Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Э. Сеницкий, А. Ю. Сеницкий, Об одной системе обыкновенных дифференциальных уравнений и её приложении в прикладной теории упругости, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2001, выпуск 12, 54–60

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu62>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 17:14:45

Ю.Э. Сеницкий, А.Ю. Сеницкий

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИИ В ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Рассматривается система трех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Существенным представляется то, что ее частные случаи совпадали с системами уравнений, которые получаются при интегрировании осесимметричных начально-краевых задач динамики оболочек в уточненной постановке методом разложения по собственным вектор-функциям. В процессе исследования использовалось преобразование зависимых переменных в сочетании с методом факторизации получающегося при этом дифференциального оператора. Подробно изучены системы уравнений, соответствующие ядровым краевым задачам непрерывно неоднородных по толщине и трехслойных сферических, а также круговых конических оболочек с конечной сдвиговой жесткостью.

Пусть задана однородная система дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=0}^2 a_{2-k}(x) D^k \bar{U}(x) = 0, \quad (1)$$

где $\bar{U}(x) \in \bar{C}_I^2$ – искомая вектор-функция; $x \in I(l_1, l_2)$ – открытый интервал вещественной оси;

$$D^k = \frac{d^k}{dx^k}, \quad k = \overline{0, 2}; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}(x) &= \|U_1(x), U_2(x), U_3(x)\|^T, \quad a_0 = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, a_{33}); \\ a_1(x) &= \begin{vmatrix} b_{11}(x) & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22}(x) & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33}(x) \end{vmatrix}, \quad a_2(x) = \begin{vmatrix} c_{11}(x) & 0 & c_{13} \\ c_{21}(x) & c_{22} & c_{23}(x) \\ c_{31} & 0 & c_{33}(x) \end{vmatrix}; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{33} = k^{-2} a_{22}, \quad b_{11}(x) = b_{33}(x) = k^{-2} b_{22}(x), \quad c_{11}(x) = c_{11}^*(x) + d_{11}, \quad c_{33}(x) = c_{11}^*(x) + d_{33}, \\ c_{21}(x) &= d_{21} b_{11}(x), \quad c_{23}(x) = d_{23} b_{11}(x), \quad b_{21} = a_{11} d_{21} = \text{const}, \quad b_{23} = a_{11} d_{23} = \text{const}, \end{aligned} \quad (4)$$

$a_{ii}, d_{ii}, b_{12}, b_{32}, c_{13}, c_{31}, c_{22}, k$ – вещественные константы; $b_{11}(x), c_{11}^*(x) \in C_I$, T – знак транспонирования.

Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. Если выполняется функциональное равенство

$$b'_{11}(x) = c_{11}^*(x), \quad (b'_{11}(x) = D b_{11}) \quad (5)$$

и константы b_{ij}, d_{ij}, c_{ij} таковы, что

$$b_{12} - c_{13} \neq 0, \quad d_{23} b_{12} - k^2 c_{13} \neq 0, \quad (d_{23} b_{12} - k^2 c_{13})(d_{33} b_{12} - c_{13} b_{32}) + b_{12} c_{22} c_{13} \neq 0, \quad (6)$$

то система (1) – (4) эквивалентна* разрешающему дифференциальному уравнению VI-го порядка относительно потенциала $\Phi(x)$:

$$LLL(\Phi) + r_{20} LL(\Phi) + r_{21} L(\Phi) + r_{22} \Phi = C = \text{const}, \quad (7)$$

$$L = a_{11} D^2 + b_{11}(x) D. \quad (8)$$

Постоянные коэффициенты r_{20}, r_{21}, r_{22} уравнения (7) выражаются через $b_{ij}, d_{ij}, c_{ij}, k$, а потенциал $\Phi(x) \in \bar{C}_I^6$ связан с компонентой $U_1(x)$ вектор-функции $\bar{U}(x)$ зависимостью:

$$U_1(x) = \Phi'(x) = D \Phi. \quad (9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем вторую потенциальную функцию $V(x) \in C_I^3$ по формуле

$$U_3(x) = k^{-2} V'(x) + \Phi'(x) - U_2'(x) = k^{-2} D V + D \Phi - D U_2. \quad (10)$$

В результате подстановки соотношений (9), (10) в систему уравнений (1), последняя преобразуется к следующему виду:

* Приводится к уравнению (7).

$$\left. \begin{aligned} G(\Phi) + (d_{11} + c_{13})D(\Phi) + k^{-2}c_{13}D(V) + (b_{12} - c_{13})DU_2 &= 0, \\ (d_{21} + d_{23})L(\Phi) + k^{-2}d_{23}L(V) + (k^2 - d_{23})L(U_2) + c_{22}U_2 &= 0, \\ G(\Phi) + k^{-2}G(V) - G(U_2) + (d_{33} + c_{13})D\Phi + k^{-2}d_{33}DV + (b_{32} - d_{33})DU_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Здесь

$$G = a_{11}D^3 + b_{11}(x)D^2 + c_{11}^*(x)D. \quad (12)$$

Если потребовать выполнение условия (5), то справедливо операторное равенство

$$G(\dots) = D L(\dots). \quad (13)$$

После интегрирования первого и третьего уравнений (11) с учетом (13) в результате имеем такую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} L(\Phi) + (d_{11} + c_{13})\Phi + k^{-2}c_{13}V + (b_{12} - c_{13})U_2 &= C_1^*, \\ (d_{21} + d_{23})L(\Phi) + k^{-2}d_{23}L(V) + (k^2 - d_{23})L(U_2) + c_{22}U_2 &= 0, \\ L(\Phi) + k^{-2}L(V) - L(U_2) + (d_{33} + c_{13})\Phi + k^{-2}d_{33}V + (b_{32} - d_{33})U_2 &= C_2^*, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где C_1^*, C_2^* - произвольные постоянные интегрирования.

Исключая из (14) последовательно функции U_2 и V , получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} r_{19}LLL(\Phi) + (r_6r_{18} + r_8r_{16} - r_{10}r_{15})LL(\Phi) + (r_8r_{17} - r_7r_{18} - r_{10}r_{16})L(\Phi) + \\ + (r_9r_{18} - r_{10}r_{17})\Phi = C^* = const. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь r_s - постоянные коэффициенты, причем

$$\begin{aligned} r_{19} &= r_8 \cdot r_{15}, r_{18} = r_8 \cdot r_{14} + r_{10} \cdot r_{12}, r_{17} = r_8 \cdot r_{13} + r_9 \cdot r_{12}, r_{16} = r_8 \cdot r_{11} - r_7 \cdot r_{12}, \\ r_{15} &= r_1 \cdot r_8 + r_6 \cdot r_{12}, r_{14} = k^{-2}d_{33} - r_3 \cdot r_5, r_{13} = c_{31} + d_{33} - r_2 \cdot r_5, r_{12} = k^{-2} + r_3, \\ r_{11} &= 1 + r_2 - r_1 \cdot r_5, r_{10} = c_{22}r_3, r_9 = c_{22}r_2, r_8 = k^{-2}d_{23} - r_3 \cdot r_4, r_7 = d_{21} + d_{23} - c_{22}r_1 - r_2 \cdot r_4, \\ r_5 &= b_{32} - d_{33}, r_4 = k^2 - d_{23}, r_3 = k^{-2}c_{13}r_1, r_2 = (d_{11} + c_{13})r_1, r_1 = (b_{12} - c_{13})^{-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (15) немедленно следует разрешающее уравнение (7), в котором

$$r_{20} = r_{19}^{-1}(r_6r_{18} + r_8r_{16} - r_{10}r_{15}), r_{21} = r_{19}^{-1}(r_8r_{17} - r_7r_{18} - r_{10}r_{16}), r_{22} = r_{19}^{-1}(r_9r_{18} - r_{10}r_{17}). \quad (17)$$

В процессе приведения системы уравнений (14) к (15) использовались следующие выражения для функций U_2 и V :

$$U_2(x) = r_1[C_1^* - L(\Phi)] - r_2\Phi - r_3V, \quad (18)$$

$$V(x) = -r_{18}^{-1}[r_{15}LL(\Phi) + r_{16}L(\Phi) - r_{17}\Phi] + C^{**}, \quad (19)$$

где C^{**} - новая постоянная.

Соотношения (17) – (19) справедливы, если

$$r_1^{-1} \neq 0, r_{18} \neq 0, r_{19}^{-1} \neq 0. \quad (20)$$

В раскрытом виде неравенства (20) и представляют условия (6).

Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. Общее решение $\Phi^*(x)$ соответствующего (7) однородного дифференциального уравнения определяется системой линейно-независимых частных решений $\Phi_m(x)$ порождающих уравнений II-го порядка

$$(L - I_m)\Phi_m(x) = 0, \quad m = \overline{1, 3} \quad (21)$$

и их модификаций, в которых параметры I_m являются корнями кубического уравнения

$$I_m^3 + r_{20}I_m^2 + r_{21}I_m + r_{22} = 0 \quad (22)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим соответствующее (7) однородное уравнение

$$L^3(\Phi^*) + r_{20}L^2(\Phi^*) + r_{21}L(\Phi^*) + r_{22}\Phi^* = 0, \quad (23)$$

где введено обозначение для степеней дифференциального оператора L :

$$L^m = \frac{d^m}{dx^m}, \quad L^0 = 1. \quad (23)$$

В результате факторизации левой части уравнения (23) имеем

$$L^3(\dots) + r_{20}L^2(\dots) + r_{21}L(\dots) + r_{22}(\dots) = \prod_{m=1}^3 (L - I_m)(\dots), \quad (24)$$

Если теперь приравнять в (24) коэффициенты при одинаковых степенях L , то получаем такую систему равенств:

$$I_1 + I_2 + I_3 = -r_{20}, \quad I_1I_2 + I_1I_3 + I_2I_3 = r_{21}, \quad I_1I_2I_3 = -r_{22}. \quad (25)$$

В силу теоремы Виета из (25) следует, что I_m ($m = \overline{1,3}$) являются корнями кубического уравнения (22).

Дифференциальное уравнение (23) с учетом (24) принимает следующий вид:

$$\prod_{m=1}^3 (L - I_m) \Phi(x) = 0, \quad (26)$$

откуда немедленно следуют (21) и их модификации в зависимости от вида корней (22). Действительно:

а) при $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ имеем непосредственно

$$(L - I_1)\Phi_1 = 0, \quad (L - I_2)\Phi_2 = 0, \quad (L - I_3)\Phi_3 = 0; \quad (27)$$

б) при $I_1 = 0, I_2 \neq I_3$ соответственно

$$L\Phi_1 = 0, \quad (L - I_2)\Phi_2 = 0, \quad (L - I_3)\Phi_3 = 0; \quad (28)$$

с) при $I_1 \neq I_2 = I_3$ линейно независимые решения $\Phi_m(x)$ определяются из такой цепочки порождающих уравнений:

$$(L - I_1)\Phi_1 = 0, \quad (L - I_2)\Phi_2 = 0, \quad (L - I_3)\Phi_3 = \Phi_2; \quad (29)$$

д) если $I_1 = I_2 = I_3 = I$, то в этом случае

$$(L - I)\Phi_1 = 0, \quad (L - I)\Phi_2 = \Phi_1, \quad (L - I)\Phi_3 = \Phi_2. \quad (30)$$

На основании (28) - (30) могут быть рассмотрены и другие варианты корней I_m и соответствующих им порождающих уравнений.

Если обозначить фундаментальную систему решений цепочек порождающих уравнений (27) - (30) соответственно:

$$а) f_1(I_m, x), f_2(I_m, x), \quad m = \overline{1,3}; \quad (31)$$

$$б) j_1(x), j_2(x), f_1(I_m, x), f_2(I_m, x), \quad m = 2,3; \quad (32)$$

$$с) f_1(I_m, x), f_2(I_m, x), j_1(I_2, x), j_2(I_2, x), \quad m = 1,2; \quad (33)$$

$$д) f_1(\lambda, x), f_2(\lambda, x), \phi_1(\lambda, x), \phi_2(\lambda, x), \psi_1(\lambda, x), \psi_2(\lambda, x), \quad (34)$$

то общее решение однородного уравнения (23) может быть записано в виде:

$$а) \Phi^*(x) = \sum_{m=1}^3 \Phi_m(x) = \sum_{m=1}^3 [C_m f_1(I_m, x) + D_m f_2(I_m, x)]; \quad (35)$$

$$б) \Phi^*(x) = \sum_{m=1}^3 \Phi_m(x) = C j_1(x) + D j_2(x) + \sum_{m=2}^3 [C_m f_1(I_m, x) + D_m f_2(I_m, x)]; \quad (36)$$

$$с) \Phi^*(x) = \sum_{m=1}^3 \Phi_m(x) = \sum_{m=1}^2 [C_m f_1(I_m, x) + D_m f_2(I_m, x)] + C_3 j_1(I_2, x) + D_3 j_2(I_2, x); \quad (37)$$

$$д) \Phi^*(x) = \sum_{m=1}^3 \Phi_m(x) = C_1 f_1(I, x) + D_1 f_2(I, x) + C_2 j_1(I, x) + D_2 j_2(I, x) + C_3 \psi_1(I, x) + D_3 \psi_2(I, x); \quad (38)$$

C_m, D_m - произвольные постоянные.

Поскольку (31) - (34) представляют соответственно систему частных решений уравнений (27) - (30), то путем непосредственной их подстановки удовлетворяется (26), а, принимая во внимание (24), - и уравнение (23).

Если одновременно подставить (21) в (23), то в результате получаем кубическое уравнение (22). Теорема доказана.

Очевидно, справедливо более общее утверждение.

Т е о р е м а 3 (обобщение теоремы 2). Решение обыкновенного линейного дифференциального уравнения

$$\sum_{m=0}^n r_m L^m(\Phi) = 0,$$

где L^m - степени оператора L , r_m - постоянные коэффициенты, может быть представлено в виде суммы

$$\Phi(x) = \sum_{m=1}^n \Phi_m(x)$$

частных решений $\Phi_m(x)$ цепочки порождающих уравнений

$$(L - I_m)\Phi_m(x) = 0$$

или ее модификаций (30) в зависимости от вида корней I_m соответствующего алгебраического уравнения

$$\sum_{m=0}^n r_m I^m = 0.$$

Доказательство теоремы аналогично приведенному выше.

Общее решение неоднородного уравнения (7) теперь записывается в виде:

$$\Phi(x) = \Phi^*(x) + A = \sum_{m=1}^3 \Phi_m(x) + A, \quad (39)$$

где $A = \text{const}$, а $\Phi^*(x)$ определяется равенствами (35) – (38).

Если принять во внимание порождающее уравнение (21), то используя соотношения (18), (19), (9), (10) сначала вычисляется функция $V(x)$, а затем и искомые компоненты $U_2(x)$, $U_1(x)$, $U_3(x)$ вектор-функции $\bar{U}(x)$. Имеем

$$\begin{aligned} V(x) &= -r_{18}^{-1} \sum_{m=1}^n (r_{15} I_m^2 + r_{16} I_m + r_{17}) \Phi_m(x) + C^{**}, \\ U_2(x) &= \sum_{m=1}^3 [r_{18}^{-1} r_3 (r_{15} I_m^2 + r_{16} I_m + r_{17}) - (r_1 I_m + r_2)] \Phi_m(x) + D, \\ U_1(x) &= \sum_{m=1}^n \Phi'_m(x), \\ U_3(x) &= \sum_{m=1}^n [(r_1 I_m + r_2 + 1) - r_{18}^{-1} r_3 (r_{15} I_m^2 + r_{16} I_m + r_{17})] \Phi'_m(x) \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь $\Phi_m(x)$, $\Phi'_m(x)$ - соответственно домноженная на произвольные постоянные фундаментальная система решений уравнений (27) – (30) и ее производные.

Из (31) следует, что только функция $U_2(x)$ определяется с точностью до несущественной константы D , появляющейся вследствие повышения порядка исходной системы уравнений (1) в процессе ее интегрирования. Таким образом, без ограничения общности ее можно принять равной нулю:

$$D = 0, \quad (41)$$

и фактически рассматривать соответствующее (7) однородное уравнение, т.е. в выражении (30) считать

$$A = 0. \quad (42)$$

Наконец следует отметить, что возможность построения точного решения системы уравнений (1) – (4) сводится к интегрируемости порождающей цепочки линейных уравнений II-го порядка с переменными коэффициентами (27) – (30). Ниже рассматриваются некоторые частные случаи (1) – (4), встречающиеся в начально-краевых задачах теории оболочек.

1) После разделения переменных методом конечных интегральных преобразований (КИП) в математической модели нестационарной осесимметричной динамической задачи неоднородной или трехслойной непологой сферической оболочки формируется система уравнений (1) – (4) для определения ядровой вектор-функции (собственных форм колебаний) [1, 2], в которой соответственно

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{33} = k^{-2} a_{22} = 1, \quad b_{11}(x) = b_{33}(x) = k^{-2} b_{22}(x) = \text{ctg } x, \quad c_{11}^*(x) = -\sin^{-2} x, \\ d_{11} &= 1 + x^2 m^2 - (k^2 + n), \quad d_{33} = 1 + x^2 s^2 - (k^2 a^{-2} g_{12} + n), \quad d_{21} = -b_{12} = -(1 + n + k^2), \end{aligned}$$

$$d_{23} = c_{13} = k^2, \quad b_{32} = -c_{31} = -k^2 a^{-2} g_{12}, \quad c_{22} = x^2 m^2 - 2(1+n). \quad (43)$$

Здесь n, k, g_{12}, a, m, s - безразмерные константы, причем первые четыре зависят от физико-механических и геометрических характеристик оболочек.

Замечаем, что для элементов (43) матриц (3), (4) выполняются условия (5), (6) теоремы 1 и, следовательно, система (1) эквивалентна разрешающему дифференциальному уравнению (7), причем

$$L = D^2 + \text{ctg } D. \quad (44)$$

Порождающее дифференциальное уравнение (21) в данном случае может быть представлено в виде

$$\Phi_m''(x) + \text{ctg } x \Phi_m'(x) + c_m(c_m + 1)\Phi_m(x) = 0, \quad (45)$$

где

$$l_m = -c_m(c_m + 1),$$

и заменой независимой переменной $z = \cos x$ приводится к уравнению Лежандра.

Общее решение (35) – (37) уравнения (7) с учетом (42) записывается следующим образом.

а) при $l_1 \neq l_2 \neq l_3$ –

$$\Phi(x) = \sum_{m=1}^3 \Phi_m(x) = \sum_{m=1}^3 [C_m P_{C_m}(\cos x) + D_m Q_{C_m}(\cos x)]; \quad (46)$$

б) если $l_1 = 0, l_2 \neq l_3$ –

$$\Phi(x) = \sum_{m=1}^3 \Phi_m(x) = \sum_{m=1}^2 C_1 \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} + D_1 + \sum_{m=2}^3 [C_m P_{C_m}(\cos x) + D_m Q_{C_m}(\cos x)]; \quad (47)$$

с) при $l_1 \neq l_2 = l_3$ –

$$\begin{aligned} \Phi(x) = \sum_{m=1}^3 \Phi_m(x) = \sum_{m=1}^2 [C_m P_{C_m}(\cos x) + D_m Q_{C_m}(\cos x)] + W^{-1} \int_0^x [C_3 P_{C_2}(\cos t) + \\ + D_3 Q_{C_2}(\cos t)] [Q_{C_2}(\cos x) P_{C_2}(\cos t) - P_{C_2}(\cos x) Q_{C_2}(\cos t)] dt. \end{aligned} \quad (48)$$

Здесь $W = (1-x^2)[P_{C_2}(\cos x)Q_{C_2}'(\cos t) - Q_{C_2}(\cos x)P_{C_2}'(\cos t)] = \text{const}$, $P_{C_m}(\cos x), Q_{C_m}(\cos x)$ - функции Лежандра степени C_m первого и второго рода.

Располагая равенствами (46) – (48), по формулам (40) могут быть определены искомые функции $U_1(x), U_2(x), U_3(x)$.

2) В качестве второго примера рассматривается осесимметричная задача динамики для неоднородной конической оболочки конечной сдвиговой жесткости в предположении, что влиянием тангенциальных перемещений в выражении для поперечных сил и прогибов в формулах для нормальных усилий можно пренебречь. При решении ее методом КИП получаем систему уравнений (1) – (4) для ядра интегрального преобразования, в которой элементы матриц (4) определяются такими равенствами:

$$\begin{aligned} a_{11} = a_{33} = k^{-2} a_{22} = 1, \quad b_{11}(x) = b_{33}(x) = k^{-2} b_{22}(x) = x^{-1}, \quad c_{11}^*(x) = -x^{-2}, \\ d_{11} = c_{22} = x^2 m^2, \quad d_{33} = x^2 s^2 - k^2 b, \quad b_{12} = c_{31} = -d_{21} k^2 (1+n) = k^2 (x_0 \text{tg } q)^{-1}, \\ d_{23} = k^2, \quad c_{31} = 0, \quad b_{32} = -k^2 b, \quad b = C R_2^2 D^{-1}. \end{aligned} \quad (49)$$

Здесь k, n, b, m, s, q, x_0 - постоянные величины, из которых только x_0 имеет размерность.

Этот частный случай является особым, поскольку

$$b_{12} - c_{13} = 0. \quad (50)$$

Учитывая (50), используем отличную от описанной выше при доказательстве теоремы 1 схему приведения системы (1) – (4), (49) к разрешающему дифференциальному уравнению (7). Следует при этом иметь в виду, что удовлетворяется основное условие (5) теоремы 1.

Вместо выражения (10) вводим функцию V по формуле

$$U_3(x) = k^{-2} V'(x) - U_2'(x). \quad (51)$$

Преобразованная с учетом (51) и (5), аналогичная (14) система уравнений с точностью до несущественных для дальнейшего решения (41), (42) констант принимает такой вид:

$$\left. \begin{aligned} L(\Phi) + d_{11}\Phi + k^{-2}b_{12}V &= 0, \\ d_{21}L(\Phi) + L(V) + d_{11}U_2 &= 0, \\ k^{-2}L(V) - L(U_2) + k^{-2}d_{33}V + (b_{32} - d_{33})U_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Здесь

$$L = D^2 + x^{-1}D. \quad (53)$$

Если исключить из (52) последовательно функции U_2 и V , то в результате получаем подобное (15) разрешающее дифференциальное уравнение. Имеем

$$LLL(\Phi) + r_{10}LL(\Phi) + r_{11}L(\Phi) + r_{12}\Phi = 0, \quad (54)$$

где

$$\begin{aligned} r_{12} &= r_9^{-1}r_6r_7, \quad r_{11} = r_9^{-1}(r_4r_7 + r_6r_8 - r_5), \quad r_{10} = r_9^{-1}(r_1r_7 + r_4r_9 - r_2), \\ r_9 &= r_1r_8, \quad r_8 = r_1r_7, \quad r_7 = r_3^{-1}, \quad r_6 = k^{-2}d_{33}, \quad r_5 = r_2(d_{33} - b_{32}), \\ r_4 &= k^{-2} + r_1(d_{33} - b_{32}), \quad r_3 = r_1k^{-2}b_{12}, \quad r_2 = r_1d_{21}, \quad r_1 = d_{11}^{-1}. \end{aligned} \quad (55)$$

В процессе приведения (52) к (54) использовались очевидно реализуемые условия

$$r_1^{-1} = d_{11} \neq 0, \quad r_3 \neq 0, \quad r_9 \neq 0. \quad (56)$$

Порождающее дифференциальное уравнение (21), в данном случае (53), представляет уравнение Бесселя

$$\Phi_m''(x) + x^{-1}\Phi_m'(x) + h_m\Phi_m(x) = 0, \quad I_m = -h_m, \quad m = \overline{1,3},$$

а общее решение (54) для различных комбинаций корней соответствующего кубического уравнения

$$I_m^3 + r_{10}I_m^2 + r_{11}I_m + r_{12} = 0$$

записывается следующим образом:

а) если $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ ($h_1 \neq h_2 \neq h_3$) –

$$\Phi(x) = \sum_{m=1}^3 \Phi_m(x) = \sum_{m=1}^3 [C_m I_0(\sqrt{\eta_m} x) + D_m Y_0(\sqrt{\eta_m} x)]; \quad (57)$$

б) при $I_1 = 0, I_2 \neq I_3$ ($h_1 = 0, h_2 \neq h_3$) –

$$\Phi(x) = \sum_{m=1}^3 \Phi_m(x) = C_1 \ln x + D_1 + \sum_{m=2}^3 [C_m I_0(\sqrt{\eta_m} x) + D_m Y_0(\sqrt{\eta_m} x)]; \quad (58)$$

в) при $I_1 \neq I_2 = I_3$ ($h_1 \neq h_2 = h_3$) –

$$\Phi(x) = \sum_{m=1}^3 \Phi_m(x) = \sum_{m=1}^2 [C_m I_0(\sqrt{\eta_m} x) + D_m Y_0(\sqrt{\eta_m} x)] - \frac{\sqrt{\eta} x}{2} [C_3 I_0'(\sqrt{\eta} x) + D_3 Y_0'(\sqrt{\eta} x)]. \quad (59)$$

Здесь $I_0(\dots), Y_0(\dots)$ – функции Бесселя нулевого порядка I-го и II-го рода. Имея в виду (57) – (59) и равенства (40), легко определяются функции $U_1(x), U_2(x), U_3(x)$.

3) Элементы матрицы коэффициентов (4) системы дифференциальных уравнений (1) – (3) ядровой краевой задачи при исследовании нестационарной осесимметричной деформации круговой в плане неоднородной пологой сферической оболочки имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{33} = k^{-2}a_{22} = 1, \quad b_{11}(x) = b_{33}(x) = k^{-2}b_{22}(x) = x^{-1}, \quad c_{11}^*(x) = x^{-2}, \\ b_{12} &= -d_{21} = b(1+n), \quad d_{23} = k^2, \quad d_{11} = x^2 m^2, \quad d_{33} = x^2 s^2 + d_{32}, \quad d_{32} = -k^2 g_{12} a^{-2}, \\ c_{22} &= d_{11} - 2b b_{12}, \quad c_{13} = c_{31} = 0. \end{aligned} \quad (60)$$

Повторяя приведенную выше схему решения и используя представления (9), (51), приходим к следующему разрешающему уравнению

$$LLL(\Phi) + r_{13}LL(\Phi) + r_{14}L(\Phi) + r_{15}\Phi = 0, \quad (61)$$

а также соответствующему кубическому уравнению

$$I_m^3 + r_{13}I_m^2 + r_{14}I_m + r_{15} = 0. \quad (62)$$

Здесь

$$\begin{aligned} r_{15} &= d_{11}(r_7 r_{12})^{-1}, \quad r_{14} = (r_7 r_{10} + r_6)(r_7 r_{12})^{-1}, \quad r_{13} = r_{11} r_{12}^{-1}, \quad r_{12} = (r_1 r_9 + r_2) r_5^{-1}, \\ r_{11} &= (r_1 r_8 + r_3 r_9 + r_4) r_5^{-1}, \quad r_{10} = r_3 r_8 r_5^{-1}, \quad r_9 = r_6 r_7^{-1}, \quad r_8 = d_{11} r_7^{-1}, \quad r_7 = r_1 b_{12}, \quad r_6 = 1 - r_2 b_{12}, \\ r_5 &= k^{-2} d_{33}, \quad r_4 = r_2(d_{33} - b_{32}), \quad r_3 = k^{-2} + (d_{33} - b_{32}) r_1, \quad r_2 = r_1 d_{21}, \quad r_1 = (d_{11} - 2b b_{12})^{-1}. \end{aligned} \quad (63)$$

При этом должны выполняться следующие условия:

$$r_1 \neq 0, \quad b_{12} \neq 0, \quad r_5 \neq 0, \quad r_{12} \neq 0.$$

Дифференциальный оператор L определяется выражением (53), потенциал $\Phi(x)$ по формулам (57) – (59), а искомые функции $U_1(x), U_2(x), U_3(x)$ из равенств (40).

В заключение следует отметить, что аналогичная (1) – (4) система уравнений с постоянными коэффициентами ($a_{ii} = \text{const}, b_{ij} = \text{const}, c_{ij} = \text{const}$) формируется в процессе решения осесимметричной динамической задачи для неоднородной цилиндрической оболочки конечной сдвиговой жесткости.

Таким образом, в настоящей работе рассмотрена система трех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Существенным представляется то, что ее частные случаи совпадали с системами уравнений, которые получаются при интегрировании осесимметричных начально-краевых задач динамики оболочек в уточненной постановке методом разложения по собственным вектор-функциям [1-3]. В процессе исследования использовалось преобразование зависимых переменных в сочетании с методом факторизации [4-6] получающегося при этом дифференциального оператора. Подробно изучены системы уравнений, соответствующие ядровым краевым задачам непрерывно неоднородных по толщине и трехслойных сферических [2,3], а также круговых конических оболочек с конечной сдвиговой жесткостью.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сеницкий Ю.Э. Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики. // Известия вузов. Математика. 1991, №4. С. 57 – 63.
2. Сеницкий Ю.Э. Нестационарная задача динамики для трехслойной сферической оболочки. // Строительная механика и расчет сооружений. 1990, №6. С. 55 – 61.
3. Сеницкий Ю.Э. Осесимметричная динамическая задача для неоднородной пологой сферической оболочки с конечной сдвиговой жесткостью. // Прикладная механика. 1994, Т. 30, №9. С. 50 – 57.
4. Беркович Л.М. Факторизация и преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений. Саратов. Изд-во Саратов. Ун-та. 1989, С. 192.
5. Berkovitch L.M., Netchaevsky M.L., Senitsky Y.E. The method factorization of differential operators and its applications. // Complex. Analysis and applications. Proceedings of the International Conference. Bulgar. Acad. of Sci. Sofia. 1984. P. 55 – 62.
6. Сеницкий Ю.Э., Сеницкий А.Ю. О решении одного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, имеющего приложение в динамической теории упругости. // Математическая физика и нелинейная механика. АН УССР, 1990, №13(47). С. 22-25.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования РФ в соответствии с конкурсом грантов по фундаментальным исследованиям в области технических наук, проект ТОО-12.1-2109.