Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Вавилов, В. С. Федотова, Классическая теорема Ляпунова для дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 2(), 6–12

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu605>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 07:50:25

Дифференциальные уравнения

УДК 517.91

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ЛЯПУНОВА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С. А. Вавилов¹, В. С. Федотова²

¹ Санкт-Петербургский государственный университет,
198904, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9.

² Ленинградский государственный университет им. А. С. Пушкина,
196605, Санкт-Петербург, Пушкин, Петербургское шоссе, 10.

E-mails: svavilov@mail.wplus.net; vera1983@yandex.ru

Формулируется теорема, аналогичная классической теореме Ляпунова для случая дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах. В качестве примера рассматривается дифференциальное уравнение в частных производных. Полученный результат автоматически даёт хорошо известные условия существования континуума периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме того, с использованием теории топологической степени, эти условия могут быть сделаны менее жесткими, чем они были сформулированы с использованием бифуркационной теории Хопфа.

Ключевые слова: теорема Ляпунова, гильбертово пространство, периодические решения, фредгольмов оператор, специальная неэквивалентная замена переменных.

Введение. В своей классической теореме Ляпунов [1] исследовал класс квазилинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = Az + F(z), \quad (1)$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, A — матрица $[n \times n]$, F — нелинейный вектор-функционал, такой, что $F(0) = 0$, который образует континуум периодических решений в окрестности начала координат. Этот класс систем был определен Ляпуновым для аналитических правых частей (1) и при выполнении следующих предположений.

- a. Матрица A невырожденная и имеет пару собственных значений $\pm i\omega_0$.
- b. Для всех $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq \pm 1$, $ik\omega_0$ не является собственным значением A .

Следует отметить, что выполнение предположений a) и b) подразумевает

*Вавилов Сергей Анатольевич — профессор кафедры экономической кибернетики Санкт-Петербургского государственного университета; д.ф.-м.н., профессор.
Федотова Вера Сергеевна — ассистент кафедры высшей математики Ленинградского государственного университета им. А. С. Пушкина; аспирантка.*

более конкретную структуру системы (1):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\omega_0 y + F_1(x, y, x_3, \dots, x_n), \\ \frac{dy}{dt} = \omega_0 x + F_2(x, y, x_3, \dots, x_n), \\ \frac{dx_i}{dt} = a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n + F_i(x, y, x_3, \dots, x_n), \end{cases} \quad (2)$$

$\omega_0 \neq 0$, $i = 3, \dots, n$, и отсюда матрица A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & \mathbb{O} \\ \omega_0 & 0 & \\ \mathbb{O} & & \tilde{A} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

с. Система (1) допускает первый аналитический интеграл вида $b(x, y, x_3, \dots, x_n)$, причем члены второго порядка последнего не обращаются в нуль при $x_3 = \dots = x_n = 0$.

Можно показать, что выполнение условия с) вместе с условиями а) и б) приводит к следующей структуре первого интеграла:

$$b(x, y, x_3, \dots, x_n) = x^2 + y^2 + b_2(x_3, \dots, x_n) + b_3(x, y, x_3, \dots, x_n), \quad (4)$$

где b_2, b_3 — члены начиная со второго и третьего порядка включительно. Следовательно, матрица B квадратичной формы, соответствующая первому интегралу (4), может быть записана следующим образом:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbb{O} \\ 0 & 1 & \\ \mathbb{O} & & \tilde{B} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Далее, с использованием бифуркационной теории Хопфа, классическая теорема Ляпунова была продолжена на класс систем (1), правые части которых неаналитические. Это продолжение было получено для нелинейного члена в (1) $F \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ при выполнении предыдущих утверждений а), б) и утверждения d), которое состоит в следующем.

d. Система (1) имеет первый интеграл $b \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ такой, что матрица $b''(0)$ невырожденная.

Главная цель настоящей работы — сформулировать прямую аналогию классической теоремы Ляпунова для случая дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. Ниже рассмотрен пример из теории дифференциальных уравнений в частных производных и показано, что полученный результат автоматически дает вышеупомянутые условия для существования континуума периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме того, используя теорию топологической степени, эти условия могут быть сделаны менее жесткими, чем они были сформулированы на основе бифуркационной теории Хопфа.

1. Главный результат. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{dt} = Av + F(v), \quad (6)$$

где $v \in C^1([0, t], H)$, H — произвольное гильбертово пространство, A — непрерывный линейный оператор, F — нелинейный оператор такой, что $F(0) = 0$.

Пусть выполняются следующие предположения.

e. Оператор $\mathcal{L}$ действует в классе периодических функций $v(T) - v(0) = 0$ с некоторым фиксированным значением T и определен формулой $\mathcal{L}v = \dot{v} - Av$; он является фредгольмовым оператором с нетривиальным ядром $\ker \mathcal{L} = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2\}$ и соответствующим коядром $\text{coker } \mathcal{L} = \text{span}\{\psi_1, \psi_2\}$.

f. Оператор F — непрерывно дифференцируемый в некоторой окрестности нуля и $F(0) = 0$.

g. Уравнение (6) имеет первый интеграл $b(v)$ такой, что его градиент принимает вид

$$\text{grad } b(v) = Bv + R(v),$$

где B — линейный непрерывный оператор, а R — непрерывно дифференцируемый в некоторой окрестности нуля такой, что $R'(0) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь в соответствии с теоремой Рисса [2] линейный ограниченный функционал $\text{grad } b$ связан с элементом гильбертова пространства H .

h. Существует вещественное число λ_2^* такое, что

$$\det \begin{vmatrix} (A\varphi_1, \psi_1) + \lambda_2^*(A\varphi_2, \psi_1) & (B\varphi_1, \psi_1) + \lambda_2^*(B\varphi_2, \psi_1) \\ (A\varphi_1, \psi_2) + \lambda_2^*(A\varphi_2, \psi_2) & (B\varphi_1, \psi_2) + \lambda_2^*(B\varphi_2, \psi_2) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Следующий результат есть прямое обобщение классической теоремы Ляпунова для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются утверждения *e*)–*h*). Тогда уравнение (6) допускает континуум периодических решений в достаточно малой окрестности начала координат.

Доказательство. Вместе с (6) рассмотрим следующее уравнение с произвольным вещественным параметром $\mu \neq 0$:

$$\frac{dv}{dt} = Av + F(v) + \mu \text{grad } b(v) = (A + \mu B)v + F(v) + \mu R(v). \quad (7)$$

Хорошо известно, что если $v = v(t)$ — периодическое решение (7), то v — фактически решение (6). После замены независимой переменной $t \rightarrow (1 + \varepsilon \lambda_1)t$ возьмем $\mu = \varepsilon \lambda_2$ и запишем ниже уравнение (7) в операторной форме

$$\begin{aligned} \mathcal{L}v = \dot{v} - Av = \varepsilon[\lambda_1 Av + \lambda_2 Bv] + \\ + \varepsilon^2 \lambda_1 \lambda_2 Bv + \varepsilon \lambda_2 R(v) + F(v) + \varepsilon \lambda_1 F(v) + \varepsilon^2 \lambda_1 \lambda_2 R(v). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь ε — малый параметр, вещественные числа λ_1, λ_2 — неизвестные величины. Далее, следуя технике, представленной в [3–5], сведём операторное уравнение (8) с фредгольмовым оператором $\mathcal{L}$ к системе уравнений разветвления

Ляпунова—Шмидта, а затем введём специальную неэквивалентную замену переменных, которая исключает из множества её решений тривиальное решение исходной задачи (8).

А именно, после замены

$$v = \xi_1(u + \varphi_1 + \lambda_2^* \varphi_2), \quad (9)$$

полагая, что $\xi_1 \neq 0$ и λ_2^* — некоторое фиксированное число, получаем вспомогательную операторную систему уравнений относительно неизвестного элемента $u \in H_1$ фактор-пространства [6] $H_1 = C([0, t], H) / \ker \mathcal{L}$, конечномерного вектора $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$:

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon \hat{\mathcal{L}}^{-1} T(u, \lambda_1, \lambda_2, \varepsilon, \xi_1), \\ \langle T(u, \lambda_1, \lambda_2, \varepsilon, \xi_1), \psi_j \rangle &= 0 \quad (j = 1, 2), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} T(u, \lambda_1, \lambda_2, \varepsilon, \xi_1) &= \lambda_1 A(u + \varphi_1 + \lambda_2^* \varphi_2) + \lambda_2 B(u + \varphi_1 + \lambda_2^* \varphi_2) + \\ &+ \varepsilon \lambda_1 \lambda_2 B(u + \varphi_1 + \lambda_2^* \varphi_2) + \frac{\lambda_2}{\xi_1} R[\xi_1(u + \varphi_1 + \lambda_2^* \varphi_2)] + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon \xi_1} F[\xi_1(u + \varphi_1 + \lambda_2^* \varphi_2)] + \frac{\lambda_1}{\xi_1} F[\xi_1(u + \varphi_1 + \lambda_2^* \varphi_2)] + \frac{\varepsilon \lambda_1 \lambda_2}{\xi_1} R[\xi_1(u + \varphi_1 + \lambda_2^* \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Параметр $\xi_1 \neq 0$ является свободным. Непрерывный оператор

$$\hat{\mathcal{L}}^{-1} : C([0, t], H) \rightarrow H_1$$

— обобщённый оператор для $\mathcal{L}$, построенный согласно лемме Шмидта [2]. Из представления (9) следует, что $\xi_1 \neq 0$ подразумевает $v \neq 0$ (иначе получается противоречие фактор-пространству), поэтому все решения системы (10) соответствуют нетривиальным решениям соответствующих исходных уравнений (8), (7) и (6).

Вместе с (10) рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$\langle T(u, \lambda_1, \lambda_2, \varepsilon, \xi_1), \psi_j \rangle = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (11)$$

с неизвестными λ_1 и λ_2 . Удовлетворяя условиям $f)$, $g)$, $h)$, можно легко увидеть, что (11) допускает решение для достаточно малых ε , ξ_1 и соответствующий якобиан (см. условие $h)$) не обращается в нуль. Следовательно, используя стандартные аргументы, основанные на идее малых решений первого уравнения системы (10) и применении теоремы о неявной функции, мы получаем вывод о разрешимости системы (10) для достаточно малых ε , ξ_1 и, следовательно, законность утверждения теоремы 1. $\square$

2. Применение в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим случай, когда (6) — обыкновенное дифференциальное уравнение. Вместе с условиями $a)$ и $b)$ рассмотрим условия $f)$ и $g)$ и отметим, что матрица B в $g)$ имеет следующую структуру:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \mathbb{O} \\ 0 & b_1 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \tilde{B} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Тогда исходная центральная теорема Ляпунова может быть обобщена следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются условия $a), b), f), g)$ и $b_1 \neq 0$. Тогда, если $H = E^n$, система (6) допускает континуум периодических решений в достаточно малой окрестности начала координат.

ЗАМЕЧАНИЕ. В теореме 2 условие невырожденности матрицы B , сформулированное в $d)$, заменяется на $b_1 \neq 0$, которое автоматически выполняется в условиях исходной теоремы Ляпунова.

Доказательство. Без потери общности в (3) можно взять $\omega_0 = 1$. Условия $a)$ и $b)$ подразумевают выполнение условия $e)$ при

$$\varphi_1 = \psi_1 = (\cos t, -\sin t, 0, \dots, 0)^T, \quad \varphi_2 = \psi_2 = (\sin t, \cos t, 0, \dots, 0)^T.$$

Поэтому, чтобы доказать теорему 2 (как следствие теоремы 1), необходимо только проверить справедливость условия $h)$.

Можно записать

$$\begin{aligned} A\varphi_1 &= (\sin t, \cos t, \dots)^T, & A\varphi_2 &= (-\cos t, \sin t, \dots)^T, \\ B\varphi_1 &= (b_1 \cos t, -b_1 \sin t, \dots)^T, & B\varphi_2 &= (b_1 \sin t, b_1 \cos t, \dots)^T. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (A\varphi_1, \psi_2) &= 2\pi, & (A\varphi_2, \psi_2) &= 0, \\ (A\varphi_1, \psi_1) &= 0, & (A\varphi_2, \psi_1) &= -2\pi, \\ (B\varphi_1, \psi_1) &= 2\pi b_1, & (B\varphi_2, \psi_1) &= 0, \\ (B\varphi_1, \psi_2) &= 0, & (B\varphi_2, \psi_2) &= 2\pi b_1. \end{aligned}$$

Теперь значение определителя в условии $h)$ может быть легко вычислено, и оно равно $-2b_1 \cdot (1 + \lambda_2^{*2}) \neq 0$, когда $b_1 \neq 0$. $\square$

3. Пример из теории дифференциальных уравнений в частных производных. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3u + u^3 = 0 \quad (13)$$

с граничными условиями

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0. \quad (14)$$

Можно легко заметить, что краевая задача (13)–(14) подразумевает первый интеграл

$$b(u) = \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{3}{2} u^2 + \frac{1}{4} u^4 \right\} ds. \quad (15)$$

После замены переменных

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial u}{\partial x}$$

уравнение (13) может быть переписано в операторной форме

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ u^3 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Первый интеграл (15) в новых переменных примет вид

$$b(u, v, w) = \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{4}u^4 \right\} dx.$$

Отсюда линейный матричный оператор B , определенный в условии g), представляется следующим образом:

$$B \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Используя анализ Фурье, легко проверить, что оператор $\mathcal{L}$ определен формулой

$$\mathcal{L}v = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3u$$

и действует в классе функций, удовлетворяющих граничным условиям:

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad u(t + \pi, x) - u(t, x) = 0,$$

является фредгольмовым с базисными элементами $\ker \mathcal{L}$ φ_1, φ_2 и базисными элементами $\operatorname{coke} \mathcal{L}$ ψ_1, ψ_2 , определёнными следующим образом:

$$\varphi_1 = \psi_1 = \begin{pmatrix} \sin 2t \cos x \\ 2 \cos 2t \sin x \\ 2 \sin 2t \cos x \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \psi_2 = \begin{pmatrix} \cos 2t \sin x \\ -2 \sin 2t \sin x \\ \cos 2t \cos x \end{pmatrix}.$$

После несложных вычислений получаем соотношения:

$$\begin{aligned} (A\varphi_1, \psi_2) &= 0, & (A\varphi_2, \psi_2) &= -3\pi^2, \\ (A\varphi_1, \psi_1) &= 3\pi^2, & (A\varphi_2, \psi_1) &= 0, \\ (B\varphi_1, \psi_1) &= 2\pi^2, & (B\varphi_2, \psi_1) &= 0, \\ (B\varphi_1, \psi_2) &= 0, & (B\varphi_2, \psi_2) &= 2\pi^2. \end{aligned}$$

Теперь значение определителя в условии h) может быть легко вычислено, и оно равно $-12\pi^4 \neq 0$, когда $\lambda_2^* = 1$. Поэтому в соответствии с теоремой 1 мы получаем вывод, что краевая задача (13)–(14) подразумевает континуум периодических решений в достаточно малой окрестности начала координат.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Малкин, И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний [Текст] / И. Г. Малкин. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 496 с. — ISBN 5-354-00906-9.
2. Треногин, В. А. Функциональный анализ [Текст] / В. А. Треногин — М.: Физматлит, 2002. — 488 с. — ISBN 5-9221-0272-9.
3. Вавилов, С. А. Геометрические методы исследования разрешимости одного класса операторных уравнений [Текст] / С. А. Вавилов // Докл. РАН. — 1992. — Т. 323, № 2. — С. 206–210.
4. Вавилов, С. А. О нетривиальных решениях некоторых классов операторных уравнений [Текст] / С. А. Вавилов // Докл. РАН. — 1993. — Т. 331, № 1. — С. 7–10.
5. Vavilov, S. A. A method of studying the existence of nontrivial solutions to some classes of operator equations with an application to resonance problems in mechanics [Text] / S. A. Vavilov // J. of Nonlinear Analysis-TMA. — 1995. — Vol. 24, No. 5. — P. 747–764.
6. Комогооров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: Наука, 1981. — 544 с.

Поступила в редакцию 23/VI/2008;
в окончательном варианте — 23/VI/2008.

MSC: 35B32, 58D25, 58E07

CLASSIC THEOREM BY LYAPUNOV FOR DIFFERENTIAL
EQUATIONS IN HILBERT SPACES

*S. A. Vavilov*¹, *V. S. Fedotova*²

¹ Saint-Petersburg State University,
198904, St. Petersburg, Universitetskaya nab., 7-9.

² Pushkin Leningradsky State University,
196605, St. Petersburg, Pushkin, Peterburgskoe, 10.

E-mails: svavilov@mail.wplus.net; vera1983@yandex.ru

A theorem analogical to Lyapunov Classic Theorem is formulated for differential equations in Hilbert spaces. Example from the theory of partial differential equations is presented. The result automatically demonstrates the well-know conditions of continuum existence for periodic solutions of ordinary differential equations systems. Moreover, by applying the topological degree theory, these conditions can be set as less rigid than those formulated in Hopf Bifurcation Theory.

Key words: *Lyapunov theorem, Hilbert space, periodic solutions, Fredholm operator, a special nonequivalent substitution of variable.*

Original article submitted 23/VI/2008;
revision submitted 23/VI/2008.

Vavilov Sergey Anatolievich, Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof., Dept. of Economic Cybernetics of Saint-Petersburg State University.
Fedotova Vera Sergeevna, Postgraduate Student, Dept. of Higher Mathematics of Pushkin Leningradsky State University.