Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Дрозденко, Устойчивость метода стохастического динамического программирования с переменными параметрами дискретизации, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 2(), 267–270

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu629>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 16:00:19

MSC: 65P40, 34C15, 37M05

DEFINITION OF TRIAL IMPULSES PARAMETERS ON THE BASIS OF STOCHASTIC DIFFERENCE EQUATIONS

M. A. Zausaeva, V. E. Zoteev

Samara State Technical University,
443100, Samara, Molodogvardeyskaya str., 244.

E-mails: zaushasha@mail.ru; zoteev@pm.samgtu.ru

Problem of parametrical identification of sample percussion influences according to the results of their amplitude-frequent characteristic observation is studied. This problem is solved with the help of stochastic difference equations describing the results of measurements of the instantaneous values of amplitude spectrum.

Key words: *amplitude-frequent characteristic, linear parametric discrete model, stochastic difference equations.*

Original article submitted 29/IX/2008;
revision submitted 09/XI/2008.

Zotееv Vladimir Eugenievich, Ph. D. (Phis. & Math.) Assist. Prof., Dept. of Applied Mathematics and Computer Science of Samara State Technical University.

Zausaeva Mariya Anatolievna, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics and Computer Science of Samara State Technical University.

УДК 519.856

УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДА СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

К. А. Дрозденко

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: mexicanose@rambler.ru

Доказана теорема устойчивости метода стохастического динамического программирования с переменными параметрами дискретизации.

Ключевые слова: *стохастическое программирование, динамическое программирование, распределение ресурсов, переменные параметры дискретизации, устойчивость метода.*

Рассмотрим метод стохастического динамического программирования распределения ресурсов с переменными параметрами дискретизации. Модель распределения ресурсов в стохастических условиях имеет следующий вид:

$$Z_{j,q}^*(s_{j-1,q}) = \sup_{x_j \in X} \{p(Z_{j+1,q}^*) [f_{j+1,q}(s_{j-1,q}, x_j) + Z_{j+1,q}^*]\}; \quad (1)$$
$$\sum_{j=0}^J p(Z_{j,q}^*) = 1, \quad \sum_{i=0}^I x_i = c;$$

Дрозденко Константин Александрович — аспирант кафедры прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета.

$$x_i = i \times h, \quad 0 \leq j \leq J, \quad 0 \leq q \leq M; \quad j, i, q \in \mathbb{Z}; \quad c, h, x_i \in \mathbb{R}.$$

Исследуем на устойчивость предложенную модель. Под устойчивостью модели будем понимать независимость характера сходимости решения от вида функций $f_{j+1,q}(s_{j-1,q}, x_j)$ [1]. Представим функциональное уравнение (1) в виде

$$Z^*(x) = \sup_q \{f(x, q) + h(x, q)Z^*(s(x, q))\}. \quad (2)$$

Для этого запишем:

$$Z_{j+1}^*(x) = \sup_q \left\{ f(x, q) + \int_{r \in X} Z_j^*(s(x, q)) dG(x, q, r) \right\},$$

входящий сюда интеграл при $dG(x, q, r) = h(x, q, r) dr$ преобразуется по формуле

$$\int_{r \in X} Z^*(r) dG(x, q, r) \equiv h(x, q)Z^*(s(x, q)).$$

Далее запишем два уравнения вида (2), полагая, что рассматриваются две различные системы (1):

$$z^*(x) = \sup_q \{f(x, q) + h(x, q)z^*(s(x, q))\}, \quad (3)$$

$$Z^*(x) = \sup_q \{F(x, q) + H(x, q)Z^*(S(x, q))\}. \quad (4)$$

Получим неравенство, оценивающее $\sup_x |Z^*(x) - z^*(x)|$ при $x \in X$, $\|x\| \leq c$, где $Z^*(x)$ и $z^*(x)$ — единственные обращающиеся в ноль при $x = \theta$ и непрерывные в этой точке решения соответствующих уравнений [1].

ЗАМЕЧАНИЕ. В [1] сделан краткий вывод для случая, когда $h(x, q) = H(x, q)$, $s(x, q) = S(x, q)$. Здесь мы покажем устойчивость алгоритма для случая, когда $h(x, q) \neq H(x, q)$, $s(x, q) \neq S(x, q)$.

ТЕОРЕМА. Если для уравнений (3)–(4) выполняются следующие условия:

T1) функции $f(x, q)$ и $F(x, q)$ равномерно ограничены $\forall q \in Q$ и $\forall x \in X$, удовлетворяющих ограничению $\|x\| \leq c$, где $\|x\| = \sum_{j=0}^J |x^j|$; X — область, содержащая нулевые векторы $x = \theta_1$, $x = \theta_2$, а $s(x, q) \in X$, $S(x, q) \in X \forall x \in X$;

T2) $f(\theta_1, q) = 0$, $F(\theta_2, q) = 0 \forall q \in Q$;

T3) $|h(x, q)| \leq 1$, $|H(x, q)| \leq 1 \forall x \in X$ и $\forall q \in Q$;

T4) $\|s(x, q)\| \leq a\|x\|$, $\|S(x, q)\| \leq a\|x\|$ для некоторого $0 < a < 1$, $\forall q \in Q$ и $\forall x \in X$;

T5) для $v(c) = \sup_{\|x\| < c} \sup_q |f(x, q)|$, $V(c) = \sup_{\|x\| < c} \sup_q |F(x, q)|$ справедливо

$$\sum_{n=0}^{\infty} v(a^n c) < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} V(a^n c) < \infty,$$

то справедливо неравенство

$$\sup_{\|x\| < c} |Z^*(x) - z^*(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} u(a^n c), \quad (5)$$

где

$$u(c) = \sup_{\|x\| < c} \sup_q |F(x, q) - f(x, q)|. \quad (6)$$

Доказательство. Полагая

$$\begin{aligned} z_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{q}) &= \sup_{\mathbf{q}} f(\mathbf{x}, \mathbf{q}), \quad z_{n+1}^*(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \sup_{\mathbf{q}} \{f(\mathbf{x}, \mathbf{q}) + h(\mathbf{x}, \mathbf{q})z_n^*(s(\mathbf{x}, \mathbf{q}))\}, \\ Z_1^*(\mathbf{x}, \mathbf{q}) &= \sup_{\mathbf{q}} F(\mathbf{x}, \mathbf{q}), \quad Z_{n+1}^*(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \sup_{\mathbf{q}} \{F(\mathbf{x}, \mathbf{q}) + H(\mathbf{x}, \mathbf{q})Z_n^*(S(\mathbf{x}, \mathbf{q}))\}, \end{aligned}$$

имеем

$$|Z_1^*(\mathbf{x}) - z_1^*(\mathbf{x})| \leq \sup_{\mathbf{q}} |F(\mathbf{x}, \mathbf{q}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{q})|. \quad (7)$$

В силу условия (Т3)

$$\begin{aligned} |Z_{n+1}^*(\mathbf{x}) - z_{n+1}^*(\mathbf{x})| &\leq \sup_{\mathbf{q}} \left\{ |F(\mathbf{x}, \mathbf{q}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{q})| + \right. \\ &\quad \left. + \inf_{\mathbf{q}} \{h(\mathbf{x}, \mathbf{q}), H(\mathbf{x}, \mathbf{q})\} \cdot |Z_n^*(S(\mathbf{x}, \mathbf{q})) - z_n^*(s(\mathbf{x}, \mathbf{q}))| \right\}. \quad (8) \end{aligned}$$

Пусть

$$\omega_n(c) = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq c} \sup_{\mathbf{q}} |Z_n^*(\mathbf{x}) - z_n^*(\mathbf{x})|.$$

Тогда для $\omega_1(c)$ с учётом (7) получим

$$\omega_1(c) \leq \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq c} \sup_{\mathbf{q}} |F(\mathbf{x}, \mathbf{q}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{q})|;$$

для $\omega_{n+1}(c)$

$$\begin{aligned} \omega_{n+1}(c) &= \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq c} \sup_{\mathbf{q}} |Z_{n+1}^*(\mathbf{x}) - z_{n+1}^*(\mathbf{x})|, \\ \omega_{n+1}(c) &\leq \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq c} \sup_{\mathbf{q}} \left\{ |F(\mathbf{x}, \mathbf{q}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{q})| + \right. \\ &\quad \left. + \inf_{\mathbf{q}} \{h(\mathbf{x}, \mathbf{q}), H(\mathbf{x}, \mathbf{q})\} |Z_n^*(S(\mathbf{x}, \mathbf{q})) - z_n^*(s(\mathbf{x}, \mathbf{q}))| \right\}. \end{aligned}$$

В силу условия (Т4) имеем

$$\omega_{n+1}(c) \leq \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq ac} \{ |F(\mathbf{x}, \mathbf{q}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{q})| + |Z_n^*(S(\mathbf{x}, \mathbf{q})) - z_n^*(s(\mathbf{x}, \mathbf{q}))| \} = \omega_n(ac).$$

С учетом (8)

$$\begin{aligned} \omega_{n+1}(c) &\leq \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq ac} \sup_{\mathbf{q}} \left\{ |F(\mathbf{x}, \mathbf{q}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{q})| + \left[|F(\mathbf{x}, \mathbf{q}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{q})| + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \inf_{\mathbf{q}} \{h(\mathbf{x}, \mathbf{q}), H(\mathbf{x}, \mathbf{q})\} \cdot |Z_{n-1}^*(S(\mathbf{x}, \mathbf{q})) - z_{n-1}^*(s(\mathbf{x}, \mathbf{q}))| \right] \right\} = \omega_n(ac). \end{aligned}$$

Таким образом, опустив индексы, получим, что $\omega(ac) \leq \omega(a^2c)$, $\omega(a^2c) \leq \omega(a^3c)$, $\dots$,

$\omega(a^{n-1}c) \leq \omega(a^n c)$. Отсюда также следует, что $\omega(c) \leq \omega(a^n c)$, следовательно

$$\begin{aligned} \omega(c) &\leq \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq a^n c} \sup_{\mathbf{q}} \left\{ \sum_{k=1}^n |F(\mathbf{x}, \mathbf{q}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{q})| + \inf_{\mathbf{q}} \{h(\mathbf{x}, \mathbf{q}), H(\mathbf{x}, \mathbf{q})\} \times \right. \\ &\quad \left. \times |Z_1^*(S(\mathbf{x}, \mathbf{q})) - z_1^*(s(\mathbf{x}, \mathbf{q}))| \right\} = \omega(a^n c) \leq \\ &\leq \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq a^n c} \left\{ \sum_{k=1}^n |F(\mathbf{x}, \mathbf{q}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{q})| + |F(\mathbf{x}, \mathbf{q}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{q})| \right\} \leq \\ &\leq \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq a^n c} \sum_{k=1}^{n+1} |F(\mathbf{x}, \mathbf{q}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{q})|. \end{aligned}$$

С учётом (4)

$$\sup_{\|\mathbf{x}\| \leq a^n c} \sum_{k=1}^{n+1} |F(\mathbf{x}, \mathbf{q}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{q})| = \sum_{k=1}^{n+1} u(a^k c),$$

тогда

$$\omega(c) \leq \sum_{k=0}^m u(a^k c),$$

следовательно,

$$\sup_{\|\mathbf{x}\| \leq c} |Z^*(\mathbf{x}) - z^*(\mathbf{x})| \leq \sum_{k=0}^m u(a^k c), \quad m \in \mathbb{N}.$$

При $m \rightarrow \infty$ получаем неравенство (5), которое гарантирует, что алгоритм устойчив при поставленных ограничениях для любых видов функций, являющихся непрерывными, равномерно ограниченными и имеющих нулевой вектор решений. $\square$

Полученный результат может быть использован для определения устойчивости решения прочих стохастических моделей динамического программирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беллман, Р. И. Динамическое программирование [Текст] / Р. И. Беллман; пер. с англ. И. В. Андреевой, А. А. Корбута, И. В. Романовского, И. Н. Соколовой; под ред. Н. Н. Воробьева. — М.: Изд. ин. лит., 1960. — С. 144–152.

Поступила в редакцию 01/X/2008;
в окончательном варианте — 08/X/2008.

MSC: 90C15

STABILITY OF STOCHASTIC DYNAMIC PROGRAMMING WITH VARIABLE DISCRETIZATION PARAMETERS

K. A. Drozdenko

Samara State Technical University,
443100, Samara, Molodogvardeyskaya str., 244.
E-mail: mexicanose@rambler.ru

Theorem of stability of stochastic dynamic programming method with variability parameters of discretization is proved.

Key words: *stochastic programming, dynamic programming, distribution resources, variability parameters of discretization, stability of method.*

Original article submitted 01/X/2008;
revision submitted 08/X/2008.

Drozdenko Konstantin Alexandrovich, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics and Computer Science of Samara State Technical University.