граничное условие (23) и, учитывая формулу предельного значения потенциала типа двойного слоя, получим

$$-\frac{\nu(x)}{2} + \int_{\Gamma} \nu(\xi) A [\mathcal{E}(\xi, x)] \xi_{p-1}^k d\Gamma = \varphi(x).$$

Таким образом, задача D_i свелась к следующему интегральному уравнению:

$$\nu(x) - 2 \int_{\Gamma} \nu(\xi) A [\mathcal{E}(\xi, x)] \xi_{p-1}^k d\Gamma = -2\varphi(x). \quad (44)$$

Аналогичным образом задачи D_e , N_i и N_e сводятся соответственно к уравнениям:

$$\nu(x) + 2 \int_{\Gamma} \nu(\xi) A [\mathcal{E}(\xi, x)] \xi_{p-1}^k d\Gamma = 2\varphi(x), \quad (45)$$

$$\mu(x) + 2 \int_{\Gamma} \mu(\xi) A_x [\mathcal{E}(\xi, x)] \xi_{p-1}^k d\Gamma = -2\psi(x), \quad (46)$$

$$\mu(x) - 2 \int_{\Gamma} \mu(\xi) A_x [\mathcal{E}(\xi, x)] \xi_{p-1}^k d\Gamma = -2\psi(x). \quad (47)$$

Отметим следующие свойства интегральных уравнений (44)–(47).

1. Из формулы (9) следует, что данные уравнения являются уравнениями со слабой особенностью.

2. Ядра $A [\mathcal{E}(\xi, x)]$ и $A_x [\mathcal{E}(\xi, x)]$ получаются друг из друга перестановкой местами точек ξ и x . Так как эти ядра вещественные, то они сопряженные, а значит, уравнения (44) и (47), (45) и (46) — попарно сопряженные интегральные уравнения. Следовательно, для них справедливы теоремы Фредгольма.

7. Исследование интегральных уравнений. Рассмотрим однородное интегральное уравнение, соответствующее задаче N_e :

$$\mu(x) - 2 \int_{\Gamma} \mu(\xi) A_x [\mathcal{E}(\xi, x)] \xi_{p-1}^k d\Gamma = 0. \quad (48)$$

Если $\bar{\mu}(\xi)$ — ненулевое решение этого уравнения, то функция

$$\bar{u}(x) = \int_{\Gamma} \bar{\mu}(\xi) \mathcal{E}(\xi, x) \xi_{p-1}^k d\Gamma$$

удовлетворяет условиям (33)–(36) внешней задачи Неймана и граничному условию $A_x [\bar{u}(x)]|_{\Gamma} = 0$, т. е.

$$A_x [\bar{u}(x)]_e = -\frac{\bar{\mu}(x)}{2} + \int_{\Gamma} \bar{\mu}(\xi) A_x [\mathcal{E}(\xi; x)] \xi_{p-1}^k d\Gamma = 0. \quad (49)$$

По теореме единственности для задачи $N_e \bar{u}(x) = 0$, $x \in \Omega_e$. Так как потенциал простого слоя есть непрерывная функция в E_p^{++} , то $\bar{u}(x) = 0$, $x \in \Gamma$.

В области Ω функция $\bar{u}(x)$ удовлетворяет уравнению (1) и обращается в нуль на границе Γ . По теореме о единственности для задачи $D_i \bar{u}(x) = 0$, $x \in \Omega$. Следовательно,

$$A_x [\bar{u}(x)]_i = \frac{\bar{\mu}(x)}{2} + \int_{\Gamma} \bar{\mu}(\xi) A_x [\mathcal{E}(\xi; x)] \xi_{p-1}^k d\Gamma = 0. \quad (50)$$

Вычитая из равенства (50) равенство (49), получим $\bar{\mu}(\xi) = 0$, $x \in \Omega$, т. е. однородное интегральное уравнение (48) имеет только тривиальное решение. В силу альтернативы Фредгольма интегральное уравнение (47) задачи N_e однозначно разрешимо для любой непрерывной на Γ функции $\psi(x) \in \Gamma$.

Таким образом, значение $\lambda = 2$ — правильное для ядра $A_x [\mathcal{E}(\xi; x)]$; по известной теореме Фредгольма оно является правильным и для сопряженного ядра $A [\mathcal{E}(\xi; x)]$.

Отсюда следует, что интегральное уравнение (44) задачи D_i однозначно разрешимо для любой непрерывной функции $\varphi(x) \in C(\Gamma)$.

Из разрешимости интегральных уравнений задач D_i и N_e следует, что разрешимы и сами задачи. Это приводит к следующим теоремам.

ТЕОРЕМА 8. *Если Γ — поверхность Ляпунова, которая образует с гиперплоскостями $x_{p-1} = 0$ и $x_p = 0$ прямые углы, то задача D_i для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала типа двойного слоя.*

ТЕОРЕМА 9. *Если Γ — поверхность Ляпунова, которая образует с гиперплоскостями $x_{p-1} = 0$ и $x_p = 0$ прямые углы, то задача N_e для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала типа простого слоя.*

Исследование второй пары интегральных уравнений (45) и (46), соответствующих задачам D_e и N_i , приводит к следующим теоремам.

ТЕОРЕМА 10. *Если Γ — поверхность Ляпунова, образующая с гиперплоскостями $x_{p-1} = 0$ и $x_p = 0$ прямые углы, и при этом выполняется условие*

$$\int_{\Gamma} \psi(\xi) \xi_{p-1}^k d\xi = 0,$$

то задача N_i для этой поверхности разрешима при любых непрерывных граничных данных и решение можно представить в виде потенциала типа простого слоя.

ТЕОРЕМА 11. *Если Γ — поверхность Ляпунова, которая образует с гиперплоскостями $x_{p-1} = 0$ и $x_p = 0$ прямые углы, то задача D_e для этой*

поверхности однозначно разрешима при любых граничных данных и решение можно представить в виде

$$u(x) = \int_{\Gamma} v(\xi) A[\mathcal{E}(\xi; x)] \xi_{p-1}^k d\Gamma + \frac{1}{\rho_{xx_0}^{\gamma-2+2\beta}} \int_{\Gamma} \nu(\xi) \xi_{p-1}^k d\Gamma.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Смирнов, М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения [Текст] / М. М. Смирнов. — М.: Наука, 1966. — 292 с.
2. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. — М.: Наука, 1966. — 720 с.
3. Weinstein, A. Discontinuous integrals and generalized potential theory [Text] / A. Weinstein // Trans. Amer. Math. Soc, 1948. Vol. 63, № 2. — P. 342–354.

Поступила в редакцию 07/IV/2008;
в окончательном варианте — 30/VI/2008.

MSC: 35J70, 35A07

BOUNDARY VALUE PROBLEM SOLUTION OF A SECOND TYPE CONFLUENT B-ELLIPTICAL EQUATION

E. V. Chebotareva

Tatar State University of Humanities and Education,
420021, Kazan', Tatarstan str., 2.

E-mail: elvchb@mail.ru

Fundamental solution and potential of simple fiber and double layer types for confluent B-elliptical equation of the second kind are built in the given research work. With the help of above mentioned potentials boundary problems are converted into Fredholm integral equations of the second kind.

Key words: confluent B-elliptical equation of second kind, method of potentials, external and internal problems of Neumann, external and internal problems of Dirichlet.

Original article submitted 07/IV/2008;
revision submitted 30/VI/2008.

Chebotareva El'vira Valer'evna, Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Analysis of Tatar State University of Humanities and Education.