Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Попов, Ползучесть стохастически неоднородной пластины с круговым отверстием, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 2(), 126–132

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu630>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 18:28:52

УДК 539.376

ПОЛЗУЧЕСТЬ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

*Н. Н. Попов*Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: ponick25@gmail.com

Рассматривается нелинейная краевая задача ползучести о всестороннем растяжении бесконечной пластины из стохастически неоднородного материала, ослабленной круговым отверстием. Задача решается в полярной системе координат для случая плоского напряженного состояния. Стохастичность введена в определяющие соотношения ползучести, взятые в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения, при помощи случайной однородной функции одной переменной. На основе полученного решения проведен статистический анализ случайного поля напряжений. Получено, что разброс напряжений вблизи кругового отверстия значительно больше, чем для глубинных слоев.

Ключевые слова: ползучесть, краевая задача, стохастически неоднородная среда, концентрация напряжений.

Рассматривается стохастически нелинейная краевая задача о ползучести бесконечной пластины с круговым отверстием радиуса a . Эта пластина подвергнута действию на бесконечности равномерно распределенного усилия p , нормального к её контуру Γ .

Задача решается в полярной системе координат для случая плоского напряженного состояния в предположении, что стохастические неоднородности материала пластины описываются функцией одной переменной (радиуса r). При этом компоненты тензора деформаций и тензора напряжений будут также случайными функциями только радиуса r .

В качестве определяющих соотношений для деформации ползучести ε_r и ε_θ выберем в соответствии с теорией вязкого течения следующие реологические соотношения в стохастической форме [1]:

$$\dot{\varepsilon}_r = cs^{n-1}\bar{\sigma}_r H, \quad \dot{\varepsilon}_\theta = cs^{n-1}\bar{\sigma}_\theta H, \quad H(r) = 1 + \alpha U(r), \quad (1)$$

где s — интенсивность напряжений; $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\theta$ — компоненты тензора девиатора напряжений; $U(r)$ — случайная функция, описывающая флуктуации реологических свойств материала, характеристики которой известны: $\langle U \rangle = 0$, $\langle U^2 \rangle = 1$; α — коэффициент вариации этих свойств; c , n — постоянные материала. Здесь $\langle \cdot \rangle$ — символ математического ожидания, точка в (1) означает дифференцирование по времени.

Девиатор напряжений $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\theta$ и интенсивность напряжений s в условиях плоского напряженного состояния имеют соответственно вид [2]

$$\bar{\sigma}_r = \frac{1}{2} (2\sigma_r - \sigma_\theta), \quad \bar{\sigma}_\theta = \frac{1}{2} (2\sigma_\theta - \sigma_r), \quad (2)$$

Попов Николай Николаевич — доцент кафедры прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета; к.ф.-м.н., доцент.

$$s^2 = \sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta. \quad (3)$$

К определяющим соотношениям ползучести (1) присоединяются уравнение равновесия для напряжений

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (4)$$

условие совместности деформаций

$$r \frac{d\dot{\epsilon}_\theta}{dr} + \dot{\epsilon}_\theta - \dot{\epsilon}_r = 0, \quad (5)$$

граничное условие и условие на бесконечности

$$\sigma_r(a) = 0, \quad \sigma_r(\infty) = p. \quad (6)$$

Задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений (1)–(5) относительно напряжений при условиях (6).

Введём вместо σ_r и σ_θ переменные s и θ следующим образом:

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} s \cos \varphi, \quad \sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} s \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right), \quad (7)$$

где s — интенсивность напряжений, φ — угол вида напряжённого состояния ($\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$). Подставляя (7) в формулу для вычисления интенсивности напряжений (3), получим тождество. Методы, основанные на представлении напряжений в виде (7), разрабатывались В. В. Соколовским [3] и Н. Н. Малининым [4] при решении аналогичных детерминированных задач теории пластичности.

Тогда, подставляя (7) в (2), для девиатора напряжений получим:

$$\bar{\sigma}_r = s \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right), \quad \bar{\sigma}_\theta = s \sin \varphi.$$

Компоненты скорости деформации вычисляются по формулам:

$$\dot{\epsilon}_r = cs^n H \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right), \quad \dot{\epsilon}_\theta = cs^n H \sin \varphi. \quad (8)$$

Подстановкой (7) в (4) для уравнения равновесия получим следующее соотношение:

$$\cos \varphi \frac{ds}{dr} - s \sin \varphi \frac{d\varphi}{dr} = - \frac{s \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{3} \right)}{r}. \quad (9)$$

Из условия совместности скоростей деформаций (5) с учётом (8) имеем

$$n \sin \varphi \cdot H \frac{ds}{dr} + s \cos \varphi \cdot H \frac{d\varphi}{dr} + s \sin \varphi \cdot \frac{dH}{dr} = \frac{\sqrt{3} s \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{3} \right) H}{r}. \quad (10)$$

Систему стохастических уравнений ползучести (9), (10) приводим к более удобному для дальнейших вычислений виду:

$$\begin{aligned} (\cos^2 \varphi + n \sin^2 \varphi) H \frac{d\varphi}{dr} + \frac{\sin 2\varphi}{2} \frac{dH}{dr} = \\ = \frac{\cos \left(\varphi + \frac{\pi}{3} \right) (\sqrt{3} \cos \varphi + n \sin \varphi) H}{r}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$(\cos^2 \varphi + n \sin^2 \varphi) H \frac{ds}{dr} + s \sin^2 \varphi \frac{dH}{dr} = \frac{-2s \cos^2 (\varphi + \frac{\pi}{3}) H}{r}. \quad (12)$$

Из первого уравнения системы исключена переменная s , а из второго — производная $\frac{d\varphi}{dr}$.

Далее производится статистическая линеаризация системы стохастических уравнений (11) и (12). Представим переменные s и φ в виде разложения по малому параметру α , ограничиваясь членами нулевого и первого порядков относительно α :

$$\begin{aligned} s &= s^0 + \alpha s^*, & \langle s \rangle &= s^0, & \langle s^* \rangle &= 0, \\ \varphi &= \varphi^0 + \alpha \varphi^*, & \langle \varphi \rangle &= \varphi^0, & \langle \varphi^* \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Нулевое приближение метода малого параметра приводит к детерминированной системе:

$$\begin{aligned} (\cos^2 \varphi^0 + n \sin^2 \varphi^0) \frac{d\varphi^0}{dr} &= \frac{\cos (\varphi^0 + \frac{\pi}{3})}{r} (\sqrt{3} \cos \varphi + n \sin \varphi), \\ (\cos^2 \varphi^0 + n \sin^2 \varphi^0) \frac{ds^0}{dr} &= \frac{-2s^0 \cos^2 (\varphi^0 + \frac{\pi}{3})}{r}. \end{aligned} \quad (14)$$

Первое уравнение системы (14) содержит только одну переменную φ^0 , поэтому его можно решить при граничном условии $\varphi^0(a) = \frac{\pi}{2}$, которое легко получается из первого условия (6), с учётом того, что интенсивность s^0 не может быть нулевой при наличии внешней нагрузки. Для нахождения численного решения этого уравнения использовался метод Адамса—Мултона пятого порядка [5] с целью обеспечения наибольшей точности, так как полученные значения используются для расчета остальных характеристик. Бесконечный интервал $[a; \infty]$ заменялся конечным $[a; b]$, ($b \ll a$). Для численных расчётов были использованы в качестве границ значения $a = 1$ и $b = 30$. Внешняя нагрузка $p = 173$ МПа, что соответствует, в частности, реальной задаче о вращении диска паровой турбины [4].

Теперь, подставив найденное φ^0 во второе уравнение (14), можно найти функцию s^0 . Из условия на бесконечности (6) получим $s^0(\infty) = p$. Численное решение второго уравнения системы (14) проводится в обратную сторону на промежутке $[a, b]$ методом Адамса—Мултона пятого порядка при условии, что $s^0(b) = p$.

Зная φ^0 и s^0 , можно вычислить детерминированные значения σ_r^0 и σ_θ^0 по формулам:

$$\sigma_r^0 = \frac{2}{\sqrt{3}} s^0 \cos \varphi^0, \quad \sigma_\theta^0 = \frac{2}{\sqrt{3}} s^0 \cos \left(\varphi^0 - \frac{\pi}{3} \right). \quad (15)$$

Как видно из рис. 1, тангенциальное напряжение σ_θ^0 на границе отверстия убывает с увеличением n . В работе [6] для коэффициента концентрации напряжения вблизи отверстия $K = \frac{\sigma_\theta(a)}{p}$ предложена приближенная формула $1 + \frac{1}{n}$, что соответствует полученным нами результатам. Для больших показателей нелинейности ($n \geq 4$) тангенциальные напряжения достигают максимального значения не на границе отверстия, но в непосредственной ее близости. По мере удаления от границы отверстия σ_θ^0 достаточно быстро стремится

Рис. 1. Графики детерминированной компоненты тангенциального напряжения σ_θ^0 при $n = 2, 4, 8$

к значению, равному внешней нагрузке p . Радиальное напряжение σ_r^0 возрастает от нуля (на границе отверстия) до значения внешней нагрузки p .

Подставляя (13) в систему (11), (12) и учитывая только члены первого порядка малости относительно α , получим статистически линейную систему:

$$\begin{aligned} (\cos^2 \varphi^0 + n \sin^2 \varphi^0) \frac{d\varphi^*}{dr} + \left[(n-1) \sin 2\varphi^0 \frac{d\varphi^0}{dr} + \frac{\sqrt{3}}{r} \sin \left(2\varphi^0 + \frac{\pi}{3} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{3}n}{r} \cos \left(2\varphi^0 + \frac{\pi}{3} \right) \right] \varphi^* = -\frac{\sin 2\varphi^0}{2} \cdot \frac{dU}{dr}, \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\cos^2 \varphi^0 + n \sin^2 \varphi^0) \frac{ds^*}{dr} + \frac{2 \cos^2 \left(\varphi^0 + \frac{\pi}{3} \right)}{dr} s^* + \\ + \left[(n-1) \frac{\sin 2\varphi^0}{2} \frac{ds^0}{r} - \frac{2 \cos \left(\varphi^0 + \frac{\pi}{6} \right)}{r} s^0 \right] \varphi^* = -s^0 \sin^2 \varphi^0 \cdot \frac{dU}{dr}. \quad (17) \end{aligned}$$

В эту систему входит случайная функция $U(r)$, описывающая стохастические неоднородности материала. В данной работе она взята в виде [7]

$$U(r) = \lambda_0 J_0(r) + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k J_k(r), \quad (18)$$

где λ_k — независимые случайные величины с математическим ожиданием $\langle \lambda_k \rangle = 0$ и дисперсией $\langle \lambda_k^2 \rangle = 1$, $J_k(r)$ — функции Бесселя I-го рода целого порядка.

В соответствии с представлением (18) решение уравнения (16) будем искать в виде

$$\varphi^* = \lambda_0 f_0(r) + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k(r). \quad (19)$$

Начальное условие для первого приближения:

$$\varphi^*(a) = 0. \quad (20)$$

Подставляя (18) и (19) в уравнение (16), получим последовательность задач Коши вида

$$\begin{aligned} (\cos^2 \varphi^0 + n \sin^2 \varphi^0) \frac{df_k}{dr} + \left[(n-1) \sin 2\varphi^0 \frac{d\varphi^0}{dr} + \frac{\sqrt{3}}{r} \sin \left(2\varphi^0 + \frac{\pi}{3} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{3}n}{r} \cos \left(2\varphi^0 + \frac{\pi}{3} \right) \right] f_k = -\frac{\sin 2\varphi^0}{2} \cdot \frac{dJ_k}{dr}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (21) \\ f_k(a) = 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что для численных расчётов бесконечный ряд в представлениях (18) и (19) надо заменить конечным. При последовательном решении уравнения (21) и сравнении результатов на каждом шаге, было получено что максимальное значение f_k на шестом шаге составляет всего 0,3% от значения на первом шаге. Поэтому при вычислении φ^* по формуле (19) ограничивались в сумме четырьмя слагаемыми.

Решение уравнения (17) будем искать в виде, аналогичном (19):

$$s^* = \lambda_0 g_0(r) + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k g_k(r),$$

последовательно решая несколько задач Коши вида

$$\begin{aligned} (\cos^2 \varphi^0 + n \sin^2 \varphi^0) \frac{dg_k}{dr} + \frac{2 \cos^2 \left(\varphi^0 + \frac{\pi}{3} \right)}{r} g_k + (n-1) \frac{f_k \sin 2\varphi^0}{2} \cdot \frac{ds^0}{dr} - \\ - \frac{2 \cos \left(2\varphi^0 + \frac{\pi}{6} \right)}{r} s^0 f_k = -s^0 \sin^2 \varphi^0 \left(\frac{k}{r} J_k - J_{k+1} \right), \\ g_k(a) = 0. \end{aligned}$$

Следует отметить, что компоненты g_k пересчитываются последовательно на каждом шаге через соответствующие значения f_k , как и в случае детерминированной задачи.

Случайные напряжения в первом приближении будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sigma_r^* &= \frac{2}{\sqrt{3}} (s^* \cos \varphi^0 - s^0 \varphi^* \sin \varphi^0), \\ \sigma_\theta^* &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(s^* \cos \left(\varphi^0 - \frac{\pi}{3} \right) - s^0 \varphi^* \sin \left(\varphi^0 - \frac{\pi}{3} \right) \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Найдем основные статистические характеристики случайных напряжений. Для этого вычислим дисперсии $\langle \varphi^{*2} \rangle$, $\langle \varphi^* s^* \rangle$ и $\langle s^{*2} \rangle$ по формулам:

$$\begin{aligned} \langle \varphi^{*2} \rangle &= f_0^2(r) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(r), \\ \langle \varphi^* s^* \rangle &= f_0(r) g_0(r) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} f_k(r) g_k(r). \end{aligned} \quad (23)$$

Дисперсии полей напряжений будут определяться выражениями:

$$\begin{aligned}
 D[\sigma_r] &= \alpha^2 \langle \sigma_r^{*2} \rangle = \frac{4}{3} \alpha^2 \left(\langle s^{*2} \rangle \cos^2 \varphi^0 + \right. \\
 &\quad \left. + (s^0)^2 \sin^2 \varphi^0 \langle \varphi^{*2} \rangle - 2s^0 \cos \varphi^0 \sin \varphi^0 \langle \varphi^* s^* \rangle \right), \\
 D[\sigma_\theta] &= \alpha^2 \langle \sigma_\theta^{*2} \rangle = \frac{4}{3} \alpha^2 \left(\langle s^{*2} \rangle \cos^2 \left(\varphi^0 - \frac{\pi}{3} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + (s^0)^2 \sin^2 \left(\varphi^0 - \frac{\pi}{3} \right) \langle \varphi^{*2} \rangle - 2s^0 \cos \left(\varphi^0 - \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\varphi^0 - \frac{\pi}{3} \right) \langle \varphi^* s^* \rangle \right).
 \end{aligned} \tag{24}$$

Наибольший интерес представляет собой коэффициент вариации тангенциального напряжения $\gamma = \frac{\sqrt{D[\alpha \sigma_\theta^*]}}{\sigma_\theta^0}$, который характеризует относительный разброс напряжения относительно среднего значения. Графики коэффициента вариации γ для различных n приведены на рис. 2. Как видно из графика, коэффициент вариации принимает максимальное значение или на контуре отверстия, или вблизи него. Так, например, при $\alpha = 0,5$ и $n = 1$ коэффициент вариации на контуре отверстия равен 0,2. Максимально возможное отклонение напряжений от среднего значения характеризуется утроенным коэффициентом вариации (правило «трёх сигм»). Следовательно, коэффициент концентрации напряжений в данном случае может максимально увеличиться в 1,6 раз по сравнению с детерминированным значением. Таким образом, возрастание коэффициента концентрации за счёт стохастических неоднородностей материала существенен и, несомненно, требует учёта при практических вычислениях.

Рис. 2. Графики коэффициента вариации тангенциального напряжения при $\alpha = 0,5$ и $n = 1, 2, 4, 6, 8$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 07-01-00478-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Должковой, А. А. Решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы методом малого параметра [Текст] / А.А. Должковой, Н.Н. Попов, В.П. Радченко // ПМТФ. — 2006. — Т. 47, № 1. — С. 166–171. — ISSN 0869–5032.

2. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела [Текст] / Ю. Н. Работнов. — М.: Наука, 1979. — 744 с.
3. Соколовский, В. В. Теория пластичности [Текст] / В. В. Соколовский. — М.: Высшая школа, 1969. — 608 с.
4. Малинин, Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести [Текст] / Н. Н. Малинин. — М.: Машиностроение, 1975. — 400 с.
5. Бахвалов, Н. С. Численные методы [Текст] / Н. С. Бахвалов. — М.: Наука, 1975. — 632 с.
6. Бойл, Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести [Текст] / Дж. Бойл, Дж. Спенс. — М.: Мир, 1985. — 360 с.
7. Лавренюк, В. И. Распределение напряжений около кругового отверстия в плоскости из стохастически неоднородного материала [Текст] / В. И. Лавренюк // Прикладн. механика. — 1973. — Т. 9, № 4. — С. 128–132.

Поступила в редакцию 01/X/2008;
в окончательном варианте — 07/X/2008.

MSC: 74E35, 74K20

CREEP OF A STOCHASTIC HETEROGENEOUS PLATE WITH A SMALL CIRCULAR HOLE

N. N. Popov

Samara State Technical University,
443100, Samara, Molodogvardeyskaya str., 244.
E-mail: ponick25@gmail.com

Nonlinear boundary value creep problem of allside tension of infinite stochastic heterogeneous plate with small circular hole is studied. Problem is solved in polar coordinates for two-dimensions. Statistical analysis of random stress field is performed on the basis of obtained solution. Results received demonstrate, that dispersion of stresses around the hole is significantly greater than for internal areas.

Key words: creep, boundary value problem, stochastic heterogeneous medium, stress concentration.

Original article submitted 01/X/2008;
revision submitted 07/X/2008.

Popov Nikolay Nikolaevich, Ph. D. (Phys. & Math.) Assist. Prof., Dept. of Applied Mathematics and Computer Science of Samara State Technical University.