Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Докучаев, А. П. Котенко, Алгоритмы решения стохастических задач динамического программирования большой размерности, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 2(), 203–209

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu627>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 14:13:14

УДК 519.856, 519.857

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

А. В. Докучаев, А. П. Котенко

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: docuhaev@mail.ru, ako1959@mail.ru

Предлагаются алгоритмы решения стохастических задач динамического программирования больших размерностей. Рассматривается задача распределения ресурсов.

Ключевые слова: *стохастическое динамическое программирование, метод Р. Беллмана, задача распределения ресурсов.*

Введение. При моделировании физических (обработка сигналов), химических (моделирование химических реакций), экономических (календарное планирование, распределение инвестиций), биологических (идентификация генов) процессов, в сельском хозяйстве (планирование севооборота), в экологии (решение задачи сохранения запасов леса), а также при решении инженерных задач часто приходится решать различные задачи динамического программирования.

Оптимизационные задачи в стохастической постановке предполагают учёт случайного характера процессов, протекающих в моделируемых системах. Применение того или иного метода оптимизации для решения задачи в стохастической постановке обусловлено спецификой прикладной задачи. В данной работе речь пойдет о принципиальной возможности учёта случайного характера моделируемых процессов в рамках динамического программирования в дискретном времени и о конкретном классе задач, весьма перспективном для применения моделей динамического программирования в стохастической постановке — распределении ресурсов.

1. Общая постановка задачи распределения ресурса. Общую задачу распределения ресурса в качестве задачи динамического программирования в дискретном времени в детерминированной постановке можно представить следующим образом: распределяется ресурс $x = x_1 + x_2 + \dots + x_i + \dots + x_n$ ($i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{N}$), $0 \leq x_i \leq x, x \in \mathbb{R}^+$ по монотонным функциям освоения (откликам) $f_i : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ с заданным шагом дискретизации распределяемого ресурса $h = x/m$ ($m = 1, 2, \dots, n; h \in \mathbb{R}^+$) с целью максимизации (минимизации) суммарного эффекта $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum f_i(x_i) \rightarrow \text{extr}$ (через extr обозначена функция экстремума). Далее будем рассматривать задачу на максимум. Обозначим через $f_{ii} = f_i(x_i)$ (левая часть табл. 1). Значение $x = 0$ — обозначено в табл. 1 за x_0 .

*Докучаев Александр Владимирович — аспирант кафедры прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета.
Котенко Андрей Петрович — доцент кафедры прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета; к.ф.-м.н, доцент.*

Таблица 1

Представление задачи распределения ресурса													
Порция ресурса	Функции освоения						Порция ресурса	Функции освоения					
	f_1	f_2	$\dots$	f_i	$\dots$	f_n		f_1	f_2	$\dots$	f_i	$\dots$	f_n
x_0	f_{01}	f_{02}	$\dots$	f_{0i}	$\dots$	f_{0n}	y_0	f_{01}	f_{02}	$\dots$	f_{0i}	$\dots$	f_{0n}
x_1	f_{11}	f_{12}	$\dots$	f_{1i}	$\dots$	f_{1n}	y_1	f_{11}	f_{12}	$\dots$	f_{1i}	$\dots$	f_{1n}
x_2	f_{21}	f_{22}	$\dots$	f_{2i}	$\dots$	f_{2n}	y_2	f_{21}	f_{22}	$\dots$	f_{2i}	$\dots$	f_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	f_{i1}	f_{i2}	$\dots$	f_{ii}	$\dots$	f_{in}	y_j	f_{j1}	f_{j2}	$\dots$	f_{ji}	$\dots$	f_{jn}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	f_{n1}	f_{n2}	$\dots$	f_{ni}	$\dots$	f_{nn}	y_n	f_{n1}	f_{ni}	$\dots$	f_{ni}	$\dots$	f_{nn}

Суммарный эффект Z , а также взвешенный вектор распределения ресурсов $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, где x_i^* — ресурс, при распределении которого функция $f_i(x_i)$ обеспечивает оптимум, находятся методом динамического программирования на основе рекуррентных соотношений Р. Беллмана [1] с помощью программного комплекса, созданного авторами данной статьи.

Уточним математическую модель задачи: с учётом распределения x порциями обозначим $k_i = x_i/h$, $k_i = 1, 2, \dots, m$, тогда

$$g(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum f_i(k_i h) = \sum f_i(x_i).$$

Если $Z_{\max} = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, то $Z_{\max} = g(k_1^*, k_2^*, \dots, k_n^*)$, где $k_i^* = x_i^*/h$. Обозначим $y_j = jh$, $j = 0, 1, 2, \dots, m$, $f_{ji} = f_i(y_j)$ (см. правую часть табл. 1).

2. Постановка стохастической задачи динамического программирования.

Рассмотрим теперь одну стохастическую модель приведенной выше задачи. Пусть некоторые из $f_i(y_j)$ являются дискретными случайными величинами с заранее известными носителями $[a_{ij}; b_{ij}]$ ($a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}^+$) с заданными рядами распределения. В качестве критерия оптимизации используется математическое ожидание суммарного эффекта: $M[Z] \rightarrow \max$.

Для решения стохастической задачи распределения ресурсов на основе метода динамического программирования используется байесовский подход [2, 3], при котором стохастическая задача разбивается на конечное множество детерминированных подзадач.

Пусть значение одной из функций освоения $f_i(y_j)$ является дискретной случайной величиной с известным рядом распределения. Тогда значениям функции освоения $f_{it}(y_j)$ соответствуют априорные вероятности $P_t(f_{it}(y_j))$, где t — количество спектральных точек ($t = 1, 2, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$) данной f_i и данной задачи (потому что только одно значение одной рассматриваемой функции представляет собой стохастическую величину). Тогда значение целевой функции будет дискретной случайной величиной, имеющей t спектральных точек. Найдём её математическое ожидание

$$M[Z] = \sum_{j=1}^m Z_t P_t(f_{it}(y_j)),$$

где Z_t — оптимальный суммарный эффект в точке спектра t . Если случайны два и более значения одной из функций освоения и (или) значения нескольких функций освоения, то для определения математического ожидания суммарного эффекта используется формула Байеса.

Таким образом, решая задачу стохастического динамического программирования, мы переходим к процедуре решения конечного множества детерминированных подзадач динамического программирования [2].

При увеличении стохастических параметров задачи вычислительная сложность алгоритма резко возрастает. Непосредственный подсчет математического ожидания оптимального значения представляет значительную трудность и зачастую уже для задач небольших размерностей не является практически реализуемым даже с использованием современных ЭВМ. Поэтому актуальна возможность упрощения такой процедуры.

Существует несколько возможных путей устранения данной проблемы:

- 1) совершенствование существующих и разработка новых алгоритмов динамического программирования;
- 2) понижение размерности текущей задачи с помощью методов декомпозиции;
- 3) применение методов приближенного решения.

Применение процедуры динамического программирования для нахождения оптимального распределения ресурса X приводит к громоздким выкладкам при росте числа уровней дискретизации k . На основе континуальной постановки задачи динамического программирования [2] предложим упрощенный метод решения задачи.

3. Упрощенный метод решения стохастической задачи динамического программирования. Решая стохастическую задачу распределения ресурсов методом динамического программирования, в итоге переходим к решению детерминированных подзадач (см. п. 2 настоящей работы).

Для детерминированной подзадачи $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ — приближённое решение, если для каждой функции $f_i(y_j)$ (см. табл. 1) выполняются условия $\Delta f_1(y_1) \approx \Delta f_2(y_2) \approx \dots \approx \Delta f_n(y_n)$, где $\Delta f_i(y_j) = f_i(y_j) - f_i(y_{j-1})$, $\sum x_i^* = x$.

Если в частном случае $\Delta f_1(y_1) = \Delta f_2(y_2) = \dots = \Delta f_n(y_n)$, где $\Delta f_i(y_j) \neq 0$, то значения $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ представляют точное решение (идентично находимому динамическим программированием, пример приведен в статье [2]).

В ходе численных экспериментов показано, что если увеличение h не влияет на найденное ранее решение, то есть $f_i(y_j): Z(f(y_{j+1})) = Z(f(y_j))$ при $m_{j+1} > m_j$, то $\lim_{j \rightarrow 0} f(y_j) = \lim_{i \rightarrow +\infty} f(x_i^*)$.

Предложенная методика сокращения вычислительного объёма задачи динамического программирования применима как в детерминированной, так и в стохастической постановках задачи распределения ресурсов, когда исходные данные математической модели не известны точно либо являются случайными величинами. Достоверность предложенного метода проверена в ходе серии численных экспериментов.

4. Метод декомпозиции. При решении задач динамического программирования зачастую возникают непреодолимые вычислительные сложности (в рассматриваемой задаче объём вычислений растёт при уменьшении шага дискретизации, при увеличении количества функций освоения, при возрастании числа случайных параметров), поэтому актуален вопрос о понижении размерности задачи. Получена декомпозиция метода динамического программирования по монотонным функциям освоения $f(x): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ в задаче распределения ресурса x . На основе рассматриваемой постановки задачи предлагается классификация случаев, предполагающих различные алгоритмы деком-

позиции в зависимости от вида и количества оптимальных траекторий x^* : $\sum_{i=1}^n x_i^* = x$. Основная идея предлагаемого метода заключается в группировании похожих по поведению в точках дискретизации функций освоения.

Рассмотрим пример. Пусть для определенности $i = 2n$. Предложим алгоритм декомпозиции для задачи с данными, которые приведены в табл. 2.

Таблица 2

Исходные данные задачи

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$
0	0	0	0	0	0	0
1	34	30	32	31	30	30
2	64	58	63	61	57	55
3	90	84	93	89	82	77
4	112	108	122	115	106	96
5	130	130	150	139	128	112
6	146	150	177	161	149	125
7	158	168	203	181	168	135
8	166	184	228	199	186	142
9	172	198	252	215	202	146
10	174	210	275	229	217	117

а. Понизим размерность задачи в два раза. Для этого произведём равномерную группировку $f(x)$, то есть суммируем значения функций освоения $f_1(x)$ с $f_2(x)$, $f_3(x)$ с $f_4(x)$ и $f_5(x)$ с $f_6(x)$ (считается, что функции попарно похожи, в более общем случае группировка функций неравномерна).

б. Облегчённая задача решается стандартным методом динамического программирования: получаем ресурсы, распределяемые на функции $f_{i/2}^l(x) = f_{i-1}^l(x) + f_i^l(x)$, $l = 2, 3, \dots$ (показывает, во сколько раз понижена размерность исходной задачи).

с. Перейдём к решению $i/2 = n$ подзадач обычным методом динамического программирования.

Выделен и исследован частный случай при условиях:

- 1) для всех решаемых подзадач $x_i^* \neq 0$ — единственное решение;
- 2) в решении исходной задачи отсутствуют альтернативные траектории (под траекторией понимается взвешенный вектор распределения ресурсов, соответствующий оптимуму);
- 3) в решении исходной задачи отсутствуют нулевые траектории.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Оптимальные траектории подзадач — точное решение исходной задачи. Z находится склейкой решений подзадач.*

Суммарный эффект, получаемый методом динамического программирования для детерминированной задачи распределения ресурса, соответствующей данным табл. 3, составил 308 единиц, взвешенный вектор распределения ресурсов — (2, 1, 3, 2, 1, 1). При группировании функций f_1 с f_2 , f_3 с f_4 и f_5 с f_6 получаем 3 подзадачи.

Из столбцов $(f_1(x) + f_2(x))$, $(f_3(x) + f_4(x))$ и $(f_5(x) + f_6(x))$ составляем новую таблицу данных задачи и решаем преобразованную задачу методом динамического программирования. В результате получаем, что на функции

Таблица 3

Разбиение исходной задачи на 3 подзадачи

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_1 + f_2$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_3 + f_4$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$f_5 + f_6$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	34	30	64	32	31	63	30	30	60
2	64	58	122	63	61	124	57	55	112
3	90	84	174	93	89	182	82	77	159
4	112	108	220	122	115	237	106	96	202
5	130	130	260	150	139	289	128	112	240
6	146	150	296	177	161	338	149	125	274
7	158	168	326	203	181	384	168	135	303
8	166	184	350	228	199	427	186	142	328
9	172	198	370	252	215	467	202	146	348
10	174	210	384	275	229	504	217	147	364

освоения $(f_1(x) + f_2(x))$ распределяется 3 единицы ресурса x , на $(f_3(x) + f_4(x))$ — 5 единиц и на $(f_5(x) + f_6(x))$ — 2 единицы. Теперь переходим к решению получившихся подзадач.

Решая каждую из подзадач методом динамического программирования, получаем решения: (2, 1), (3, 2), (1, 1). Склеиваем найденные решения и сравниваем с полученным при применении стандартного метода динамического программирования. Они оказываются идентичными.

Пусть теперь соблюдаются только условия 1), 2).

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если решение одной из подзадач $x_i^* \in \min\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_i(x), \dots, f_n(x)\}$, то решение исходной задачи будет приближённым; данная точка будет нулевой компонентой взвешенного вектора распределения ресурса исходной задачи (при нахождении методом динамического программирования).

В качестве примера рассмотрим задачу с исходными данными в табл. 4.

Для данной задачи найден взвешенный вектор распределения ресурсов (2, 1, 1, 1, 3, 2), ему соответствует суммарный эффект 311 единиц. Решение

Таблица 4

Исходные данные задачи

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$
0	0	0	0	0	0	0
1	29	28	29	29	36	34
2	57	55	56	54	70	66
3	84	80	81	76	102	96
4	110	103	104	95	132	123
5	135	124	125	111	160	147
6	159	143	144	124	186	168
7	182	160	161	134	210	186
8	204	175	176	141	232	201
9	225	188	189	145	252	213
10	245	199	200	146	270	222

было найдено по предложенному методу декомпозиции — исходная задача разбивалась аналогично предыдущему примеру с данными в табл. 2. Вторая компонента взвешенного вектора распределения ресурсов попала на локальный минимум по строке в таблице данных исходной задачи (в табл. 4 соответствующее $f_2(x)$ выделено жирным шрифтом). Значит, в соответствии с высказанным утверждением 2 полученное решение будет приближённым, а при нахождении методом динамического программирования значение $f_2(1)$ можно не учитывать. При нахождении решения динамическим программированием получаем вектор (1, 0, 1, 1, 4, 3), суммарный эффект 315 единиц. Утверждения 1) и 2) подтверждаются многочисленными примерами, рассмотренными авторами данной работы.

В нерассмотренных случаях решение будет приближённым, их целесообразнее рассматривать отдельно. В результате численных экспериментов установлено, что при неубывающих f_i , как правило, $Z < Z^*$, то есть процедура оптимизации в таком случае приводит нас к локально-оптимальному решению.

5. Исключение функций освоения, не находящихся на критическом пути.

При увеличении стохастических параметров задачи вычислительная сложность алгоритма резко возрастает: когда в рассматриваемой постановке задачи все или большая часть $f_i(y_j)$ (см. табл. 1) являются случайными, разбивая стохастическую задачу на множество детерминированных подзадач, приходится решать очень много получившихся подзадач. Для сокращения объёма вычислений было предложено [4] перед разбиением исходной задачи произвести усреднение исходных данных с целью последующей оценки влияния исходных данных на конечный результат.

Анализ результатов. Задачи распределения ресурсов представляют собой целый класс задач динамического программирования. Предложенные алгоритмы могут использоваться для решения детерминированных и стохастических (в сочетании с байесовским подходом) задач распределения ресурсов больших размерностей.

Исследовано влияние параметров задачи на математическое ожидание суммарного эффекта в стохастической задаче динамического программирования. В ходе численных экспериментов подтверждены полученные ранее результаты [2–4].

Все полученные результаты необходимо учитывать при построении и адаптации алгоритмов решения стохастических задач распределения ресурсов для минимизации вычислительных трудностей. При решении прикладных задач целесообразно комбинировать предложенные алгоритмы и методы сокращения вычислительных сложностей.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беллман, Р. Динамическое программирование [Текст] / Р. Беллман. — М.: Изд-во ин. лит., 1960. — 400 с.
2. Докучаев, А. В. Адаптивный подход в одной стохастической задаче динамического программирования на основе континуальной постановки [Текст] / А. В. Докучаев / Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. пятой всерос. научн. конф. с международ. участием. — Самара: СамГТУ, 2008. — Ч. 2: Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределёнными параметрами. — С. 25–30. — ISBN 978-5-7964-1088-2.
3. Докучаев, А. В. Использование байесовского подхода в стохастической постановке задачи динамического программирования для оценки влияния погрешностей исходных

- данных [Текст] / А. В. Докучаев / XXXIV Гагаринские чтения: Тр. Международн. молодёжн. научн. конф. — М., 2008. — С. 54–55.
4. Докучаев, А. В. Решение задачи календарного планирования производства в условиях стохастической неопределённости параметров [Текст] / А. В. Докучаев, А. П. Котенко // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2007. — № 2 (15). — С. 182–183.

Поступила в редакцию 30/IX/2008;
в окончательном варианте — 07/X/2008.

MSC: 90C39, 90C15

NEW ALGORITHM OF DYNAMIC PROGRAMMING FOR STOCHASTIC PROBLEMS SOLUTION

A. V. Dokuchaev, A. P. Kotenko

Samara State Technical University,
443100, Samara, Molodogvardeyskaya str., 244.
E-mails: docuhaev@mail.ru, ako1959@mail.ru

Article proposes algorithms for solution of stochastic problems of dynamic programming of the big dimensions. The problem of distribution of resources is studied.

Key words: *stochastic dynamic programming, method of R. Bellman, resources distribution problem.*

Original article submitted 30/IX/2008;
revision submitted 07/X/2008.

Dokuchaev Alexander Vladimirovich, Post graduate student, Dept. of Applied Mathematics and Computer Science of Samara State Technical University.

Kotenko Andrey Petrovich, Ph. D. (Phis. & Math.) Assist. Prof., Dept. of Applied Mathematics and Computer Science of Samara State Technical University.