Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Закирова, Приближенное решение обратной спектральной задачи для оператора Лапласа, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 2(), 250–253

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu616>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 18:22:04

Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.958:52+517.95

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Г. А. Закирова

Магнитогорский государственный университет,
455038, г. Магнитогорск, пр-т Ленина, 114.

E-mail: zakirova81@mail.ru

Получено приближённое решение обратной спектральной задачи для оператора Лапласа с кратным спектром.

Ключевые слова: обратная спектральная задача, приближённое решение, оператор Лапласа, кратный спектр.

Введение. В настоящей работе получено приближённое решение обратной спектральной задачи для оператора Лапласа. Рассмотрен случай, когда спектр оператора неединственный.

Основной результат. Пусть

$$\Pi = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}. \quad (1)$$

В пространстве $L_2(\Pi)$ рассмотрим оператор Лапласа T_0 , определённый краевой задачей Дирихле:

$$-\Delta v = \lambda v, \quad v|_{\partial\Pi} = 0, \quad (2)$$

где Δ — оператор Лапласа, $\partial\Pi$ — граница Π .

Известно [1, с. 910], что оператор Лапласа, определённый данной краевой задачей, является дискретным самосопряжённым оператором.

Рассмотрим также оператор $T = \int_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$, являющийся степенью оператора T_0 , где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы оператора T_0 , $\beta \geq 1$, $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$.

Очевидно, спектр $\sigma(T)$ оператора T неединственный. Иногда для удобства будем нумеровать упорядоченные по возрастанию собственные числа λ_{mn} оператора T и связанные с ними спектральные объекты одним нижним натуральным индексом и одним верхним, при этом верхний индекс будет отвечать за кратность ν_t собственного числа λ_t , т. е. $\lambda_t = \lambda_t^k = \lambda_t^j$, $k = \overline{1, \nu_j}$. Известна [2, стр. 206] асимптотика собственных чисел оператора T : $\lambda_t \sim C_1 t^\beta$, $C_1 = \text{const} > 0$, поэтому при $\beta > 1$ ряд $\sum_t \frac{1}{\lambda_t}$ — сходится, поэтому для любого $\lambda \in \rho(T)$ резольвента $R_0(\lambda) = (T - \lambda E)^{-1} \in \mathfrak{S}_1$.

Пусть P — оператор умножения на вещественную функцию $p \in L_2(\Pi)$, называемую потенциалом, с нормой $\|P\| = \frac{\|p\|}{\sqrt{ab}}$.

Закирова Галия Амруловна — старший преподаватель кафедры математического анализа Магнитогорского государственного университета.

Обозначим через μ_t собственные числа оператора $T + P$, занумерованные в порядке возрастания действительных частей с учетом алгебраической кратности, а через u_t — соответствующие им ортонормированные в $L_2(\Pi)$ собственные функции.

Введём обозначения: $r_t = \frac{1}{2} \min\{\lambda_{t+1} - \lambda_t; \lambda_t - \lambda_{t-1}\}$, $r_0 = \inf_t r_t$;

$$s = \left(\sum_{t=1}^{\infty} r_t^2 \left(\max_{\lambda \in \gamma_{r_t}} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \right)^2 \right)^{1/2};$$

$$\gamma_t = \{\lambda : |\lambda_t - \lambda| = r_0\}, \quad \Gamma_t = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \in a_t\};$$

$$\Omega_t = \{\lambda : |\lambda_t - \lambda| \geq r_0\}; \quad \Omega = \bigcap_{t=1}^{\infty} \Omega_t.$$

Справедливы следующие утверждения [3].

ЛЕММА. Пусть $\|P\| < r_0/2$, тогда оператор $T + P$ — дискретен и его собственные числа μ_t имеют такую же кратность, что и λ_t , причём

(i) если $R_0(\lambda)$ — оператор Гильберта—Шмидта, то и $R(\lambda)$ — оператор Гильберта—Шмидта,

(ii) если $\lambda_t \in \mathbb{C} \setminus \Omega_t$, то $\mu_t^s \in \mathbb{C} \setminus \Omega_t$, $s = \overline{1, \nu_t}$.

ТЕОРЕМА. Пусть $\beta > \frac{3}{2}$, $r \in (0, \min\{r_0, \frac{1}{2s}\})$. Если для комплексной последовательности $\{\xi_t^k\}$ выполняется неравенство

$$2\sqrt{ab} \left(\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} |\xi_t^k - \lambda_t|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{r}{2}(1 - \omega),$$

где $\omega = 2sr < 1$, то существует потенциал $p \in L_2(\Pi)$ такой, что для любого $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\nu_t} \xi_t^k = \sum_{k=1}^{\nu} \mu_t^k, \quad (3)$$

где $\sigma(T + P) = \{\mu_t^k\}$.

Поставим задачу найти приближённое решение, существование которого показано в данной теореме.

Введём в рассмотрение следующую систему функций:

$$\varphi_{mn}(x) = \frac{4}{\sqrt{ab}} \cos \frac{2\pi mx}{a} \cos \frac{2\pi ny}{b}.$$

При $m, n > 0$ эту систему будем нумеровать нижним и верхним индексами в соответствии с нумерацией собственных чисел λ_t^k .

Уравнение $p = \alpha_0 - \alpha(p)$, где

$$\alpha_0 = \sqrt{ab} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} (\xi_t^k - \lambda_t^k) \varphi_t^k, \quad \alpha(p) = \sqrt{ab} \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{\alpha_t(p)}{\nu_t} \varphi_t^k,$$

$$\alpha_t(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} \lambda \operatorname{Sp}[R(\lambda)(PR_0(\lambda))^2] d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} \lambda \operatorname{Sp}\left[\sum_{k=2}^{\infty} R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k\right] d\lambda,$$

имеет единственное решение p .

Найти его можно методом последовательных приближений.

Пусть $p_0 \equiv 0$, тогда $p_{t+1} = \alpha_0 - \alpha(p_t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} p_t = p$.

Найдём приближённое решение $\tilde{p}$: $\tilde{p} = \alpha_0 - \tilde{\alpha}(\alpha_0)$, где

$$\tilde{\alpha}(p) = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{\tilde{\alpha}_t(p)}{\nu_t} \varphi_t^k, \quad \tilde{\alpha}_t(p) = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_t^{(k)}(p).$$

Здесь $\alpha_t^{(k)}$ — k -тая поправка теории возмущений:

$$\alpha_t^{(k)}(p) = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int_{\gamma_t} \lambda \operatorname{Sp} [R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^k] d\lambda = \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi i k} \int_{\gamma_t} \operatorname{Sp}[PR_0(\lambda)]^k d\lambda.$$

Оценим разности k -тых поправок, $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} |\alpha_t^{(k)}(p) - \alpha_t^{(k)}(p_1)| &= \frac{1}{2\pi k} \left| \int_{\gamma_t} \operatorname{Sp} [(PR_0(\lambda))^k - (P_1R_0(\lambda))^k] d\lambda \right| \leq \\ &\leq \frac{r_t}{k} \max_{\lambda \in \gamma_t} \|(PR_0(\lambda))^k - (P_1R_0(\lambda))^k\|_1 \leq \\ &\leq \frac{r_t}{k} \max_{\lambda \in \gamma_t} \left\| \sum_{s=0}^{k-1} (P_1R_0(\lambda))^s (P - P_1)R_0(\lambda)(PR_0(\lambda))^{k-s-1} \right\|_1 = \\ &= \frac{r_t}{k} \max_{\lambda \in \gamma_t} \left(\sum_{s=0}^{k-1} \|P - P_1\| \left(\frac{r}{2}\right)^{k-1} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \|R_0(\lambda)\|^{k-2} \right) = \\ &= r_t \|P - P_1\| \left(\frac{r}{2}\right)^{k-1} \max_{\lambda \in \gamma_t} (\|R_0(\lambda)\|_2^2 \|R_0(\lambda)\|^{k-2}). \end{aligned}$$

Здесь P_1 — оператор умножения на p_1 , т. е. на α_0 . Далее оценим модуль разности:

$$\begin{aligned} |\alpha_t(p) - \alpha_t(p_1)| &\leq r_t \|P - P_1\| \frac{r}{2} \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{2}\right)^k \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|^k \leq \\ &\leq rr_t \|P - P_1\| \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2 < rr_t (\|P\| + \|P_1\|) \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2 < \\ &< \frac{2r^2 r_t}{\sqrt{ab}} \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2. \end{aligned}$$

Итак,

$$|\alpha_t(p) - \tilde{\alpha}_t(\alpha_0)| < \frac{2r^2 r_t}{\sqrt{ab}} \max_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_t(\alpha_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} \lambda \operatorname{Sp}[R_0(\lambda)(P_1R_0(\lambda))^2] d\lambda = \\ &= \sum_{j \neq t} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{(\alpha_0 \varphi_t^k, \varphi_j^k) \cdot (\alpha_0 \varphi_j^k, \varphi_t^k)}{\lambda_t^k - \lambda_j^k} = \sum_{j \neq t} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{(\alpha_0 \varphi_t^k, \varphi_j^k)^2}{(\lambda_t^k - \lambda_j^k)}. \end{aligned}$$

В итоге

$$\tilde{p} = \alpha_0 - \sqrt{ab} \sum_t \left(\sum_{j \neq t} \sum_{k=1}^{\nu_t} \frac{(\alpha_0 \varphi_t^k, \varphi_j^k)^2}{\lambda_t^k - \lambda_j^k} \right) \varphi_t^k. \quad (4)$$

Выражение (4) задаёт приближённое решение поставленной обратной задачи. Для численной реализации представленного алгоритма в среде **Maple 6** создан программный продукт.

Положим для примера $a = 1$, $b = \sqrt[4]{3}$, $\beta = 5/2$, $\xi_{mn} = \lambda_{mn} + 0.0001$. Тогда приближённое решение, найденное программой по первым трём членам последова-

тельности $\{\xi_{mn}\}$, имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{p} = & 0.0004006101099 + \\ & + 0.0004000001236 \cos(18.84955592x) + 0.0003996020352 \cos(4.774188417y) + \\ & + 0.0003999764584 \cos(9.548376831y) + 0.0003999948648 \cos(12.56637062x) + \\ & + 0.0003999963294 \cos(14.32256525y) + 0.0003998709158 \cos(6.283185308x) + \\ & + 0.0003999661512 \cos(6.283185308x) \cos(4.774188417y) + \\ & + 0.0003999943750 \cos(6.283185308x) \cos(9.548376831y) + \\ & + 0.0003999987614 \cos(6.283185308x) \cos(14.32256525y) + \\ & + 0.0003999956908 \cos(12.56637062x) \cos(4.774188417y) + \\ & + 0.0003999972752 \cos(12.56637062x) \cos(9.548376831y) + \\ & + 0.0003999988398 \cos(12.56637062x) \cos(14.32256525y) + \\ & + 0.0003999988488 \cos(18.84955592x) \cos(4.774188417y) + \\ & + 0.0003999994667 \cos(18.84955592x) \cos(9.548376831y) + \\ & + 0.0003999997508 \cos(18.84955592x) \cos(14.32256525y). \end{aligned}$$

Заключение. В настоящей работе предложен алгоритм приближённого решения обратной спектральной задачи для оператора Лапласа с кратным спектром. Представлены результаты численного эксперимента.

Выражаю глубокую признательность своему научному руководителю Седову Андрею Ивановичу.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Данфорд, Н. Линейные операторы. Спектральная теория [Текст] / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 1064 с.
2. Титчмарш, Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка [Текст] / Э. Ч. Титчмарш. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961. — 555 с.
3. Седов, А. И. Обратная задача спектрального анализа для степени оператора Лапласа на равнобедренном прямоугольном треугольнике [Текст] / А. И. Седов, Г. А. Закирова // Вестн. Сам. гос. ун-та. Естественнаучн. сер. — 2008. — С. 34–42.

Поступила в редакцию 05/IX/2008;
в окончательном варианте — 26/IX/2008.

MSC: 35Pxx, 35R30

APPROXIMATED SOLUTION OF THE INVERSE SPECTRAL PROBLEM FOR THE LAPLACE OPERATOR

G. A. Zakirova

Magnitogorsk state university,
455038, Magnitogorsk, Lenina prosp., 114
E-mail: zakirova81@mail.ru

The article is devoted to finding an approximated solution of the inverse spectral problem for the Laplace operator with multiple spectrum.

Key words: *an inverse problem, an approximate solution, Laplace operator, a multiple spectrum.*

Original article submitted 05/IX/2008;
revision submitted 26/IX/2008.

Zakirova Galiya Amrullova, Senior Lecturer, Dept. of Mathematical Analysis of Magnitogorsk State University.