Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Сафина, Решение задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с оператором Бесселя методом теории интегральных уравнений, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 2(), 29–37

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu604>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 18:06:37

УДК 517.956.6

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
СМЕШАННОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ
МЕТОДОМ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ*Р. М. Сафина*Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет,
420021, г. Казань, ул. Татарстан, 2.

E-mail: rimma77705@mail.ru

Доказывается существование и единственность решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева–Бицадзе с оператором Бесселя

$$x^{-k} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \operatorname{sign} y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

*в области D , ограниченной спрямляемой жордановой кривой Γ , осью Oy и характеристиками $OC: x+y=0$ и $BC: x-y=1$, методом линейных интегральных уравнений.***Ключевые слова:** уравнения смешанного типа, задача Трикоми, B -эллиптические уравнения, B -гиперболические уравнения, задача N , задача Коши.**Постановка задачи Трикоми и единственность её решения.** Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$E_B(u) = B_x u + \operatorname{sign} y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

где $B_x = x^{-k} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^k \frac{\partial}{\partial x} \right)$ — оператор Бесселя, $0 < k < 2$ — постоянная.При $y > 0$ уравнение (1) является B -эллиптическим, а при $y < 0$ — B -гиперболическим; $y = 0$ — B -параболическая линия. Уравнение (1) при $y < 0$ имеет два различных семейства вещественных характеристик, которые определяются уравнениями $x - y = C_1$, $x + y = C_2$.Пусть Γ — спрямляемая жорданова кривая с концами в точках $A(0, 1)$ и $B(1, 0)$, лежащая в первой четверти E_2^{++} координатной плоскости. Обозначим через D область, ограниченную кривой Γ , осью Oy и характеристиками $OC: x + y = 0$ и $BC: x - y = 1$.Части области D , в которых $y > 0$ и $y < 0$, обозначим соответственно через D^+ и D^- . Поскольку уравнение (1) B -эллиплично в D^+ и B -гиперболично в D^- , то их будем называть соответственно B -эллиптической и B -гиперболической частями области D , а эту последнюю — смешанной областью.**Задача Трикоми.** Найти чётную по x функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D \cup OA \cup OB) \cap C^2(D^+ \cup D^-); \quad (2)$$

$$E_B(u) = 0, \quad (x, y) \in (D^+ \cup D^-); \quad (3)$$

Сафина Римма Марселевна — ассистент кафедры экономической информатики и математики Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета; аспирантка.

$$u|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma; \quad (4)$$

$$u|_{OC} = u(x, y)|_{y=-x} = u(x, -x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad (5)$$

где φ — заданная достаточно гладкая чётная по x функция.

Из условия (2) следует, что

$$\lim_{y \rightarrow 0-} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0+} u(x, y), \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (6)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0-} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0+} u_y(x, y), \quad 0 \leq x < 1. \quad (7)$$

Условия (6) и (7) называются условиями склеивания, или сопряжения.

ТЕОРЕМА 1. Задача Трикоми не может иметь более одного решения.

Доказательство. Пусть $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ — два предполагаемых решения задачи Трикоми. Тогда их разность $\omega(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$ чётна по x , удовлетворяет уравнениям

$$\square_B \omega \equiv x^{-k} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^k \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D^-; \quad (8)$$

$$\triangle_B \omega \equiv x^{-k} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^k \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D^+, \quad (9)$$

условиям (2), (3), (6) и (7) задачи Трикоми и однородным граничным условиям:

$$\omega|_{\Gamma} = 0; \quad (10)$$

$$\omega|_{OC} = \omega(x, y)|_{y=-x} = \omega(x, -x) = 0. \quad (11)$$

Положим

$$\omega(x, 0-0) = \omega(x, 0+0) = \mu(x); \quad (12)$$

$$\omega_y(x, 0-0) = \omega_y(x, 0+0) = \nu(x). \quad (13)$$

Из условия (2) задачи Трикоми следует, что

$$\mu(x) \in C^1([0, 1]), \quad \nu(x) \in C([0, 1)).$$

Предположим, что эти функции также удовлетворяют условию

$$\mu(x) = 0, \quad \nu(x) = 0 \quad \text{при } x > 1.$$

Сначала докажем, что

$$\int_0^1 \mu(x) \nu(x) x^k dx \geq 0. \quad (14)$$

Рассмотрим функцию ω в области D^+ . Она в этой области является B -гармонической функцией; в силу известного принципа экстремума для B -гармонических функций функция ω достигает наибольшего и наименьшего значений на границе $\Gamma \cup [0, B]$ области D^+ . Так как $\omega|_{\Gamma} = 0$, то при $\omega \neq 0$

эти значения могут достигаться только во внутренних точках отрезка $[0, B]$. Причём наибольшее значение должно быть положительным, а наименьшее значение — отрицательным, поэтому $\mu(0) = \mu(1) = 0$. Также известно, что функция $\omega(x, y)$ не имеет локальных экстремумов во внутренних точках области D^+ . Пусть в точке $x_1 \in (0, B)$ функция ω достигает наибольшего положительного значения. Тогда существует интервал (α_1, β_1) , содержащий точку x_1 , где $\mu(x) > 0$ и $\nu(x) \geq 0$, так как когда точка $(x, y) \in D^+$ стремится к точке $(x_1, 0)$, функция $\omega(x, y)$, возрастая, стремится к $\mu(x)$. Поэтому в этих точках

$$\mu(x)\nu(x) \geq 0. \quad (15)$$

Если в точке $x_2 \in (0, B)$ функция $\omega(x, y)$ достигает наименьшего отрицательного значения, то существует интервал (α_2, β_2) , где

$$\mu(x)\nu(x) \geq 0. \quad (16)$$

В точках x_3 , где $\mu(x_3) = 0$, выполняется

$$\mu(x_3)\nu(x_3) = 0. \quad (17)$$

Из (15), (16) и (17) следует требуемое (14).

Теперь докажем, что $\omega \equiv 0$ в D .

Непосредственным вычислением можно проверить, что имеет место тождество

$$x^k \omega \triangle_{B\omega} = \frac{\partial}{\partial x} \left(x^k \omega \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(x^k \omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) - \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] x^k.$$

Так как $\triangle_{B\omega} \equiv 0$ в D^+ , то

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x^k \omega \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(x^k \omega \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) - \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] x^k \equiv 0. \quad (18)$$

Интегрируя это тождество по области D^+ , с учётом $\omega|_{\Gamma} = 0$ получаем

$$\iint_{D^+} (\omega_x^2 + \omega_y^2) x^k dx dy + \int_0^1 \omega(x, 0) \omega_y(x, 0) x^k dx = 0. \quad (19)$$

Отсюда и из (14) легко заключаем, что $\omega_x = 0$ и $\omega_y = 0$. Таким образом, $\omega = C = \text{const}$. Так как $\omega|_{\Gamma} = 0$, то $C = 0$ и $\omega \equiv 0$ в D^+ . Отсюда также имеем, что

$$\omega(x, 0) = 0, \quad \omega_y(x, 0) = 0. \quad (20)$$

Теорема единственности будет доказана, если мы установим, что $\omega \equiv 0$ в D^- . Возьмём в D^- произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$. Через эту точку проведём характеристические линии $M_0B_0 : x - y = x_0 - y_0$ и $M_0A_0 : x + y = x_0 + y_0$ до их пересечения с осью абсцисс. Обозначим через D_0 область, ограниченную характеристическими линиями M_0B_0 , M_0A_0 и отрезком оси абсцисс.

Нетрудно проверить, что имеет место тождество

$$x^k \omega_y \square_B \omega = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ x^k \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \left(x^k \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right).$$

Проинтегрируем это тождество по области D_0 . Интеграл от левой части равен нулю, так как ω является решением уравнения (8).

Пользуясь формулой Остроградского, с учётом (20) получаем

$$\int_{M_0 B_0 \cup M_0 A_0} \left\{ \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right] \cos(\nu, y) - 2 \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} \cos(\nu, x) \right\} x^k dS = 0.$$

Умножая обе части последнего равенства на постоянную $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\nu, y)$ и внося её под знак интеграла, получаем

$$\int_{M_0 B_0 \cup M_0 A_0} \left[\frac{\partial \omega}{\partial y} \cos(\nu, y) - \frac{\partial \omega}{\partial x} \cos(\nu, x) \right]^2 x^k dS = 0.$$

Отсюда следует, что на линии $M_0 B_0$ выполняется условие

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} \cos(\nu, y) - \frac{\partial \omega}{\partial x} \cos(\nu, x) = 0$$

и, следовательно, $\frac{\omega_x}{\cos(\nu, x)} = \frac{\omega_y}{\cos(\nu, y)}$ на линии $M_0 B_0$. Это равенство означает, что на линии $M_0 B_0$ вектор $\text{grad } \omega$ коллинеарен нормали ν и, следовательно, ортогонален линии $M_0 B_0$. Поэтому $\frac{\partial \omega}{\partial l} = \text{Pr}_l \text{grad } \omega = 0$, где $l = \frac{\overrightarrow{M_0 B_0}}{|M_0 B_0|}$. Отсюда следует, что $\omega = \text{const}$ вдоль линии $M_0 B_0$. В частности, значение ω в точке $M_0(x_0, y_0)$ совпадает со значением ω в точке B_0 . В этой точке в силу (20) $\omega = 0$. Поэтому $\omega(x_0, y_0) = 0$ и, так как точка $M_0(x_0, y_0)$ была взята произвольно в D^- , $\omega \equiv 0$ в D^- .

Таким образом, $\omega \equiv 0$ в D и, следовательно, $u_1(x, y) \equiv u_2(x, y)$. Теорема доказана. $\square$

Функциональные соотношения между $\mu(x)$ и $\nu(x)$. Задачу Трикоми будем решать методом интегральных уравнений. Нам потребуются соотношения между $\mu(x)$ и $\nu(x)$ из обеих подобластей D^- и D^+ . Для вывода этих соотношений рассмотрим вспомогательные задачи.

В B -гиперболической подобласти используем решение задачи Коши.

Задача Коши. Найти чётную по x функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D^-}) \cap C^1(D^- \cup OC) \cap C^2(D^-); \quad (21)$$

$$\square_B u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D^-; \quad (22)$$

$$\begin{aligned} u|_{OB} &= u|_{y=0} = \mu(x), \quad 0 \leq x \leq 1; \\ u_y|_{OB} &= u_y|_{y=0} = \nu(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (23)$$

Известно [1], что задача Коши (21)–(23) имеет единственное решение и это решение может быть представлено в виде

$$u(x, y) = A_k \left\{ \int_0^1 \mu(t) \left[T_t^x \int_0^\infty \cos(\xi y) j_\nu(t\xi) \xi^k d\xi \right] t^k dt + \right. \\ \left. + \int_0^1 \nu(t) \left[T_t^x \int_0^\infty \sin(\xi y) j_\nu(t\xi) \xi^{k-1} d\xi \right] t^k dt \right\}, \quad (24)$$

где $A_k = 1/2^{k-1} \Gamma^2(\frac{k+1}{2})$, $j_\nu(t) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) J_\nu(t)/t^\nu$, $J_\nu(t)$ — функция Бесселя, $\nu = (k-1)/2$, T_t^x — оператор обобщённого сдвига.

Полагая здесь $y = -x$, согласно условию (5) имеем

$$0 = \int_0^1 \mu(t) \left[T_t^x \int_0^\infty \cos(\xi x) j_\nu(t\xi) \xi^k d\xi \right] t^k dt - \\ - \int_0^1 \nu(t) \left[T_t^x \int_0^\infty \sin(\xi x) j_\nu(t\xi) \xi^{k-1} d\xi \right] t^k dt.$$

Это равенство запишем в виде

$$0 = \int_0^1 \mu(t) \left[T_t^x \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \sin(\xi x) j_{\frac{k-1}{2}}(t\xi) \xi^{k-1} d\xi \right] t^k dt - \\ - \int_0^1 \nu(t) \left[T_t^x \int_0^\infty \sin(\xi x) j_{\frac{k-1}{2}}(t\xi) \xi^{k-1} d\xi \right] t^k dt. \quad (25)$$

Вычислим значение внутреннего интеграла

$$I = \int_0^\infty \sin(\xi x) j_{\frac{k-1}{2}}(t\xi) \xi^{k-1} d\xi. \quad (26)$$

Известно [2], что

$$\sin(\xi x) = \left(\frac{\pi \xi x}{2} \right)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(\xi x). \quad (27)$$

Заменяя в (26) $j_{\frac{k-1}{2}}(t\xi)$ на его вышеуказанное значение и $\sin(\xi x)$ на значение из (27), получаем

$$I = \sqrt{\pi} 2^{\frac{k-2}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) x^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1-k}{2}} \int_0^\infty J_{\frac{1}{2}}(x\xi) J_{\frac{k-1}{2}}(\xi t) \xi^{\frac{k}{2}} d\xi. \quad (28)$$

Известно [3], что

$$\int_0^\infty J_{\frac{1}{2}}(x\xi) J_{\frac{k-1}{2}}(\xi t) \xi^{\frac{k}{2}} d\xi = \frac{2^{\frac{k}{2}} t^{\frac{k-1}{2}} (x^2 - t^2)_+^{-\frac{k}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{2-k}{2}\right)},$$

где

$$(x^2 - t^2)_+^{-\frac{k}{2}} = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 < x < t, \\ (x^2 - t^2)_+^{-\frac{k}{2}}, & \text{при } 0 < t < x. \end{cases} \quad (29)$$

Отсюда и из (28) следует, что

$$I = \frac{\sqrt{\pi} 2^{k-1} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-k}{2}\right)} (x^2 - t^2)_+^{-\frac{k}{2}}. \quad (30)$$

Заменяя внутренние интегралы в (25) на их значения из (30), получаем

$$0 = \int_0^1 \mu(t) T_t^x \left[\frac{\partial}{\partial x} (x^2 - t^2)_+^{-\frac{k}{2}} \right] t^k dt - \int_0^1 \nu(t) T_t^x \left[(x^2 - t^2)_+^{-\frac{k}{2}} \right] t^k dt. \quad (31)$$

В силу (29) это равенство может быть записано в виде

$$0 = \int_0^x \mu(t) T_t^x \left[\frac{\partial}{\partial x} (x^2 - t^2)_+^{-\frac{k}{2}} \right] t^k dt - \int_0^x \nu(t) T_t^x \left[(x^2 - t^2)_+^{-\frac{k}{2}} \right] t^k dt$$

или

$$0 = k \int_0^x \mu(t) T_t^x \left[(x^2 - t^2)_+^{-\frac{k+2}{2}} x \right] t^k dt + \int_0^x \nu(t) T_t^x \left[(x^2 - t^2)_+^{-\frac{k}{2}} \right] t^k dt. \quad (32)$$

Формула (32) даёт второе функциональное уравнение между $\mu(x)$ и $\nu(x)$, которое определяется из того условия, что решение $u(x, y)$ уравнения (1) в области D^- должно принимать нулевое значение на характеристике OC .

В B -эллиптической подобласти рассмотрим задачу N .

Задача N . Найти чётную по x функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D^+}) \cap C^1(D^+ \cup OB \cup OA) \cap C^2(D^+); \quad (33)$$

$$\Delta_B u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D^+; \quad (34)$$

$$u|_{\Gamma} = \varphi(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \Gamma; \quad (35)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \nu(x), \quad 0 < x < 1. \quad (36)$$

Нетрудно доказать, что задача N (33)–(36) имеет единственное решение и оно может быть представлено в виде

$$u(x, y) = - \int_0^1 \nu(t) \left[\int_{\Gamma} \varepsilon(t, 0; \xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n_p} G(\xi, \eta; x, y) \xi^k d\Gamma - \varepsilon(t, 0; x, y) \right] t^k dt - \\ - \int_{\Gamma} \varphi(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n_p} G(\xi, \eta; x, y) \xi^k d\Gamma, \quad (37)$$

где $G(\xi, \eta; x, y)$ — функция Грина.

Полагая здесь $y = 0$ и принимая во внимание (12), получаем

$$\mu(x) = - \int_0^1 \nu(t) Q_1(t, x) t^k dt - \int_{\Gamma} \varphi(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n_p} G(\xi, \eta; x, 0) \xi^k d\Gamma, \quad (38)$$

где

$$Q_1(t, x) = \int_{\Gamma} \varepsilon(t, 0; \xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n_p} G(\xi, \eta; x, 0) \xi^k d\Gamma - \varepsilon(t, 0; x, 0). \quad (39)$$

Формула (38) даёт первое функциональное уравнение между $\mu(x)$ и $\nu(x)$, которое определяется из того условия, что решение $u(x, y)$ уравнения (1) в области D^+ при $y = 0$ должно принимать значение $\mu(x)$.

Существование решения задачи Трикоми.

Сведение задачи Трикоми к интегральному уравнению. Вопрос о существовании решения задачи Трикоми (2)–(7) эквивалентен вопросу о разрешимости уравнений (38) и (32) относительно $\mu(t)$ и $\nu(t)$.

В силу (14) равенство (32) имеет место только при условии

$$k\mu(t)T_t^x \left[(x^2 - t^2)^{-\frac{k+2}{2}} x \right] + \nu(t)T_t^x \left[(x^2 - t^2)^{-\frac{k}{2}} \right] = 0$$

при $0 < t < x$ и $0 < x < 1$, откуда

$$\nu(t) = K_1(x, t)\mu(t), \quad (40)$$

где

$$K_1(t, x) = -k \frac{T_t^x \left[(x^2 - t^2)^{-\frac{k+2}{2}} x \right]}{T_t^x \left[(x^2 - t^2)^{-\frac{k}{2}} \right]}. \quad (41)$$

Заменив в (38) функцию $\nu(t)$ на её значение из (40), получаем

$$\mu(x) = k \int_0^1 \mu(t) K(t, x) dt + F(x), \quad (42)$$

где

$$K(t, x) = K_2(t, x)Q_1(t, x), \quad (43)$$

$$F(x) = - \int_{\Gamma} \varphi(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n_p} G(\xi, \eta; x, 0) \xi^k d\Gamma, \quad (44)$$

$$K_2(t, x) = K_1(t, x)t^k.$$

Исследование интегрального уравнения (42). Сначала исследуем ядро

$$K(t, x) = K_2(t, x)Q_1(t, x).$$

Из (39) видно, что функция $Q_1(t, x)$ при $t = x$ имеет интегрируемую особенность. Рассмотрим функцию

$$K_2(t, x) = -k \frac{t^k x T_t^x \left[(x^2 - t^2)^{-\frac{k+2}{2}} \right]}{T_t^x \left[(x^2 - t^2)^{-\frac{k}{2}} \right]}.$$

Так как при $0 < t < x$ $(x^2 - t^2)^{-\frac{k}{2}} > 0$ и $(x^2 - t^2)^{-\frac{k+2}{2}} > 0$, то в силу свойства положительности оператора $T_t^x T_t^x (x^2 - t^2)^{-\frac{k}{2}} > 0$ и $T_t^x (x^2 - t^2)^{-\frac{k+2}{2}} > 0$. Поэтому функцию $K_2(t, x)$ можно записать в виде

$$K_2(t, x) = -k \frac{t^k x T_t^x |x^2 - t^2|^{-\frac{k+2}{2}}}{T_t^x |x^2 - t^2|^{-\frac{k}{2}}},$$

или

$$K_2(t, x) = -k \frac{x t^{\frac{k-2}{2}} \int_0^\pi |t - 2x \cos \varphi|^{-\frac{k+2}{2}} \sin^{k-1} \varphi d\varphi}{t^{-\frac{k}{2}} \int_0^\pi |t - 2x \cos \varphi|^{-\frac{k}{2}} \sin^{k-1} \varphi d\varphi},$$

откуда при $t = x$:

$$\begin{aligned} K_2(x, x) &= -k \frac{x^{-1} \int_0^\pi |1 - 2 \cos \varphi|^{-\frac{k+2}{2}} \sin^{k-1} \varphi d\varphi}{x^{-k} \int_0^\pi |1 - 2 \cos \varphi|^{-\frac{k}{2}} \sin^{k-1} \varphi d\varphi} = \\ &= -k \frac{x^{k-1} \int_0^\pi |1 - 2 \cos \varphi|^{-\frac{k+2}{2}} \sin^{k-1} \varphi d\varphi}{\int_0^\pi |1 - 2 \cos \varphi|^{-\frac{k}{2}} \sin^{k-1} \varphi d\varphi}. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что при $0 < k < 2$ существует число M такое, что

$$\frac{\int_0^\pi |1 - 2 \cos \varphi|^{-\frac{k+2}{2}} \sin^{k-1} \varphi d\varphi}{\int_0^\pi |1 - 2 \cos \varphi|^{-\frac{k}{2}} \sin^{k-1} \varphi d\varphi} < M.$$

Поэтому функция $K_2(t, x)$ при $t = x$ также имеет интегрируемую особенность.

Таким образом, ядро интегрального уравнения (42) имеет слабую особенность, а функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[0; 1]$. Поэтому для интегрального уравнения (42) применима теория интегральных уравнений Фредгольма со слабой особенностью.

При $\varphi(\xi, \eta) = 0$ имеем однородное интегральное уравнение

$$\mu(x) = k \int_0^1 \mu(t) K(t, x) dt, \quad (45)$$

соответствующее неоднородному интегральному уравнению (42), и задачу Трикоми с однородными граничными условиями

$$u|_\Gamma = 0, \quad u|_{OC} = u|_{y=-x} = 0.$$

В силу теоремы единственности задача Трикоми имеет только нулевое решение. Поэтому

$$u(x, 0) = \mu(x) = 0, \quad u_y(x, 0) = \nu(x) = 0.$$

Таким образом, однородное интегральное уравнение (45) имеет только нулевое решение. В силу теоремы Фредгольма неоднородное интегральное уравнение (42) однозначно разрешимо, и вместе с ним однозначно разрешима задача Трикоми. Это приводит к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. Пусть Γ — кривая Ляпунова, образующая с координатными осями прямой угол. Тогда для этой кривой при $\varphi \in C(\Gamma)$ разрешима задача Трикоми, и решение может быть представлено в B -эллиптической области D^+ в виде (37) и в B -гиперболической области D^- в виде (24).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мухлисов, Ф. Г. Решение задачи Коши для одного B -гиперболического уравнения методом интеграла Фурье—Бесселя [Текст] / Ф. Г. Мухлисов, С. М. Гафурова // Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы: Тр. Междунар. научн. конф. — Стерлитамак, 2003. — Т. 1. — С. 183–187.
2. Неддон, И. С. Преобразования Фурье—Бесселя [Текст] / И. С. Неддон. — М.: Иностран. лит., 1955. — 667 с.
3. Справочник по специальным функциям [Текст] / под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. — М.: Наука, 1955. — 829 с.

Поступила в редакцию 31/VII/2008;
в окончательном варианте — 18/X/2008.

MSC: 35M10, 35E15

THE SOLUTION OF TRICOMI PROBLEM FOR THE MIXED TYPE EQUATION WITH BESSEL OPERATOR WITH THE METHOD OF THE THEORY OF THE INTEGRAL EQUATIONS

R. M. Safina

Tatar State University of Humanities and Education,
420021, Kazan, Tatarstan st., 2.

E-mail: rimma77705@mail.ru

In the given work existence and uniqueness of the solution of a problem of Tricomi for the equation Lavrentiev–Bizadze with the operator of Bessel:

$$x^{-k} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \operatorname{sign} y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

in the area D , limited to the rectifiable curve Γ , axis Oy and characteristics OC : $x + y = 0$ and BC : $x - y = 1$, by a method of the integral equations is proved.

Key words: the equation of mixed type, Tricomi problem, B -elliptic equation, B -hyperbolic equation, N problem, Cauchy problem.

Original article submitted 31/VII/2008;
revision submitted 18/X/2008.

Safina Rimma Marselevna, Postgraduate Student, Dept. of Economic Computer Science and Mathematics of Tatar State University of Humanities and Education.