Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Заусаева, В. Е. Зотеев, Определение параметров испытательных импульсов на основе стохастических разностных уравнений, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 2(), 262–267

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu626>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 07:58:42

Математическое моделирование

УДК 681.5.015

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ИСПЫТАТЕЛЬНЫХ ИМПУЛЬСОВ НА ОСНОВЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. А. Заусаева, В. Е. Зотеев

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: zausmasha@mail.ru; zoteev@pm.samgtu.ru

Рассматривается задача параметрической идентификации типовых ударных воздействий по результатам наблюдений их амплитудно-частотной характеристики. Эта задача решается на основе стохастических разностных уравнений, описывающих результаты измерений мгновенных значений амплитудного спектра.

Ключевые слова: амплитудно-частотная характеристика, линейно параметрическая дискретная модель, стохастическое разностное уравнение.

Для задания испытательного воздействия в промышленном эксперименте обычно используют записи реальных ударных процессов, полученные с помощью специальной записывающей аппаратуры в условиях нормальной эксплуатации. Для последующего их моделирования и воспроизведения на испытательных установках часто используют амплитудный спектр (амплитудно-частотную характеристику) ударного воздействия, который позволяет правильно выбрать структуру и характеристики (в частности, полосу пропускания) виброиспытательного комплекса [1].

Рассматривается задача параметрической идентификации типовых ударных воздействий по результатам наблюдений их амплитудно-частотной характеристики. Основные типы испытательных импульсов при простом и сложном колебательном ударе, их временные характеристики $x(t)$ и амплитудные спектры $a(\omega)$ приведены в таблице [1].

Задача оценки параметров четырех различных воздействий, представленных в таблице, решается на основе стохастических разностных уравнений, описывающих результаты измерений a_k мгновенных значений амплитудного спектра реального ударного процесса.

Амплитудно-частотную характеристику ω прямоугольного импульса будем рассматривать на промежутке $(0, \frac{2\pi}{T})$, а полусинусоидального импульса — на промежутке $(0, \frac{3\pi}{T})$. В этом случае амплитудные спектры могут быть описаны соответственно функциями

$$a(\omega) = \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega T}{2} \quad \text{и} \quad a(\omega) = \begin{cases} \frac{2AT}{\pi} \frac{\cos \frac{\omega T}{2}}{1 - \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2}}, & \text{при } \omega \neq \frac{\pi}{T}, \\ \frac{AT}{2}, & \text{при } \omega = \frac{\pi}{T}. \end{cases}$$

Мгновенные значения $\tilde{a}_k = a(\Delta\omega k)$ ($k \in \mathbb{N}$) амплитудных характеристик, где

*Зотеев Владимир Евгеньевич — доцент кафедры прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета; к.ф.-м.н., доцент.
Заусаева Мария Анатольевна — аспирант кафедры прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета.*

Типичные ударные воздействия и их спектры		
Воздействие	$x(t)$	$a(\omega)$
Прямо- угольный импульс	$\begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ A, & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0, & \text{при } t > T. \end{cases}$	$AT \left \frac{2 \sin \frac{\omega T}{2}}{\omega T} \right .$
Пилооб- разный импульс	$\begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ A \frac{t}{T}, & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0, & \text{при } t > T. \end{cases}$	$\frac{A}{\omega} \sqrt{1 - \frac{2}{\omega T} \sin \omega T + \frac{2}{\omega T} \sin \frac{\omega T}{2}}.$
Полусину- соидальный импульс	$\begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ A \sin \frac{t}{T}, & \text{при } 0 \leq t \leq T, \\ 0, & \text{при } t > T. \end{cases}$	$\frac{2AT}{\pi} \left \frac{\cos \frac{\omega T}{2}}{1 - \frac{\omega^2 T^2}{\pi^2}} \right .$
Сложный колеба- тельный удар	$\begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \phi), & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$	$\frac{\omega}{\sqrt{\omega^4 - 2(\omega_0^2 - \alpha^2)\omega^2 + (\omega_0^2 + \alpha^2)^2}}.$

$\Delta\omega$ — шаг равномерной дискретизации, для представленных выше типовых ударных воздействий описываются соответственно дискретными функциями вида

$$\tilde{a}_k = \frac{2A}{\Delta\omega k} \sin \frac{\Delta\omega k T}{2}, \quad (1)$$

$$\tilde{a}_k^2 = \frac{A^2}{\Delta\omega^2 k^2} \left(1 - \frac{2}{\Delta\omega k T} \sin \Delta\omega k T + \frac{2}{\Delta\omega k T} \sin \frac{\Delta\omega k T}{2} \right), \quad (2)$$

$$\tilde{a}_k = \frac{2AT}{\pi} \frac{\cos \frac{\Delta\omega k T}{2}}{1 - \frac{\Delta\omega^2 k^2 T^2}{\pi^2}}, \quad k \neq \frac{\pi}{\Delta\omega T}, \quad (3)$$

$$\tilde{a}_k^2 = \frac{\Delta\omega^2 k^2}{\Delta\omega^4 k^4 - 2(\omega_0^2 - \alpha^2) \Delta\omega^2 k^2 + (\omega_0^2 + \alpha^2)^2}. \quad (4)$$

С помощью несложных алгебраических преобразований построены линейно параметрические дискретные модели, связывающие в виде рекуррентных формул мгновенные значения дискретных функций (1)–(8).

При обработке экспериментальных данных формируется выборка результатов измерений $a_k = \tilde{a}_k + \varepsilon_k$, которые содержат случайную помеху ε_k ($k = 1, 2, \dots, N$, где N — объём выборки). В этом случае построенные линейно параметрические дискретные модели принимают вид стохастических разностных уравнений:

– для прямоугольного импульсного воздействия:

$$\begin{cases} a_1 = \lambda_2 + \varepsilon_1, \\ a_2 = \lambda_3 + \varepsilon_2, \\ a_k + \left(1 - \frac{2}{k}\right) a_{k-2} = 2 \left(1 - \frac{1}{k}\right) a_{k-1} \lambda_1 + \\ \quad + \left(1 - \frac{2}{k}\right) \varepsilon_{k-2} - 2 \left(1 - \frac{1}{k}\right) \lambda_1 \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k, \\ \quad k = 3, 4, \dots, N, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$\lambda_1 = \cos \frac{\Delta\omega T}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{2A}{\Delta\omega} \sin \frac{\Delta\omega T}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{A}{\Delta\omega} \sin \Delta\omega T;$$

– для пилообразного импульсного воздействия:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k^2 = \lambda_{k+3} + 2a_k \varepsilon_k, \quad k = 1, 2, \dots, 6; \\ k^3 a_k^2 + (k-6)^3 a_{k-6}^2 = \lambda_1 [(k-1)^3 a_{k-1}^2 + (k-5)^3 a_{k-5}^2] + \\ + \lambda_2 [(k-2)^3 a_{k-2}^2 + (k-4)^3 a_{k-4}^2] + \lambda_3 (k-3)^3 a_{k-3}^2 + \\ + 2(k-6)^3 a_{k-6} \varepsilon_{k-6} - 2\lambda_1 (k-5)^3 a_{k-5} \varepsilon_{k-5} - \\ - 2\lambda_2 (k-4)^3 a_{k-4} \varepsilon_{k-4} - 2\lambda_3 (k-3)^3 a_{k-3} \varepsilon_{k-3} - \\ - 2\lambda_2 (k-2)^3 a_{k-2} \varepsilon_{k-2} - 2\lambda_1 (k-1)^3 a_{k-1} \varepsilon_{k-1} + \\ + 2k^3 a_k \varepsilon_k, \quad k = 7, 8, \dots, N, \end{array} \right. \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \left(1 + \cos \Delta\omega T + \cos \frac{\Delta\omega T}{2} \right), \\ \lambda_2 &= - \left(3 + 4 \cos \Delta\omega T + 4 \cos \frac{\Delta\omega T}{2} + 4 \cos \frac{\Delta\omega T}{2} \cos \Delta\omega T \right), \\ \lambda_3 &= 4 \left(1 + \cos \Delta\omega T + \cos \frac{\Delta\omega T}{2} + 2 \cos \frac{\Delta\omega T}{2} \cos \Delta\omega T \right), \\ \lambda_{k+3} &= \frac{A^2}{\Delta\omega^2 k^2} \left(1 - \frac{2}{\Delta\omega k T} \sin \Delta\omega k T + \frac{2}{\Delta\omega k T} \sin \frac{\Delta\omega k T}{2} \right), \quad k = 1, 2, \dots, 6; \end{aligned}$$

– для полусинусоидального импульсного воздействия:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \lambda_4 + \varepsilon_1, \\ a_2 = \lambda_5 + \varepsilon_2, \\ a_k - a_{k-2} = 2a_{k-1} \lambda_1 + [k^2 a_k + (k-2)^2 a_{k-2}] \lambda_2 - 2(k-1)^2 a_{k-1} \lambda_3 + \\ + [1 - (k-2)^2 \lambda_2] \varepsilon_{k-2} + 2[(k-1)^2 \lambda_3 - \lambda_1] \varepsilon_{k-1} + \\ + (1 - k^2 \lambda_2) \varepsilon_k, \quad k = 3, 4, \dots, N, \end{array} \right. \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \cos \frac{\Delta\omega T}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta\omega^2 T^2}{\pi^2}, \quad \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_2, \\ \lambda_4 &= \frac{2AT}{\pi} \frac{\cos \frac{\Delta\omega T}{2}}{1 - \frac{\Delta\omega^2 T^2}{\pi^2}}, \quad \lambda_5 = \frac{2AT}{\pi} \frac{\cos \Delta\omega T}{1 - \frac{4\Delta\omega^2 T^2}{\pi^2}}; \end{aligned}$$

– для сложного колебательного удара:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1^2 = \lambda_2 + 2a_1 \varepsilon_1, \\ k^2 a_{k-1}^2 - (k-1)^2 a_k^2 - \Delta\omega^2 (4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) a_k^2 a_{k-1}^2 = \\ = a_k^2 a_{k-1}^2 (1 - 2k) \lambda_1 + \\ + (2k^2 a_{k-1} - 2\Delta\omega^2 (4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) a_k^2 a_{k-1} - \\ - 2\lambda_1 (1 - 2k) a_k^2 a_{k-1}) \varepsilon_{k-1} - \\ - (2(k-1)^2 a_k - 2\Delta\omega^2 (4k^3 - 6k^2 + 4k - 1) a_k a_{k-1}^2 - \\ - 2\lambda_1 (1 - 2k) a_k a_{k-1}^2) \varepsilon_k, \quad k = 2, 3, \dots, N, \end{array} \right. \quad (8)$$

где

$$\lambda_1 = 2(\omega_0^2 - \alpha^2), \quad \lambda_2 = \frac{\Delta\omega^2}{\Delta\omega^4 - 2(\omega_0^2 - \alpha^2)\Delta\omega^2 + (\omega_0^2 + \alpha^2)^2}.$$

Описанные выше линейно параметрические дискретные модели можно представить в виде обобщенной регрессионной модели:

$$\left\{ \begin{array}{l} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda \varepsilon, \end{array} \right. \quad (9)$$

где λ — вектор неизвестных коэффициентов линейно параметрической дискретной модели; ε — N -мерный вектор случайной помехи в результатах наблюдений; η — N -мерный вектор эквивалентного случайного возмущения в стохастическом разностном уравнении; b — N -мерный вектор свободных членов системы уравнений; F — матрица регрессоров, элементы которой содержат результаты измерений амплитудно-частотной характеристики; P_λ — матрица линейного преобразования случайной помехи в стохастическом разностном уравнении эквивалентного возмущения. Элементы векторов и матриц, входящих в систему (9), несложно описать, исходя из формул (5)–(8).

В основе параметрической идентификации ударного воздействия по результатам измерений амплитудного спектра лежит среднееквadraticное оценивание коэффициентов соответствующего стохастического разностного уравнения. В этой связи наиболее эффективным является алгоритм, который включает итерационную процедуру уточнения среднееквadraticных оценок на основе преобразования разностного уравнения, описывающего результаты измерений амплитудного спектра [2]:

$$P_\lambda^{-1}b = P_\lambda^{-1}F\lambda + \varepsilon.$$

В основе итерационной процедуры лежит минимизация функционала

$$\|\varepsilon\|^2 \approx \left\| P_{\hat{\lambda}^{(k)}}^{-1}b - P_{\hat{\lambda}^{(k)}}^{-1}F\lambda \right\|^2 \Rightarrow \min,$$

где $P_{\hat{\lambda}^{(k)}}^{-1}$ — обратная матрица, элементы которой зависят от коэффициентов $\hat{\lambda}_j^{(k)}$. Очевидно, что данный функционал представляет собой квадратичную форму относительно искомых коэффициентов λ_j . Следовательно, он достигает своего неотрицательного минимума. При этом нетрудно показать, что минимум данного функционала достигается в точке

$$\hat{\lambda}^{(k+1)} = \left(F^T \Omega_{\hat{\lambda}^{(k)}}^{-1} F \right)^{-1} F^T \Omega_{\hat{\lambda}^{(k)}}^{-1} b, \quad \Omega_{\hat{\lambda}^{(k)}} = P_{\hat{\lambda}^{(k)}} P_{\hat{\lambda}^{(k)}}^T. \quad (10)$$

На первом шаге итерационной процедуры находится начальное приближение:

$$\hat{\lambda}^{(0)} = (F^T F)^{-1} F^T b.$$

Затем по формуле (9) при $\hat{\lambda}^{(k)} = \hat{\lambda}^{(0)}$ вычисляется следующее приближение:

$$\hat{\lambda}^{(1)} = \left(F^T \Omega_{\hat{\lambda}^{(0)}}^{-1} F \right)^{-1} F^T \Omega_{\hat{\lambda}^{(0)}}^{-1} b.$$

Оно вновь подставляется в правую часть формулы (10), и находится новое приближение $\hat{\lambda}^{(2)}$ и т. д.

Достаточное условие сходимости итерационной процедуры определяется на основе принципа сжимающихся отображений аналогично методу простых итераций решения систем нелинейных уравнений [3]. Проведенные численно-аналитические исследования показали хорошую сходимость метода: 2–3 итерации.

Найденные среднееквadraticские оценки $\hat{\lambda}_j$ коэффициентов линейно параметрических дискретных моделей (5)–(8) лежат в основе вычисления оценок параметров амплитудных спектров. При определении параметров прямоугольного импульса следует воспользоваться соотношениями

$$\hat{T} = \frac{2}{\Delta\omega} \arccos \hat{\lambda}_1, \quad \hat{A} = \frac{\hat{\lambda}_2 \Delta\omega}{2\sqrt{1 - \hat{\lambda}_1^2}}.$$

Параметры пилообразного импульса можно вычислить по формулам:

$$\hat{T} = \frac{1}{\Delta\omega} \arccos \left(\frac{\hat{\lambda}_1 - 2 + \sqrt{\hat{\lambda}_1^2 + 4\hat{\lambda}_1 + 4\hat{\lambda}_2}}{4} \right),$$

$$\hat{A} = \sqrt{\frac{\hat{\lambda}_4 \Delta\omega^2 \arccos(\Lambda)}{\arccos(\Lambda) + 2 \sin \left[\frac{1}{2} \arccos(\Lambda) \right] - 2 \sin [\arccos(\Lambda)]}},$$

где $\Lambda = \frac{\hat{\lambda}_1 - 2 + \sqrt{\hat{\lambda}_1^2 + 4\hat{\lambda}_1 + 4\hat{\lambda}_2}}{4}$, параметры полусинусоидального импульсного воздействия выражаются через коэффициенты линейно параметрической дискретной модели (8) по формулам

$$\hat{T} = \frac{2}{\Delta\omega} \arccos \hat{\lambda}_1, \quad \hat{A} = \frac{\hat{\lambda}_4 [\pi^2 - \Delta\omega^2 T^2]}{2\pi T \hat{\lambda}_1},$$

а параметры сложного колебательного удара вычисляются так:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sqrt{2\Delta\omega \sqrt{\hat{\lambda}_1 + \frac{1}{\hat{\lambda}_2}} - \Delta\omega^2 - \hat{\lambda}_1}}{2}, \quad \hat{\omega}_0 = \frac{\sqrt{2\Delta\omega \sqrt{\hat{\lambda}_1 + \frac{1}{\hat{\lambda}_2}} - \Delta\omega^2 + \hat{\lambda}_1}}{2}.$$

Истинная амплитудно-частотная характеристика, смоделированные результаты наблюдений и восстановленная по ним амплитудно-частотная характеристика сложного колебательного удара

Проведены численно-аналитические исследования эффективности разработанного метода параметрической идентификации типовых ударных воздействий. На рисунке кривая 1 описывает истинную амплитудно-частотную характеристику, а точки 2 соответствуют смоделированным результатам наблюдений $a_k = \tilde{a}_k + \varepsilon_k$ ($k = 1, 2, \dots, 50$) амплитудно-частотной характеристики сложного колебательного удара при $\omega_0 = 1$, $\alpha = 0,5$, $\Delta\omega = 0,1$, $\varepsilon = 10\%$. Кривая 3 на рисунке описывает восстановленную с помощью разработанного метода параметрической идентификации амплитудно-частотную характеристику.

Полученные результаты свидетельствуют о высокой помехоустойчивости разработанного метода, в основе которого лежит среднеквадратичное оценивание коэффициентов линейно параметрической дискретной модели в форме стохастических разностных уравнений. Такой подход к решению задачи позволяет практически устранить смещение в оценках и тем самым добиться высокой точности определения параметров ударных воздействий по экспериментальным данным.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Вибрации в технике* [Текст]: Справочник в 6 т. — М.: Машиностроение, 1981. — Т. 5. — 496 с.
2. Зотеев, В.Е. Параметрическая идентификация линейной динамической системы на основе стохастических разностных уравнений [Текст] / В.Е. Зотеев // Матем. моделирование. — 2008. — Т. 20, № 9. — С. 120–128.
3. Волков, Е.А. Численные методы [Текст] / Е.А. Волков. — М.: Наука, 2003. — 256 с.

Поступила в редакцию 29/IX/2008;
в окончательном варианте — 09/XI/2008.

MSC: 65P40, 34C15, 37M05

DEFINITION OF TRIAL IMPULSES PARAMETERS ON THE BASIS OF STOCHASTIC DIFFERENCE EQUATIONS

M. A. Zausaeva, V. E. Zoteev

Samara State Technical University,
443100, Samara, Molodogvardeyskaya str., 244.

E-mails: zausmasha@mail.ru; zoteev@pm.samgtu.ru

Problem of parametrical identification of sample percussion influences according to the results of their amplitude-frequent characteristic observation is studied. This problem is solved with the help of stochastic difference equations describing the results of measurements of the instantaneous values of amplitude spectrum.

Key words: *amplitude-frequent characteristic, linear parametric discrete model, stochastic difference equations.*

Original article submitted 29/IX/2008;
revision submitted 09/XI/2008.

Zotееv Vladimir Eugenievich, Ph. D. (Phis. & Math.) Assist. Prof., Dept. of Applied Mathematics and Computer Science of Samara State Technical University.

Zausaeva Mariya Anatolievna, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics and Computer Science of Samara State Technical University.

УДК 519.856

УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДА СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

К. А. Дрозденко

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: mexicanose@rambler.ru

Доказана теорема устойчивости метода стохастического динамического программирования с переменными параметрами дискретизации.

Ключевые слова: *стохастическое программирование, динамическое программирование, распределение ресурсов, переменные параметры дискретизации, устойчивость метода.*

Рассмотрим метод стохастического динамического программирования распределения ресурсов с переменными параметрами дискретизации. Модель распределения ресурсов в стохастических условиях имеет следующий вид:

$$Z_{j,q}^*(s_{j-1,q}) = \sup_{x_j \in X} \{p(Z_{j+1,q}^*) [f_{j+1,q}(s_{j-1,q}, x_j) + Z_{j+1,q}^*]\}; \quad (1)$$
$$\sum_{j=0}^J p(Z_{j,q}^*) = 1, \quad \sum_{i=0}^I x_i = c;$$

Дрозденко Константин Александрович — аспирант кафедры прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета.