Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Манако, В. А. Путилин, О температуре нагрева поверхности движущимся лучом лазера, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 2(), 224–230

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu608>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 12:35:13

УДК 536.2

О ТЕМПЕРАТУРЕ НАГРЕВА ПОВЕРХНОСТИ ДВИЖУЩИМСЯ ЛУЧОМ ЛАЗЕРА

*В. В. Манако, В. А. Путилин*Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: physics@samgtu.ru

Рассмотрено решение задачи нагрева поверхности полубесконечного образца движущимся лучом лазера. Предлагается представление этого решения через обобщенную гипергеометрическую функцию. В рамках этого представления определена температура в центре движущегося луча.

Ключевые слова: *нагрев поверхности лазером, решение краевой задачи теплопроводности, обобщенная гипергеометрическая функция.*

Обработка поверхности движущимся лучом лазера давно используется при создании новых конструкционных материалов [1]. Теоретическое вычисление температурного поля, формируемого при этом в образце, приводит к интегралу, который считается неберущимся [2–4] в самом общем виде. В настоящей работе предпринята попытка вычисления этого интеграла.

Пусть образец занимает полупространство $z \geq 0$. По его поверхности движется с постоянной скоростью v пятно нагрева (источник тепла). Приписывая центру движущегося пятна координаты $x = y = z = 0$, для поверхностной плотности поглощенной мощности в модели гауссова источника запишем

$$q = \frac{AP}{\pi r^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{r^2}\right),$$

где A — коэффициент поглощения; P — полная мощность потока энергии лазерного излучения, падающего на поверхность $z = 0$; r — радиус пятна нагрева (для гауссова источника принимают $r = \frac{1}{\sqrt{k}}$, k — коэффициент сосредоточенности).

В подвижной системе координат (центр движущегося источника совпадает с началом отсчёта, ось OX направлена вдоль направления движения) решение уравнения теплопроводности

$$\Delta T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{v}{a} \frac{\partial T}{\partial x},$$

удовлетворяющее граничным и краевым условиям:

$$T(\infty, y, z, t) = T(x, \infty, z, t) = T(x, y, \infty, t) = T(x, y, z, 0) = T_0,$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{AP}{\pi r^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{r^2}\right),$$

Манако Виктор Владимирович — доцент кафедры физики Самарского государственного технического университета; к.ф.-м.н.

Путилин Владислав Алексеевич — старший преподаватель кафедры физики Самарского государственного технического университета.

в стационарном режиме (когда производная по времени $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$) имеет вид [2–4]

$$T = T_0 + \frac{AP}{\lambda\pi} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{(x+v\tau)^2+y^2}{4a\tau+r^2} - \frac{z^2}{4a\tau}\right)}{\sqrt{\tau}(4a\tau+r^2)} d\tau, \quad (1)$$

где a — температуропроводность, λ — теплопроводность, v — скорость движения гауссова источника по поверхности.

Будем считать начальную температуру образца $T_0 = 0$. Переходя к безразмерным величинам, представим (1) в виде

$$\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{(\nu+\omega\varphi)^2+\eta^2}{\varphi+1} - \frac{\sigma^2}{\varphi}\right)}{\sqrt{\varphi}(\varphi+1)} d\varphi. \quad (2)$$

Здесь

$$\varphi = \frac{4a\tau}{r^2}, \quad \nu = \frac{x}{r}, \quad \eta = \frac{y}{r}, \quad \sigma = \frac{z}{r}, \quad \omega = \frac{vr}{4a}, \quad \theta = \frac{T}{T_m^0}, \quad (3)$$

а $T_m^0 = \frac{AP}{2\lambda r\sqrt{\pi}}$ — установившаяся в стационарном режиме температура нагрева в центре неподвижного гауссова пятна [2–4].

Далее везде будем рассматривать только нагрев поверхности, т. е. в формуле (2) будем считать $\sigma = 0$. Тогда, полагая $\delta^2 = (\nu - \omega)^2 + \eta^2$ и проведя в (2) простые алгебраические преобразования показателя экспоненты, будем иметь

$$\theta = \frac{\exp(\delta^2 - \nu^2 - \eta^2)}{\pi} \left[\int_0^\infty \frac{\exp\left(-\omega^2\varphi - \frac{\delta^2}{\varphi+1}\right)}{\sqrt{\varphi}(\varphi+1)} d\varphi \right]. \quad (4)$$

После разложения экспоненты в ряд Тейлора для интеграла, заключенного в квадратные скобки, получим следующее выражение:

$$T(\omega, \delta) = \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\omega^2\varphi - \frac{\delta^2}{\varphi+1}\right)}{\sqrt{\varphi}(\varphi+1)} d\varphi = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\delta^2)^k}{k!} \left[\int_0^\infty \frac{\exp(-\omega^2\varphi)}{\varphi^{\frac{1}{2}}(\varphi+1)^{k+1}} d\varphi \right]. \quad (5)$$

Воспользовавшись известным интегралом [5]

$$\Gamma(a)U(a, b, \rho) = \int_0^\infty \frac{\exp(-\rho\tau)}{\tau^{1-a}(\tau+1)^{1-b+a}} d\tau \quad (\text{при } a > 0, \rho > 0),$$

в котором $\Gamma(a) = \int_0^\infty \exp(-\tau)\tau^{a-1} d\tau$ (при $a > 0$) — гамма-функция, $U(a, b, \rho)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Куммера второго рода, вместо (5), с учётом $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, запишем

$$T(\omega, \delta) = \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\delta^2)^k}{k!} U\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - k, \omega^2\right). \quad (6)$$

Вырожденная гипергеометрическая функция Куммера второго рода определяется из соотношения [5, 6]

$$U(a, b, \rho) = \frac{\pi}{\sin \pi b} \left(\frac{M(a, b, \rho)}{\Gamma(1-b+a)\Gamma(b)} - \rho^{1-b} \frac{M(1-b+a, 2-b, \rho)}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)} \right),$$

а вырожденная гипергеометрическая функция Куммера первого рода по определению [5, 6] есть

$$M(a, b, \rho) = 1 + \frac{a}{b} \frac{\rho^1}{1!} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{\rho^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)} \frac{\rho^3}{3!} + \dots \quad (7)$$

Далее выражение (6) путём весьма многочисленных (и поэтому не излагаемых здесь) преобразований, основанных исключительно на свойствах специальных функций [5], было приведено к следующей форме:

$$T(\omega, \delta) = \sqrt{\pi} \exp(\omega^2 - \delta^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\delta)^{2k}}{k!} \Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right) i^{2k} \operatorname{erfc}(\omega). \quad (8)$$

Для интеграла вероятности известно [5] интегральное представление

$$i^{2k} \operatorname{erfc}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \exp(-t^2 - 2\omega t - \omega^2) dt.$$

Подставим его в (8) и поменяем местами порядок суммирования и интегрирования:

$$T(\omega, \delta) = 2 \exp(-\delta^2) \int_0^{\infty} \exp(-t^2 - 2\omega t) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\delta)^{2k}}{k!} \Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right) \frac{t^{2k}}{(2k)!} \right] dt. \quad (9)$$

С учётом формулы [5] удвоения Гаусса $2^{2\rho-1} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \rho\right) \Gamma(\rho) = \sqrt{\pi} \Gamma(2\rho)$ выражение в квадратных скобках формулы (9) оказывается равным

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\delta)^{2k}}{k!} \Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right) \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \sqrt{\pi} I_0(2\delta t),$$

где

$$I_{\mu}(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k \Gamma(1+k+\mu)} \frac{\rho^{2k}}{k!}$$

— модифицированная функция Бесселя первого рода порядка μ (в нашем случае $\mu = 0$). Тогда

$$\begin{aligned} T(\omega, \delta) &= 2\sqrt{\pi} \exp(-\delta^2) \int_0^{\infty} \exp(-t^2 - 2\omega t) I_0(2\delta t) dt = \\ &= \sqrt{\pi} \frac{\exp(-\delta^2)}{\omega} \int_0^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{t^2}{4\omega^2} - t\right)\right) I_0\left(\frac{\delta}{\omega} t\right) dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя теорему умножения [5]

$$I_0(\lambda t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 - 1)^k}{k!} \left(\frac{t}{2}\right)^k I_k(t)$$

и преобразовав функцию Бесселя в вырожденную гипергеометрическую функцию (7) по формуле [5]

$$I_k(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^k \frac{\exp(-t)}{k!} M\left(\frac{1}{2} + k, 1 + 2k, 2t\right),$$

представим (10) в виде

$$T(\omega, \delta) = \sqrt{\pi} \frac{\exp(-\delta^2)}{\omega} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\delta^2 - \omega^2)^k}{4^k \omega^{2k} k! k!} \times \\ \times \int_0^{\infty} t^{2k} \exp\left(-\frac{t^2}{4\omega^2} - 2t\right) M\left(\frac{1}{2} + k, 1 + 2k, 2t\right) dt.$$

Воспользовавшись преобразованием Куммера [5, 6]

$$M(a, b, \rho) = \exp(\rho) M(b - a, b, -\rho),$$

далее запишем

$$T(\omega, \delta) = \sqrt{\pi} \frac{\exp(-\delta^2)}{\omega} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\delta^2 - \omega^2)^k}{4^k \omega^{2k} k! k!} \times \\ \times \int_0^{\infty} t^{2k} \exp\left(-\frac{t^2}{4\omega^2}\right) M\left(\frac{1}{2} + k, 1 + 2k, -2t\right) dt.$$

Последний полученный интеграл при вещественных значениях равен

$$\int_0^{\infty} t^{2k} \exp\left(-\frac{t^2}{4\omega^2}\right) M\left(\frac{1}{2} + k, 1 + 2k, -2t\right) dt = \\ = 2^{2k} \omega^{2k+1} \Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right) {}_2F_2\left(\left(\frac{1}{4} + \frac{k}{2}, \frac{3}{4} + \frac{k}{2}\right); \left(\frac{1}{2}, 1 + k\right); 4\omega^2\right) - \\ - 2^{2k+1} \omega^{2k+2} \Gamma(1 + k) {}_2F_2\left(\left(\frac{3}{4} + \frac{k}{2}, \frac{5}{4} + \frac{k}{2}\right); \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} + k\right); 4\omega^2\right),$$

где обобщённая гипергеометрическая функция определяется следующим образом [7, 8]:

$${}_2F_2[(a, b), (c, d), \rho] = 1 + \frac{ab}{cd} \frac{\rho^1}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)d(d+1)} \frac{\rho^2}{2!} + \\ + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)d(d+1)(d+2)} \frac{\rho^3}{3!} + \dots$$

Тогда, введя символические обозначения

$$R_k^{(\frac{1}{2})}(2\omega) = {}_2F_2\left(\left(\frac{1}{4} + \frac{k}{2}, \frac{3}{4} + \frac{k}{2}\right); \left(\frac{1}{2}, 1 + k\right); (2\omega)^2\right),$$

$$R_k^{(\frac{3}{2})}(2\omega) = {}_2F_2\left(\left(\frac{3}{4} + \frac{k}{2}, \frac{5}{4} + \frac{k}{2}\right); \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} + k\right); (2\omega)^2\right),$$

перепишем (10) в следующей форме:

$$T(\omega, \delta) = \sqrt{\pi} \exp(-\delta^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\delta^2 - \omega^2)^k}{k!k!} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right) R_k^{(\frac{1}{2})}(2\omega) - \right. \\ \left. - 2\omega \Gamma(1 + k) R_k^{(\frac{3}{2})}(2\omega) \right]. \quad (11)$$

Таким образом, с учётом (4), (5), (11) получаем выражение для безразмерной температуры нагрева (2) при условии $\sigma = 0$ (т. е. на самой поверхности):

$$\theta = \frac{\exp(-\nu^2 - \eta^2)}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\delta^2 - \omega^2)^k}{k!k!} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right) R_k^{(\frac{1}{2})}(2\omega) - \right. \\ \left. - 2\omega \Gamma(1 + k) R_k^{(\frac{3}{2})}(2\omega) \right]. \quad (12)$$

Сделаем замечания. Во-первых, поскольку выше было обозначено $\delta^2 = (\nu - \omega)^2 + \eta^2$, то при условии $\omega = 0$ (следовательно, скорость $v = 0$ — см. (3)) из (12) находим безразмерную температуру для любой точки, лежащей на поверхности образца, при неподвижном луче лазера:

$$\theta = \frac{\exp(-\nu^2 - \eta^2)}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu^2 + \eta^2)^k}{k!} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right)}{k!} = \\ = \exp(-\nu^2 - \eta^2) M\left(\frac{1}{2}, 1, \nu^2 + \eta^2\right) = \\ = M\left(\frac{1}{2}, 1, -\nu^2 - \eta^2\right) = \exp\left(\frac{-\nu^2 - \eta^2}{2}\right) I_0\left(\frac{\nu^2 + \eta^2}{2}\right). \quad (13)$$

Результат (13) уже был получен ранее [4]. Для точки падения лазерного луча на поверхность (точка $\nu = \eta = 0$ или, что то же самое, $x = y = 0$ — см. (3)) выражение (13) принимает вид $\theta = 1$, следовательно, температура нагрева с учётом (3) равна

$$T = T_m^0 = \frac{AP}{2\lambda r \sqrt{\pi}}. \quad (14)$$

Во-вторых, температура нагрева для любой точки, лежащей на поверхности, движущимся лучом (случай $\omega \neq 0$) определяется формулой (12), которая фактически является представлением интеграла (2) через обобщённую гипергеометрическую функцию.

В-третьих, поскольку $\delta^2 = (\nu - \omega)^2 + \eta^2$, то условие $\delta^2 = \omega^2$ удовлетворяется во всех точках окружности радиуса ω , центр которой имеет координаты

$\nu = \omega$, $\eta = 0$. Для любых точек, лежащих на этой окружности, выражение (12) принимает простой вид:

$$\theta = \exp(-\nu^2 - \eta^2) \left[{}_2F_2\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right); \left(\frac{1}{2}, 1\right); (2\omega)^2\right) - \frac{2\omega}{\sqrt{\pi}} {}_2F_2\left(\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right); \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right); (2\omega)^2\right) \right].$$

Подставляя сюда

$$\theta = T \frac{2\lambda r \sqrt{\pi}}{AP}, \quad \omega = \frac{vr}{4a}$$

(см. (3)) и полагая $\nu = \eta = 0$, получим значение интеграла (1) в случае $x = y = z = 0$, $v \neq 0$:

$$T = \frac{AP}{2\lambda r \sqrt{\pi}} \left[{}_2F_2\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right); \left(\frac{1}{2}, 1\right); \left(\frac{vr}{2a}\right)^2\right) - \frac{vr}{2\sqrt{\pi}a} {}_2F_2\left(\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right); \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right); \left(\frac{vr}{2a}\right)^2\right) \right]. \quad (15)$$

При неподвижном луче лазера, когда скорость $v = 0$, это выражение переходит в формулу (14).

Таким образом, формула (15) задает температуру в центре гауссова источника тепла, движущегося по поверхности полубесконечного образца.

Выводы. В работе получено представление для температуры нагрева поверхности движущимся лучом лазера через обобщенную гипергеометрическую функцию. В рамках этого представления определена температура нагрева в центре движущегося луча лазера.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коваленко, В. С. Упрочнение и легирование деталей машин лучом лазера [Текст] / В. С. Коваленко, Л. Ф. Головкин, В. С. Черненко. — Киев: Техника, 1990. — 192 с.
2. Рыкалин, Н. Н. Расчёты тепловых процессов при сварке [Текст] / Н. Н. Рыкалин. — М.: Машгиз, 1951. — 296 с.
3. Углов, А. А. К расчёту температурных полей от движущихся концентрированных источников энергии [Текст] / А. А. Углов, И. Ю. Смуров, С. С. Андриянов // ФизХОМ. — 1981. — № 1. — С. 35–43.
4. Получение простых аналитических выражений, описывающих процесс нагрева металлов концентрированными источниками энергии [Текст] / Н. Н. Рыкалин, А. А. Углов, И. Ю. Смуров и др. // ФизХОМ. — 1979. — № 6. — С. 3–11.
5. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами [Текст] / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
6. Слейтер, Л. Дж. Выводы гипергеометрических функций [Текст] / Л. Дж. Слейтер. — М.: Вычислит. Центр АН СССР, 1966. — 250 с.
7. Гаспер, Дж. Базисные гипергеометрические ряды [Текст] / Дж. Гаспер, М. Рахман. — М.: Мир, 1993. — 349 с.
8. Брычков, Ю. А. Специальные функции. Производные, интегралы, ряды и другие формулы [Текст] / Ю. А. Брычков. — М.: Физматлит, 2006. — 512 с.

Поступила в редакцию 14/III/2008;
в окончательном варианте — 22/VI/2008.

MSC: 65Z05, 33C20

ON TEMPERATURE OF SURFACE HEATING WITH A MOVING LASER BEAM

V. V. Manako, V. A. Putilin

Samara State Technical University,
443100, Samara, Molodogvardeyskaya str., 244.

E-mail: physics@samgtu.ru

Heating of a surface by moving laser beam is studied. Proposed solution is represented with the generalized hypergeometric function. With the help of this representation the temperature in the center of a moving beam is determined.

Key words: *heating of surfaces by laser, solution of heat conductivity boundary value problem, generalized hypergeometric function.*

Original article submitted 14/III/2008;
revision submitted 22/VI/2008.

Manako Viktor Vladimirovich, Ph. D. (Phis. & Math.), Dept. of Physics of Samara State Technical University.

Putilin Vladislav Alexeevich, Senior Lecturer, Dept. of Physics of Samara State Technical University.