Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Андреев, Е. Н. Огородников, Применение матричных интегродифференциальных операторов в постановке и решении нелокальных краевых задач для систем уравнений гиперболического типа, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2001, выпуск 12, 45–53

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu61>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:40:02

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПОСТАНОВКЕ И РЕШЕНИИ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В работе на примере одной модельной системы двух гиперболических в полуплоскости уравнений второго порядка с кратными характеристиками, порядок которых вырождается вдоль линии изменения типа, рассмотрены некоторые нелокальные краевые задачи с условиями Бицадзе – Самарского в терминах матричных интегродифференциальных операторов Римана – Лиувилля и Эрдейи – Кобера. Обоснована корректность указанных задач при определенных ограничениях на спектр матричного коэффициента системы уравнений и функциональные матрицы, фигурирующие в краевых условиях.

Обозначим M_n - множество постоянных матриц порядка n . Пусть матрица $G \in M_n$. Обозначим $\Lambda(G) = \{\lambda_i\}$ - спектр матрицы G , λ_i - собственные значения матрицы G , $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Будем также обозначать $C_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ и $C_- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}$.

С помощью интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра [1] можно определить значение аналитической функции на множестве постоянных квадратных матриц. Если ограничиться множеством матриц, являющихся значениями некоторых аналитических функций от одной матрицы, то определение легко обобщается на случай аналитических функций многих комплексных переменных, что позволяет, в свою очередь, доопределять целый ряд специальных функций на матричные значения входящих в них параметров. Некоторые примеры приведены в работах [2-4] авторов данной статьи.

В теории интегральных уравнений и систем уравнений Вольтерра II рода с ядром Абеля (уравнение Абеля II рода в дальнейшем) важную роль играют функции типа Миттаг – Леффлера [5,6]

$$E_\sigma(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})}, \quad \rho > 0, \mu \in C_+.$$

Обозначая $\rho^{-1} = \alpha > 0$, функцию типа Миттаг – Леффлера определяют рядом

$$E_\alpha(z; \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta \in C_+. \quad (1)$$

Пусть матрицы A и B таковы, что $A = \alpha(G)$, $B = \beta(G)$, где $G \in M_2$, $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ - некоторые аналитические функции, определенные на спектре матрицы G [1], E – единичная матрица в M_2 .

Тогда определение (1) можно продолжить на матричные значения параметров

$$E_A(z; B) = \begin{cases} \frac{G - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} E_{\alpha_1}(z; \beta_1) + \frac{G - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} E_{\alpha_2}(z; \beta_2), & \lambda_1 \neq \lambda_2, \\ E \cdot E_{\alpha_0}(z; \beta_0) + (G - \lambda_0 E) \left[\frac{d}{d\lambda} E_\alpha(z; \beta) \right]_{\lambda=\lambda_0}, & \lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda_0, \end{cases} \quad (2)$$

где $\alpha_i = \alpha(\lambda_i)$, $\beta_i = \beta(\lambda_i)$, $\lambda_i \in \Lambda(G)$, $i = 0, 1, 2$.

Из определения (2) следует, что матрица $E_A(z; E)$ совпадает с матрицей $E_A(z)$, приведенной в работе [4].

В работах [7,8] понятие функции матричного аргумента было распространено на понятие интегродифференциального оператора, являющегося матричным аналогом оператора дробного интегродифференцирования Римана – Лиувилля [9]. В соответствии с определением, данным, например, в [7] для матрицы $G \in M_n$ и вектор-функции $\mathbf{f}(x) = (f_1; f_2; \dots; f_n)^T$, матрица $\mathbf{I}_{ax}^G \mathbf{f}$ определяется по формуле:

$$\mathbf{I}_{ax}^G \mathbf{f} \equiv \mathbf{D}_{ax}^{-G} \mathbf{f} = \sum_{k=1}^s \psi^k(G) \sum_{n=0}^{m_k-1} \frac{(G - \lambda_k E)^n}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[\frac{D_{ax}^{-\lambda} \mathbf{f}}{\psi^k(\lambda)} \right]_{\lambda=\lambda_k}, \quad (3)$$

где $\psi^k(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)^{-m_k} \prod_{k=1}^s (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$, $D_{ax}^{-\lambda}$ - оператор Римана – Лиувилля, $x \in [a, b]$; $\lambda_k \in \Lambda(G)$, $k = \overline{1, s}$; $\Lambda(G) \subset \mathbb{C}$.

В работе [4] приведены различные представления матричных интегральных и дифференциальных операторов Римана – Лиувилля, их свойства и некоторые обобщения, в частности, матричный аналог оператора М. Saigo.

В теории и приложениях встречаются различные модификации и обобщения операторов дробного интегродифференцирования. К таким модификациям относятся, в частности, операторы типа Эрдейи – Кобера [9].

Ниже используется следующая модификация операторов этого типа:

$$D_{ax}^{-\alpha, \beta} f = \begin{cases} \frac{\text{sign}(x-a)}{\Gamma(\alpha)|x-a|^{\alpha+\beta-1}} \int_a^x |x-t|^{\alpha-1} |t-a|^{\beta-1} f(t) dt, & \text{Re } \alpha > 0, \\ |x-a|^{1-\beta} \left(\text{sign}(x-a) \frac{\partial}{\partial x} \right)^n |x-a|^{\beta-1+\alpha+n} D_{ax}^{-(\alpha+n)} |x-a|^{\alpha} f, & \text{Re } \alpha \leq 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $\text{Re } \beta > 0$, $n = [-\text{Re } \alpha] + 1$.

Заметим, что левосторонний дробный интеграл в (4) при $a=0$ совпадает с оператором $I_{a+; \sigma, \eta}^{\alpha} f(x)$, приведенным в монографии [9] (формула (18.1), стр. 246), при $a=0$, $\sigma = 1$, $\eta = \beta - 1$.

Имеют место легко проверяемые тождества:

$$D_{ax}^{\alpha, \beta} D_{ax}^{-\alpha, \beta} f = f(x); D_{xb}^{\alpha, \beta} D_{xb}^{-\alpha, \beta} f = f(x); \text{Re } \alpha > 0, \quad (5)$$

справедливые почти всюду на (a, b) для $(x-a)^{\beta-1} f(x)$, $(b-x)^{\beta-1} f(x) \in L(a, b)$.

При доказательстве тождества (5) достаточно воспользоваться представлениями дробных интегралов типа Эрдейи – Кобера через дробные интегралы Римана – Лиувилля

$$\begin{aligned} D_{ax}^{-\alpha, \beta} f &= (x-a)^{1-\alpha-\beta} D_{ax}^{-\alpha} (x-a)^{\beta-1} f, \quad a < x, \\ D_{xb}^{-\alpha, \beta} f &= (b-x)^{1-\alpha-\beta} D_{xb}^{-\alpha} (b-x)^{\beta-1} f, \quad x < b. \end{aligned} \quad (6)$$

Представление дробной производной Эрдейи – Кобера по формуле (4) через соответствующий дробный интеграл не всегда удобно на практике. Поэтому, например, для α : $\text{Re } \alpha \in [0, 1]$ и $a < x$, с учетом формул (4) и (6) получим

$$\begin{aligned} D_{ax}^{\alpha, \beta} f &= (x-a)^{1-\beta} \frac{\partial}{\partial x} (x-a)^{\beta-\alpha} D_{ax}^{-(1-\alpha), \beta} (x-a)^{\alpha} f = (x-a)^{1-\beta} \frac{\partial}{\partial x} D_{ax}^{-(1-\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta-1} f = \\ &= (x-a)^{1-\beta} D_{ax}^{\alpha} (x-a)^{\alpha+\beta-1} f. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично, для $x < b$ имеем

$$\begin{aligned} D_{xb}^{\alpha, \beta} f &= (b-x)^{1-\beta} \left[-\frac{\partial}{\partial x} (b-x)^{\beta-\alpha} D_{xb}^{-(1-\alpha), \beta} (b-x)^{\alpha} f \right] = (b-x)^{1-\beta} \left[-\frac{\partial}{\partial x} D_{xb}^{-(1-\alpha)} (b-x)^{\alpha+\beta-1} f \right] = \\ &= (b-x)^{1-\beta} D_{xb}^{\alpha} (b-x)^{\alpha+\beta-1} f. \end{aligned}$$

Определим матричный аналог интегрального оператора типа Эрдейи – Кобера.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть матрица $G \in M_n$; $\alpha(z), \beta(z)$ - любые аналитические функции, определенные на спектре $\Lambda(G) = \{\lambda_i\}$. Пусть $\Lambda(A) = \{\alpha_i\}$ и $\Lambda(B) = \{\beta_i\}$ - спектры матриц $A = \alpha(G)$ и $B = \beta(G)$ соответственно, причем $\Lambda(A), \Lambda(B) \subset \mathbb{C}_+$. Матричным интегральным оператором типа Эрдейи – Кобера будем называть матрицу

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{A, B} \mathbf{f} &\equiv \mathbf{D}_{ax}^{A, B} \mathbf{f} = |x-a|^{E-A-B} \mathbf{D}_{ax}^{-A} |x-a|^{B-E} \mathbf{f} = \text{sign}(x-a) |x-a|^{E-A-B} [\Gamma(A)]^{-1} \times \\ &\times \int_a^x |x-t|^{A-E} |t-a|^{B-E} \mathbf{f}(t) dt, \end{aligned} \quad (8)$$

определенную для $|x-a|^{B-E} \mathbf{f}(x) \in L(a, b)$, где $\Gamma(z)$ - гамма – функция Эйлера [5].

Определим теперь матричный аналог дифференциального оператора типа Эрдейи – Кобера.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть матрица $G \in M_n$; $\alpha(z), \beta(z)$ - любые аналитические функции, определенные на спектре $\Lambda(G) = \{\lambda_i\}$. Пусть $\Lambda(A) = \{\alpha_i\}$ и $\Lambda(B) = \{\beta_i\}$ - спектры матриц $A = \alpha(G)$ и $B = \beta(G)$ соответственно, причем $\operatorname{Re} \alpha_i \in [0, 1]$, а $\Lambda(B) \in C_+$. Тогда

$$\mathbf{D}_{ax}^{A,B} \mathbf{f} = |x-a|^{E-B} \mathbf{D}_{ax}^A |x-a|^{A+B-E} \mathbf{f}, \quad (9)$$

где $\mathbf{D}_{ax}^A$ - матричный аналог дробной производной Римана – Лиувилля, определяемый по формуле (3).

Как было отмечено в [4], одним из приложений матричных интегродифференциальных операторов в теории систем дифференциальных уравнений с частными производными является проблема существования и единственности решения нелокальных краевых задач. Во многих случаях краевые задачи для вырождающихся систем дифференциальных уравнений в области их гиперболичности редуцируются к системам интегральных уравнений Вольтерра

$$\mathbf{A}(x)\varphi(x) - \mathbf{B}(x)\mathbf{D}_{ax}^{-A} \mathbf{K}(x)\varphi(x) = \mathbf{c}(x), \quad (10)$$

где $A \in M_n$: $\Lambda(A) \subset C_+$; $\mathbf{A}(x), \mathbf{B}(x), \mathbf{K}(x)$ - функциональные $[n \times n]$ - матрицы, $\varphi(x)$ и $\mathbf{c}(x)$ - искомая и заданная вектор – функции соответственно, а оператор $\mathbf{D}_{ax}^{-A}$ определен в (3).

Исследование, и тем более решение, систем интегральных уравнений (10) при самых общих предположениях относительно матричных коэффициентов $\mathbf{A}(x), \mathbf{B}(x), \mathbf{K}(x)$ и спектра $\Lambda(A)$ матрицы A является весьма трудной задачей, далекой от своего окончательного завершения.

Если матрица $\mathbf{A}(x) \equiv 0$, то при условии обратимости матриц $\mathbf{B}(x)$ и $\mathbf{K}(x)$ всюду в области определения искомого решения система уравнений (10) превращается в систему уравнений Абеля. Условия ее однозначной разрешимости указаны в [4].

Пусть в системе уравнений (10) обратимы одновременно функциональные матрицы $\mathbf{A}(x)$ и $\mathbf{K}(x)$. Тогда для новой вектор – функции $\mathbf{u}(x) = \mathbf{K}(x)\varphi(x)$ получим систему интегральных уравнений Абеля II рода:

$$\mathbf{u}(x) - \mathbf{G}(x)\mathbf{D}_{ax}^{-A} \mathbf{u}(x) = \mathbf{f}(x), \quad (11)$$

где матрица $\mathbf{G}(x) = \mathbf{K}(x)\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{B}(x)$, а вектор $\mathbf{f}(x) = \mathbf{K}(x)\mathbf{A}^{-1}(x)\mathbf{c}(x)$.

Можно указать сразу случай, когда к системе интегральных уравнений (11) применим метод последовательных приближений и соответствующая теорема существования и единственности решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода с ядром Абеля [10,11].

Пусть $\lambda = \lambda(x, z)$ - непрерывная функция действительной переменной x , аналитическая по комплексному параметру z . Тогда ее можно доопределить на множестве постоянных матриц $A \in M_n$, если область определения $D(\lambda)$ функции $\lambda(x, z)$ как функции от z содержит спектр $\Lambda(A)$ матрицы A .

Пусть $\mathbf{G}(x) = \lambda(x, A)$. Рассмотрим случай матрицы $A \in M_2$, $\alpha_i \in \Lambda(A), i = 1, 2$. Тогда [1]

$$\lambda(x; A) = \begin{cases} \frac{A - \alpha_2 E}{\alpha_1 - \alpha_2} \lambda(x; \alpha_1) + \frac{A - \alpha_1 E}{\alpha_2 - \alpha_1} \lambda(x; \alpha_2), & \alpha_1 \neq \alpha_2, \\ E \lambda(x; \alpha_0) + (A - \alpha_0 E) \left[\frac{d}{d\alpha} \lambda(x; \alpha) \right]_{\alpha=\alpha_0}, & \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0. \end{cases}$$

Используя определение (3) и свойства идемпотентов $\frac{A - \alpha_i E}{\alpha_j - \alpha_i}$ матрицы A , например, в случае $\alpha_1 \neq \alpha_2$, получим

$$\mathbf{u}(x) - \frac{A - \alpha_2 E}{\alpha_1 - \alpha_2} \lambda(x; \alpha_1) \mathbf{D}_{ax}^{-\alpha_1} \mathbf{u}(x) - \frac{A - \alpha_1 E}{\alpha_2 - \alpha_1} \lambda(x; \alpha_2) \mathbf{D}_{ax}^{-\alpha_2} \mathbf{u}(x) = \mathbf{f}(x).$$

Определяя методом последовательных приближений вначале вектор $\frac{A - \alpha_2 E}{\alpha_1 - \alpha_2} \mathbf{u}$, а затем $\frac{A - \alpha_1 E}{\alpha_2 - \alpha_1} \mathbf{u}$, найдем непрерывное решение системы интегральных уравнений (11) в указанном

выше случае при $f(x) \in C[a, b]$.

Пусть теперь матрица $\mathbf{G}(x) = \lambda(x, A)$ не зависит от x . Тогда

$$\lambda(A) = \begin{cases} \frac{A - \alpha_2 E}{\alpha_1 - \alpha_2} \lambda_1 + \frac{A - \alpha_1 E}{\alpha_2 - \alpha_1} \lambda_2, & \alpha_1 \neq \alpha_2, \\ E \lambda_0 + (A - \alpha_0 E) \lambda'_0, & \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0, \end{cases} \quad (12)$$

где $\lambda_i = \lambda(\alpha_i)$, $\alpha_i \in \Lambda(A)$, $i = 1, 2$; $\lambda'_0 = \lambda'_\alpha(\alpha_0)$, а решение системы интегральных уравнений

$$\mathbf{u}(x) - \lambda(A) \mathbf{D}_{ax}^{-A} \mathbf{u}(x) = \mathbf{f}(x) \quad (13)$$

можно найти в терминах матричной функции Миттаг – Леффлера (см. [4] или формулу (2) настоящей работы).

Пусть $a=0$, тогда в случае $\alpha_1 \neq \alpha_2$ получим систему уравнений

$$\mathbf{u}(x) - \lambda_1 D_{0x}^{-\alpha_1} \frac{A - \alpha_2 E}{\alpha_1 - \alpha_2} \mathbf{u}(x) - \lambda_2 D_{0x}^{-\alpha_2} \frac{A - \alpha_1 E}{\alpha_2 - \alpha_1} \mathbf{u}(x) = \mathbf{f}(x). \quad (14)$$

Используя результат Е.Н. Hille, J.D. Tamarkin [12] (см. также [6]), находим вначале вектор

$$\frac{A - \alpha_2 E}{\alpha_1 - \alpha_2} \mathbf{u} = \frac{d}{dx} \int_0^x E_{\alpha_1} [\lambda_1 (x-t)^{\alpha_1}] \frac{A - \alpha_2 E}{\alpha_1 - \alpha_2} \mathbf{f}(t) dt,$$

затем, аналогично,

$$\frac{A - \alpha_1 E}{\alpha_2 - \alpha_1} \mathbf{u} = \frac{d}{dx} \int_0^x E_{\alpha_2} [\lambda_2 (x-t)^{\alpha_2}] \frac{A - \alpha_1 E}{\alpha_2 - \alpha_1} \mathbf{f}(t) dt,$$

откуда

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x) &= \frac{d}{dx} \int_0^x E_{\alpha_1} [\lambda_1 (x-t)^{\alpha_1}] \frac{A - \alpha_2 E}{\alpha_1 - \alpha_2} \mathbf{f}(t) dt + \frac{d}{dx} \int_0^x E_{\alpha_2} [\lambda_2 (x-t)^{\alpha_2}] \frac{A - \alpha_1 E}{\alpha_2 - \alpha_1} \mathbf{f}(t) dt = \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^x \left(\frac{A - \alpha_2 E}{\alpha_1 - \alpha_2} E_{\alpha_1} [\lambda_1 (x-t)^{\alpha_1}] + \frac{A - \alpha_1 E}{\alpha_2 - \alpha_1} E_{\alpha_2} [\lambda_2 (x-t)^{\alpha_2}] \right) \mathbf{f}(t) dt = \frac{d}{dx} \int_0^x E_A [\lambda(A)(x-t)^A] \mathbf{f}(t) dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Решение (15) может быть записано также в виде:

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{f}(x) + \lambda(A) \int_0^x (x-t)^{-(E-A)} E_A [\lambda(A)(x-t)^A; A] \mathbf{f}(t) dt, \quad (16)$$

если воспользоваться соответствующим представлением решения скалярного интегрального уравнения [6, 12].

В случае $\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha_0$ с учетом формул (3) и (12) вместо (14) получим систему уравнений

$$\mathbf{u}(x) - E \lambda_0 D_{0x}^{-\alpha_0} \mathbf{u}(x) - (A - \alpha_0 E) \frac{d}{d\alpha} [\lambda(\alpha) D_{0x}^{-\alpha} \mathbf{u}(x)]_{\alpha=\alpha_0} = \mathbf{f}(x). \quad (17)$$

Вначале из (17) найдем вектор

$$(A - \alpha_0 E) \mathbf{u}(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x E_{\alpha_0} [\lambda_0 (x-t)^{\alpha_0}] (A - \alpha_0 E) \mathbf{f}(t) dt. \quad (18)$$

Подставляя выражение для $(A - \alpha_0 E) \mathbf{u}(x)$ из (18) в формулу (17), найдем решение системы уравнений

$$\mathbf{u}(x) - E \lambda_0 D_{0x}^{-\alpha_0} \mathbf{u}(x) = \mathbf{f}(x) + \frac{d}{d\alpha} [\lambda(\alpha) D_{0x}^{-\alpha} (A - \alpha_0 E) \mathbf{u}(x)]_{\alpha=\alpha_0}. \quad (19)$$

Если обозначить правую часть векторного уравнения (19) за $\mathbf{h}(x)$, то его решение имеет вид:

$$\mathbf{u}(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x E_{\alpha_0} [\lambda_0 (x-t)^{\alpha_0}] \mathbf{h}(t) dt, \quad (20)$$

аналогичный решению соответствующего скалярного интегрального уравнения.

Подставляя выражение $\mathbf{h}(x) = \mathbf{f}(x) + \frac{d}{d\alpha} [\lambda(\alpha) D_{0x}^{-\alpha} (A - \alpha_0 E) \mathbf{u}(x)]_{\alpha=\alpha_0}$ в (20), после некоторых преобразований получим

$$\mathbf{u}(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \left\{ E_{\alpha_0} [\lambda_0 (x-t)^{\alpha_0}] + (A - \alpha_0 E) \left[\frac{d}{d\alpha} E_{\alpha} [\lambda(\alpha)(x-t)^{\alpha}] \right]_{\alpha=\alpha_0} \right\} \mathbf{f}(t) dt,$$

откуда вновь следует представление решения системы уравнений (13) в виде (15).

Краевые задачи с условиями типа Бицадзе – Самарского для системы уравнений с вырождением порядка. Пусть матрица $B \in M_n$, ее спектр $\Lambda(B) = \{\beta_i\}$, $\beta_i \in \mathbb{C}$; $T_m \mathbf{u} = y^{2m} \mathbf{u}_{xx} - \mathbf{u}_{yy}$ - оператор Трикоми, $m > 0$, $\mathbf{u}(x, y) = (u_1; \dots; u_n)^T$ - искомая вектор - функция.

Систему уравнений

$$L(\mathbf{u}) \equiv y T_m(\mathbf{u}) - B \mathbf{u}_y = 0 \quad (21)$$

рассмотрим области Ω , ограниченной отрезком $[0,1]$ прямой $y=0$ и ее характеристиками $\xi=0$, $\eta=0$, где

$$\xi = x - \frac{1}{m+1} y^{m+1} \text{ и } \eta = x + \frac{1}{m+1} y^{m+1}. \quad (22)$$

Система уравнений (21) представляет собой систему гиперболических при $y > 0$ уравнений с кратными характеристиками и является примером системы уравнений, порядок которых вырождается вдоль линии $y=0$ изменения типа [13].

Хорошо известно, что вырождение порядка вносит определенный аспект в теорию уравнений и систем уравнений смешанного типа вообще и в вопрос корректности постановки задачи Коши [14], в частности. Это обстоятельство отражается на структуре нелокальных условий в рассматриваемых ниже краевых задачах.

Пусть

$$\Theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}; \left(\frac{m+1}{2} x \right)^{\frac{1}{m+1}} \right) \text{ и } \Theta_1(x) = \left(\frac{1+x}{2}; \left(\frac{m+1}{2} (1-x) \right)^{\frac{1}{m+1}} \right)$$

- аффиксы точек пересечения характеристик системы уравнений (21), выходящих из произвольной точки $x \in [0,1]$, с характеристиками $\xi=0$ и $\eta=1$.

Пусть $\alpha(z), \omega(z)$ - некоторые аналитические функции, определенные на спектре $\Lambda(B)$ матрицы B .

Рассмотрим следующие условия:

$$\mathbf{D}_{ax}^{\alpha(B), \omega(B)} \mathbf{u}[\Theta_a(x)] = \mathbf{A}(x) \mathbf{u}(x, 0) + \lim_{y \rightarrow +0} \mathbf{K}(x, y) \mathbf{u}_y(x, y) + \mathbf{c}(x), \quad (23)$$

$$\mathbf{D}_{ax}^{\alpha(B)} \mathbf{u}[\Theta_a(x)] = \mathbf{A}(x) \mathbf{u}(x, 0) + \lim_{y \rightarrow +0} \mathbf{K}(x, y) \mathbf{u}_y(x, y) + \mathbf{c}(x), \quad (24)$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \boldsymbol{\tau}(x), \quad \boldsymbol{\tau}(x) = (\tau_1; \dots; \tau_n)^T, \quad x \in [0, 1], \quad (25)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^B \mathbf{u}_y(x, y) = \mathbf{v}(x), \quad \mathbf{v}(x) = (v_1; \dots; v_n)^T, \quad x \in (0, 1), \quad (26)$$

где $\mathbf{D}_{ax}^{\alpha(B), \omega(B)}$, $\mathbf{D}_{ax}^{\alpha(B)}$ - матричные интегродифференциальные операторы типа Эрдеи – Кобера и Римана – Лиувилля, $a \in \{0, 1\}$; $\mathbf{A}(x), \mathbf{B}(x), \mathbf{K}(x, y)$ - известные функциональные $(n \times n)$ матрицы, а компоненты векторов $\mathbf{c}(x), \boldsymbol{\tau}(x)$ или $\mathbf{v}(x)$ являются заданными функциями.

Пусть $a=0$, $n=2$, матрица $B \in M_2$: $\Lambda(B) = \{\beta_i : \beta_i \in (-m, 1)\}$. Для системы уравнений (21) рассмотрим следующую задачу.

З а д а ч а 1. Найти регулярное Ω решение системы уравнений (21), удовлетворяющее условию (23) при $\alpha(z) = \frac{z+m}{2(m+1)}$, $\omega(z) = \alpha(z)$, и условию (25). Компоненты $[2 \times 2]$ - функциональных матриц $\mathbf{A}(x)$, $\mathbf{K}(x, y)$ и векторов $\mathbf{c}(x), \boldsymbol{\tau}(x)$ - заданные функции.

В характеристических координатах (22) система уравнений (21) и начальные условия (25) и (26) примут, соответственно, вид:

$$(\eta - \xi) \mathbf{u}_{\xi\eta} - G(\mathbf{u}_\eta - \mathbf{u}_\xi) = 0, \quad (27)$$

$$\mathbf{u}(\xi, \xi) = \boldsymbol{\tau}(\xi), \quad \lim_{\eta - \xi \rightarrow +0} \left[\frac{m+1}{2} (\eta - \xi) \right]^{2G} (\mathbf{u}_\eta - \mathbf{u}_\xi) = \mathbf{v}(\xi), \quad (28)$$

где матрица $G = \frac{1}{2(m+1)}(B + mE)$, причем ее спектр $\Lambda(G) = \left\{ \lambda_i : \lambda_i = \frac{\beta_i + m}{2(m+1)}, \beta_i \in \Lambda(B) \right\}$. Так как по условию задачи $\Lambda(B) \subset (-m, 1)$, то $\Lambda(G) \subset (0, 1/2)$.

Система дифференциальных уравнений (27) представляет собой ЭПД – систему специального (с двумя равными матричными параметрами) вида. Для нее в [15] найдено решение задачи Коши (28), используя которое в [16] записано решение задачи Коши с данными (25), (26) при $n=2$ для системы уравнений (21).

Для решения нелокальной краевой задачи I используем результаты работы [16].

Л е м м а. Пусть спектр матрицы B системы уравнений (21) таков, что $\Lambda(B) \subset (-m, 1)$.

Тогда решение задачи Коши (25), (26) при $n=2$ в терминах матрицы $G = \frac{1}{2(m+1)}(B + mE)$ может быть записано в виде:

$$\mathbf{u}(x, y) = k(G) \int_0^1 (t - t^2)^{G-E} \tau(z) dt + \frac{1}{m+1} k(E - G)(E - 2G)^{-1} y^{(m+1)(E-2G)} \int_0^1 (t - t^2)^{-G} v(z) dt, \quad (29)$$

где $k(G) = K(G, G) = B^{-1}(G, G) = \Gamma(2G)[\Gamma(G)]^{-2}$, а $B(p, q)$ и $\Gamma(z)$ – соответственно бета- и гамма – функции; $z = z(t) = x + \frac{1}{m+1} y^{m+1}(2t - 1)$.

Используем решение задачи Коши по формуле (29) и вычислим значение $\mathbf{u}[\Theta_0(x)]$.

Величина $z(t) = x + \frac{1}{m+1} y^{m+1}(2t - 1)$ в точке $\Theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}; \left(\frac{m+1}{2} x \right)^{\frac{1}{m+1}} \right)$ принимает

значение $z(t) = xt$, а величина $y^{(m+1)(E-2G)} = \left(\frac{m+1}{2} x \right)^{E-2G} = \frac{m+1}{2} \left(\frac{2}{m+1} x \right)^{2G} x^{E-2G}$.

Тогда по формуле (29) имеем:

$$\mathbf{u}[\Theta_0(x)] = k(G) \int_0^1 (t - t^2)^{G-E} \tau(xt) dt + \frac{1}{2} k(E - G)(E - 2G)^{-1} \left(\frac{2}{m+1} \right) x^{E-2G} \int_0^1 (t - t^2)^{-G} v(xt) dt. \quad (30)$$

Выполняя в (30) замену переменных по формуле $s = xt$ в интегралах и учитывая, что $(t - t^2)^{G-E} = x^{2E-2G} s^{G-E} (x-s)^{G-E}$, $dt = \frac{ds}{x}$, а $(t - t^2)^{-G} = x^{2G} s^{-G} (x-s)^{-G}$, найдем

$$\mathbf{u}[\Theta_0(x)] = k(G) x^{E-2G} \int_0^x (x-s)^{G-E} s^{G-E} \tau(s) ds + \frac{1}{2} k(E - 2G)(E - 2G)^{-1} \left(\frac{2}{m+1} \right)^{2G} \int_0^x (x-s)^{-G} s^{-G} v(s) ds.$$

Используя определение матричного интегрального оператора Римана – Лиувилля (3), получим

$$\mathbf{u}[\Theta_0(x)] = \gamma(G) x^{E-2G} \mathbf{D}_{0x}^{-G} x^{G-E} \tau(x) + \sigma(G) \mathbf{D}_{0x}^{-(E-G)} x^{-G} v(x), \quad (31)$$

где $\gamma(G) = k(G)\Gamma(G) = K(G, G)\Gamma(G) = B^{-1}(G, G)\Gamma(G) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma\left(\frac{2G}{G}\right)$, а $\sigma(G) = \frac{1}{2} k(E - G)\Gamma(E - G) \times (E - 2G)^{-1} \left(\frac{2}{m+1} \right)^{2G} = \frac{1}{2} B^{-1}(E - G, E - G)\Gamma(E - G)(E - 2G)^{-1} \left(\frac{2}{m+1} \right)^{2G} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{E-2G}{E-G}\right) \left(\frac{2}{m+1} \right)^{2G}$.

С помощью формулы (8) выражению (31) можно придать вид:

$$\mathbf{u}[\Theta_0(x)] = \gamma(G) \mathbf{D}_{0x}^{-G, G} \tau(x) + \sigma(G) \mathbf{D}_{0x}^{-(E-G)} x^{-G} v(x). \quad (32)$$

Так как указанные в условиях задачи функции $\alpha(z)$ и $\omega(z)$ принимают на матрице B значения $\alpha(B) = \frac{B + mE}{2(m+1)} = G = \omega(B)$, то условие (23) в терминах матрицы G имеет вид:

$$\mathbf{D}_{0x}^{G, G} \mathbf{u}[\Theta_0(x)] = \mathbf{A}(x) \tau(x) + \lim_{y \rightarrow +0} \mathbf{K}(x, y) \mathbf{u}_y(x, y) + \mathbf{c}(x), \quad (33)$$

где учтено условие (25): $\mathbf{u}(x, 0) = \tau(x)$.

Пусть в условии (23) матрица $\mathbf{K}(x, y) = \mathbf{B}(x)y^B$. Тогда, обозначая $\lim_{y \rightarrow +0} y^B \mathbf{u}_y(x, y) = v(x)$ и подставляя в (33) значение вектора $\mathbf{u}[\Theta_0(x)]$, вычисленное по формуле (32), для определения неизвестной в представлении решения задачи Коши (29) функции $v(x)$, получим систему уравнений

$$\gamma(G)\tau(x) + \sigma(G)\mathbf{D}_{0x}^{G,G}\mathbf{D}_{0x}^{-(E-G)}x^{-G}v(x) = \mathbf{A}(x)\tau(x) + \mathbf{B}(x)v(x) + \mathbf{c}(x). \quad (34)$$

Записывая матричный оператор $\mathbf{D}_{0x}^{G,G}$ по формуле (9) и применяя композиционное тождество для матричных интегродифференциальных оператора Римана – Лиувилля [4]

$$\mathbf{D}_{0x}^G x^{2G-E} \mathbf{D}_{0x}^{-(E-G)} \mathbf{f} = x^{G-E} \mathbf{D}_{0x}^{2G-E} \mathbf{f},$$

вычислим:

$$\mathbf{D}_{0x}^{G,G} \mathbf{D}_{0x}^{-(E-G)} x^{-G} \mathbf{f} = x^{E-G} \left(\mathbf{D}_{0x}^G x^{2G-E} \mathbf{D}_{0x}^{-(E-G)} \right) x^{-G} \mathbf{f} = x^{E-G} \left(x^{G-E} \mathbf{D}_{0x}^{2G-E} x^G \right) x^{-G} \mathbf{f} = \mathbf{D}_{0x}^{2G-E} \mathbf{f}. \quad (34)$$

В окончательном виде система интегральных уравнений (34) имеет вид:

$$\mathbf{B}(x)v(x) - \sigma(G)\mathbf{D}_{0x}^{-(E-2G)}v(x) = \mathbf{f}(x), \quad (35)$$

где $\mathbf{f}(x) = [\gamma(G) - \mathbf{A}(x)]\tau(x) - \mathbf{c}(x)$.

Потребуем обратимости матрицы $\mathbf{B}(x)$ всюду на отрезке $[0,1]$. Тогда система уравнений (35) окажется системой интегральных уравнений Вольтерра II рода, решение которой всегда существует и единственно в классе непрерывных вектор - функций [17]. Повышая требования на гладкость коэффициентов системы уравнений (35), можно добиться требуемой для корректности задачи Коши гладкости искомой вектор – функции $v(x)$.

Т е о р е м а 1. Пусть $\mathbf{A}(x), \mathbf{B}(x), \mathbf{c}(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, $K(x, y) = \mathbf{B}(x)y^B$. Если матрица $\mathbf{B}(x)$ обратима всюду на отрезке $[0,1]$, то единственное решение $\mathbf{u}(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ системы уравнений (21) с условиями (23) и (25) определяется по формуле (29).

Доказано, что корректность задачи является следствием корректности задачи Коши, решение которой использовалось при доказательстве теоремы, и однозначной разрешимости системы уравнений Вольтерра II рода с ядром Абеля (35).

З а м е ч а н и е 1. Если в условиях задачи матрица $\mathbf{B}(x)$ не зависит от x и является обратимой, то система интегральных уравнений (35) становится системой уравнений Абеля II рода. Ее решение может быть получено в терминах матричной функции Миттаг – Леффлера [4,18], когда B^{-1} представима матрицей $h(G)$, где $h(z)$ - любая аналитическая функция, определенная на спектре $\Lambda(G)$ матрицы G .

Действительно, обозначая $B^{-1}\sigma(G) = \lambda(G)$, $B^{-1}\mathbf{f}(x) = \varphi(x)$, получим систему интегральных уравнений вида (13), в которой $\lambda(G)$ определяется по формуле (12):

$$v(x) - \lambda(G)\mathbf{D}_{0x}^{-(E-2G)}v(x) = \varphi(x).$$

Ее решение может быть найдено по формуле (15) или (16), если в них положить $A = E - 2G$.

З а м е ч а н и е 2. Если в подстановке задачи 1 заменить условие (25) на условие (26), то из системы уравнений (34) неизвестная вектор – функция $\tau(x)$ определяется явным образом:

$$\tau(x) = [\gamma(G) - \mathbf{A}(x)]^{-1} [\mathbf{c}(x) + \mathbf{B}(x)v(x) - \sigma(G)\mathbf{D}_{0x}^{-(E-2G)}v(x)],$$

в предположении существования обратной матрицы $[\gamma(G) - \mathbf{A}(x)]^{-1}$ всюду на $[0,1]$.

З а д а ч а 2. Найти регулярное в Ω решение системы уравнений (21), удовлетворяющее условию (24) при $\alpha(z) = \frac{m+2-z}{2(m+1)}$ и условию (26). Компоненты $[2 \times 2]$ - функциональных матриц $\mathbf{A}(x)$, $\mathbf{K}(x, y)$ и векторов $\mathbf{c}(x), v(x)$ - заданные функции.

Указанная в условии задачи функция $\alpha(x)$ принимает на матрице B значение:

$$\alpha(B) = \frac{1}{2(m+1)} [(m+2)E - B] = \frac{1}{2(m+1)} (2mE + 2E - B - mE) = E - \frac{B+mE}{2(m+1)} = E - G.$$

Пусть в условии (24) матрица $\mathbf{K}(x, y) = \mathbf{B}(x)y^B$. Тогда, обозначая неизвестную вектор – функцию $\mathbf{u}(x, 0) = \tau(x)$ и учитывая условие (26), запишем условие (24) в терминах матрицы G :

$$\mathbf{D}_{0x}^{E-G} \mathbf{u}[\Theta_0(x)] = \mathbf{A}(x)\tau(x) + \mathbf{B}(x)v(x) + \mathbf{c}(x). \quad (36)$$

Подставляя в (36) значение вектора $\mathbf{u}[\Theta_0(x)]$, вычисленное по формуле (32), для определения неизвестной в представлении решения задачи Коши (29) функции $\tau(x)$, получим систему дифференциальных уравнений дробного порядка.

Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{0x}^{E-G} \mathbf{u}[\Theta_0(x)] &= \gamma(G) \mathbf{D}_{0x}^{E-G} \mathbf{D}_{0x}^{-G,G} \tau(x) + \sigma(G) \mathbf{D}_{0x}^{E-G} \mathbf{D}_{0x}^{-(E-G)} x^{-G} v(x) = \\ &= \gamma(G) \mathbf{D}_{0x}^{E-G} x^{E-2G} \mathbf{D}_{0x}^{-G} \tau(x) + \sigma(G) x^{-G} v(x) \end{aligned}$$

с учетом коммутативности функций от матрицы G , определения матричного оператора Эрдейи – Кобера и свойств матричных интегродифференциальных операторов Римана – Лиувилля.

Используя тождество [4]

$$\mathbf{D}_{0x}^{E-G} x^{E-2G} \mathbf{D}_{0x}^{-G} \mathbf{f} = x^{-G} \mathbf{D}_{0x}^{E-2G} x^{E-G} \mathbf{f},$$

получим

$$\gamma(G) x^{-G} \mathbf{D}_{0x}^{E-2G} \tau(x) + \sigma(G) x^{-G} v(x) = \mathbf{A}(x)\tau(x) + \mathbf{B}(x)v(x) + \mathbf{c}(x). \quad (37)$$

Решение системы уравнений (37) будем искать в классе вектор – функций, представимых матричным интегральным оператором $\mathbf{I}_{0x}^{2G-E}$ [4]. Тогда существует вектор – функция $\phi(x)$: $\tau(x) = \mathbf{D}_{0x}^{-(E-2G)} \phi(x)$, такая, что система уравнений (37) редуцируется к следующей системе интегральных уравнений Вольтерра:

$$\gamma(G)\phi(x) - x^G \mathbf{A}(x) \mathbf{D}_{0x}^{-(E-2G)} \phi(x) = \mathbf{f}(x), \quad (38)$$

где $\mathbf{f}(x) = x^G \mathbf{c}(x) + [x^G \mathbf{B}(x) - \sigma(G)]v(x)$ - известная по условиям задачи функция.

Если матрица $x^G \mathbf{A}(x) \in C[0,1]$, то решение системы интегральных уравнений (38) существует и единственно в классе непрерывных функций.

Т е о р е м а 2. Пусть $\mathbf{A}(x), \mathbf{B}(x), \mathbf{c}(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, $K(x, y) = \mathbf{B}(x)y^B$. Если $\mathbf{u}(x, 0) \in \mathbf{I}_{0x}^{E-2G}$, то единственное решение $\mathbf{u}(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ системы уравнений (21) с условиями (24) и (26) определяется по формуле (29).

З а м е ч а н и е 1. В частном случае, когда матрица $\mathbf{A}(x) = x^{-G} \gamma_1(G)$, где $\gamma_1(z)$ - произвольная аналитическая функция, определенная на спектре матрицы G , система уравнений (38) превращается в систему интегральных уравнений Абеля II рода, решение которой нетрудно выписать в терминах матричной функции Миттаг - Леффлера.

З а м е ч а н и е 2. Если в постановке задачи 2 условие (26) заменить на условие (25), то из системы уравнений (37) сразу следует, что

$$v(x) = [x^G \mathbf{B}(x) - \sigma(G)]^{-1} \{ [\gamma(G) \mathbf{D}_{0x}^{E-2G} - x^G \mathbf{A}(x)] \tau(x) - x^G \mathbf{c}(x) \}$$

при условии обратимости матрицы $x^G \mathbf{B}(x) - \sigma(G)$ всюду на $[0,1]$.

Доказательства всех утверждений очевидны и следуют из однозначной разрешимости систем уравнений Вольтерра II рода или из существования соответствующих обратных матриц.

Принадлежность решений требуемым классам функций проверяется непосредственно. Корректность поставленных задач теперь становится следствием корректности задачи Коши.

Отметим, что нелокальные краевые задачи для систем уравнений гиперболического типа с вырождением первого и второго рода или вырождением порядка рассматривались авторами настоящей работы в [19-27].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 567с.
2. Андреев А.А., Килбас А.А. О некоторых ассоциированных гипергеометрических функциях // Изв. высш. учеб. заведений. Матем. 1984. №12. С.3-12.
3. Андреев А.А. О некоторых приложениях ассоциированных гипергеометрических функций // Дифференциальные уравнения (математическая физика): Тез. докл. участников Куйбышевского област. межвуз. науч. совещания-семинара. Куйбышев, 1984. С. 8-9.
4. Андреев А.А., Огородников Е.Н. Матричные интегродифференциальные операторы и их применение // Вестн. Самар. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. Самара: СамГТУ. 1999. Вып. 7. С.27-37.
5. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. В 3т. Т.3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матве. М.: Наука, 1967. 299 с.

6. Джрбабян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.
7. Андреев А.А. Нелокальные краевые задачи для одной модельной вырождающейся системы гиперболического типа // Краевые задачи для уравнений математической физики. Сб. трудов. Куйбышев: Изд-во Куйбыш. пед. ин-та, 1990. С.3-6.
8. Андреев А.А. Об одном обобщении операторов дробного интегрирования и его приложения // Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики. Матем. Всесоюз. конф. Владивосток: 1990. С.91.
9. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
10. Мюнц Г. Интегральные уравнения. Т.1. Л.-М.: ГТТИ, 1934. 330 с.
11. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М.: ИИЛ, 1960. 330 с.
12. Hill E., Tamarkin J.D. On the theory of liner equation // Ann. Math. 1930. Vol. 31. P. 479-528.
13. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
14. Бицадзе А.В. К теории одного класса уравнений смешанного типа. // Некоторые проблемы математики и механики. М.-Л.: Наука, 1970. С. 112-119.
15. Андреев А.А. О методе Римана для одной системы уравнений гиперболического типа с кратными характеристиками // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: ИМ СОАН СССР. 1981.
16. Андреев А.А. Задача Коши для некоторых вырождающихся гиперболических система второго и четвертого порядков // Дифференц. и интегральные уравнения. Межвуз. сб. научн. трудов. Куйбышев: КГПИ, 1987. С.46-57.
17. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.
18. Андреев А.А., Огородников Е.Н. Нелокальные краевые задачи для одной системы уравнений с вырождением порядка // Труды средневолжского математического общества. Т.2. Саранск: СВМО, №1, 1999. С.75-76.
19. Огородников Е.Н. О нелокальной краевой задаче для одной модельной вырождающейся системы гиперболического типа // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: ИМ СОАН СССР., 1988. С. 150-15.
20. Андреев А.А., Огородников Е.Н. О некоторых нелокальных краевых задачах для одной модельной вырождающейся системы гиперболического типа // Линейные операторы в функциональных пространствах. Матер. регион. конф. Грозный: Чечено – ингуш. ун-т, 1989. С.23-24.
21. Андреев А.А., Огородников Е.Н. Нелокальные краевые задачи для вырождающейся системы и интегральные уравнения третьего рода // Интегральные уравнения и краевые задачи математической физики. Матем. Всесоюз. конф. Владивосток, 1990. С.97.
22. Огородников Е.Н. Две нелокальные краевые задачи для вырождающейся системы гиперболического типа // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды пятой межвуз. конф. Самара: Сам. техн. ун-т, 1995. С.81-82.
23. Огородников Е.Н. Краевые задачи со смещением для вырождающейся системы гиперболического типа // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды шестой межвуз. конф. Самара: Сам. техн. ун-т, 1996. С.75-77.
24. Огородников Е.Н., Сеницкий А.Ю. Об одной нелокальной краевой задаче для вырождающейся системы гиперболического типа // Математическое моделирование и краевые задачи. Тр. седьмой межвуз. конф. Самара: Самар. техн. ун-т, 1997. С. 60-65.
25. Андреев А.А., Огородников Е.Н. Некоторые краевые задачи с условием типа Бицадзе – Самарского для системы уравнений с оператором Бицадзе – Лыкова // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды девятой межвуз. конф. Самара: Сам. техн. ун-т, 1999. С.3-11.
26. Огородников Е. Н. О корректности некоторых нелокальных краевых задач для системы уравнений Бицадзе – Лыкова с инволютивной матрицей// Математическое моделирование и краевые задачи. Труды девятой межвузовской конференции. Самара: Самар. техн. ун-т, 1999. С. 97-102.
27. Огородников Е. Н. О некоторых краевых задачах для системы уравнений Бицадзе – Лыкова с инволютивной матрицей // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды десятой межвуз. конф. Самара: Самар. техн. ун-т, 2000. С. 119-125.