Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Прохоров, И. М. Куликовских, Аппроксимация корреляционных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями Сонина–Лагерра, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008, выпуск 2(), 185–191

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu636>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:06:58

УДК 517.587:519.216

АППРОКСИМАЦИЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ МОЩНОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ СОНИНА—ЛАГЕРРА

*С. А. Прохоров, И. М. Куликовских*Самарский государственный аэрокосмический университет им. ак. С. П. Королева,
443086, г. Самара, Московское ш., 34.

E-mails: sp@smr.ru; eirisan@rambler.ru

Исследованы аппроксимативные возможности ортогональных функций Сонина—Лагерра при заданном параметре ортогонального базиса. Оценены параметры аппроксимирующего выражения, используемые при построении моделей корреляционной функции и спектральной плотности мощности, в соответствии с минимумом взвешенной квадратической погрешности аппроксимации.

Ключевые слова: аппроксимация, корреляционная функция, ортогональный базис Сонина—Лагерра, преобразование Фурье, случайный процесс, спектральная плотность мощности.

Применение ортогональных функций Сонина—Лагерра для аппроксимации и восстановления корреляционных функций (КФ) и спектральных плотностей мощности (СПМ) связано с их широкими аппроксимативными возможностями.

Проведём корреляционно-спектральный анализ в ортогональном базисе Сонина—Лагерра с изменяемым параметром α при значениях $\alpha = 0, 1, 2$.

Представим ортогональные функции Сонина—Лагерра в следующей форме:

$$L_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma) = \frac{1}{C_{k+\alpha}^k} \sum_{s=0}^k C_{k+\alpha}^{k-s} \frac{(-\gamma\tau)^s}{s!} e^{-\frac{\gamma\tau}{2}}, \quad (1)$$

значение функций в «нуле» которых $L_k^{(\alpha)}(0, \gamma) = 1$, а норма

$$\|L_k^{(\alpha)}\|^2 = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{C_{k+\alpha}^k \gamma^{\alpha+1}}, & \text{при } k = m; \\ 0, & \text{при } k \neq m. \end{cases} \quad (2)$$

Представим модель КФ с параметрами $\gamma, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m$ в виде

$$K_a(\tau) = \sigma_x^2 \left[\sum_{k=0}^m \beta_k L_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma) 1(\tau) + \sum_{k=0}^m \beta_k L_k^{(\alpha)}(-\tau, \gamma) 1(-\tau) \right], \quad (3)$$

где σ_x^2 — дисперсия процесса, а коэффициенты разложения определяются так:

$$\beta_k = \frac{1}{\|L_k^{(\alpha)}\|^2} \int_0^\infty K_x(\tau) L_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma) \mu^{(\alpha)}(\tau) d\tau. \quad (4)$$

*Прохоров Сергей Антонович — зав. кафедрой информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета; д.т.н., проф.
Куликовских Илона Марковна — аспирант кафедры информационных систем и технологий Самарского государственного аэрокосмического университета.*

Здесь $\mu^{(\alpha)}(\tau) = \tau^\alpha$ — вес ортогональной функции.

Определив коэффициенты разложения β_k , необходимо решить задачу определения параметра масштаба γ , обеспечивающего минимальную допустимую погрешность аппроксимации. Для выбранного ортогонального базиса данная задача решена в [1].

Следует отметить, что модель строится таким образом, чтобы коэффициенты разложения β_k обеспечивали минимум среднеквадратической взвешенной погрешности аппроксимации

$$\Delta = \int_0^\infty \left[K_x(\tau) - \sum_{k=0}^m \beta_k L_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma) \right]^2 \mu^{(\alpha)}(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Однако коэффициенты (4) не обеспечивают выполнения основного свойства КФ:

$$K_a(0) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m \beta_k L_k^{(\alpha)}(0, \gamma) \neq \sigma_x^2. \quad (6)$$

Для обеспечения последнего условия вводят коэффициенты разложения b_k , для которых

$$\rho_a(0) = \sum_{k=0}^m b_k L_k^{(\alpha)}(0, \gamma) = 1, \quad (7)$$

где $\rho_a(\tau) = K_a(\tau)/\sigma_x^2$ — нормированная корреляционная функция (НКФ).

Таким образом, модель КФ (3) можно представить как модель НКФ с учётом ограничения (7) в следующем виде:

$$\rho_a(\tau) = \left[\sum_{k=0}^m b_k L_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma) 1(\tau) + \sum_{k=0}^m b_k L_k^{(\alpha)}(-\tau, \gamma) 1(-\tau) \right]. \quad (8)$$

В работе [2] приводится методика расчета коэффициентов разложения и оценка значений погрешностей аппроксимации КФ при ограничениях на её модель. Для удобства погрешность аппроксимации представляют в виде суммы $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$, где Δ_1 — погрешность аппроксимации, вызванная конечным числом членов разложения m ; Δ_2 — погрешность аппроксимации, вызванная дополнительным ограничением, обеспечивающим выполнение основного свойства КФ.

Выражения для коэффициентов разложения b_n и погрешностей аппроксимации Δ_1, Δ_2 для выбранных значений α представлены в табл. 1.

Построим ортогональную модель автокорреляционной функции (АКФ) идеального полосового шума $\rho_x(\tau) = (\sin 0,5\tau/0,5\tau) \cos 5\tau$ в базисе Сонина—Лагерра с параметром $\alpha = 1$ (см. рис. 1).

Учитывая выражение (3), оценим СПМ:

$$S_a(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{2\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \operatorname{Re} W_k^{(\alpha)}(j\omega), \quad (9)$$

где $W_k^{(\alpha)}(j\omega)$ — преобразование Фурье ортогональных функций.

Таблица 1

Коэффициенты разложения и погрешности аппроксимации КФ

α	b_n	Δ_1, Δ_2
0	$b_n = \beta_n + \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)}{(m+1)}$	$\Delta_1 = \int_0^\infty \rho_x^2(\tau) d\tau - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k^2,$ $\Delta_2 = \frac{1}{\gamma} \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)^2}{(m+1)}$
1	$b_n = \beta_n + \frac{2\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)(n+1)}{(m+1)(m+2)}$	$\Delta_1 = \int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{1}{\gamma^2} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)},$ $\Delta_2 = \frac{2}{\gamma^2} \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)^2}{(m+1)(m+2)}$
2	$b_n = \beta_n + \frac{3\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)(n+1)(n+2)}{(m+1)(m+2)(m+3)}$	$\Delta_1 = \int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau) d\tau - \frac{4}{\gamma^3} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)(k+2)},$ $\Delta_2 = \frac{12}{\gamma^3} \frac{\left(1 - \sum_{k=0}^m \beta_k\right)^2}{(m+1)(m+2)(m+3)}$

Рис. 1. Аппроксимация КФ функциями Сонина—Лагерра ($\alpha = 1$); $\gamma = 4$, $m = 250$. Относительная погрешность аппроксимации $\delta = 0,12$

Выражения для действительной и мнимой части преобразования Фурье ортогональных функций представлены в работе [1]. Однако форма их представления имеет недостатки, связанные с необходимостью вычисления комбинаторного числа сочетаний, что не позволяет вычислять данные выражения для высоких порядков. В табл. 2 представлена альтернативная форма записи данных выражений, свободная от указанного недостатка.

Оценка СПМ, записанная по параметрам модели КФ (см. рис. 1), показана на рис. 2.

Другим способом оценки СПМ (9) является построение её аппроксимативной ортогональной модели:

$$S_a(\omega) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m c_k L_k^{(\alpha)}(\omega, \gamma). \quad (10)$$

С учётом чётности СПМ модель (8) должна гарантировать выполнение

Таблица 2

Преобразование Фурье ортогональных функций Сонина—Лагерра

α	$\text{Re } W_k^{(\alpha)}(j\omega)$	$\text{Im } W_k^{(\alpha)}(j\omega)$
0	$\frac{2}{\gamma} (-1)^k \cos \phi \cos [(2k+1)\phi]$	$\frac{2}{\gamma} (-1)^{k+1} \cos \phi \sin [(2k+1)\phi]$
1	$\frac{1}{\gamma \cdot (k+1)} \left(1 + (-1)^k \cos [2(k+1)\phi] \right)$	$\frac{1}{\gamma \cdot (k+1)} \left((-1)^{k+1} \sin [2(k+1)\phi] \right)$
2	$\frac{2}{\gamma \cdot (k+1)(k+2)} \left(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^k \cos [(2k+3)\phi]}{2 \cos \phi} + k+1 \right)$	$\frac{2}{\gamma \cdot (k+1)(k+2)} \left(\frac{(-1)^{k+1} \sin [(2k+3)\phi]}{2 \cos \phi} - \frac{\text{tg } \phi}{2} \right)$

Рис. 2. Модель СПМ с характеристиками $\omega_e = 5,3$, $S(\omega_e) = 0,6771$, $\Delta\omega_e = 5,6692$

Таблица 3

Коэффициенты разложения и погрешности аппроксимации СПМ

α	c_n	Δ_1, Δ_2
0	$c_n = \beta_n + \left[\frac{\frac{\gamma}{4} - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k}{m+1} \right] (-1)^n$	$\Delta_1 = \int_0^\infty S_{xH}^2(\omega) d\omega - \frac{1}{\gamma} \sum_{k=0}^m \beta_k^2,$ $\Delta_2 = \frac{1}{\gamma} \frac{\left[\frac{\gamma}{4} - \sum_{k=0}^m \beta_k (-1)^k \right]^2}{m+1}$
1	$c_n = \beta_n + \left[\frac{\frac{\gamma}{4} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k [(k+1) \bmod 2]}{(k+1)}}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+1) \bmod 2]}{(k+1)}} \right] [(n+1) \bmod 2]$	$\Delta_1 = \int_0^\infty S_{xH}^2(\omega) \mu(\omega) d\omega - \frac{1}{\gamma^2} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)},$ $\Delta_2 = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\left[\frac{\gamma}{4} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k [(k+1) \bmod 2]}{(k+1)} \right]^2}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+1) \bmod 2]}{(k+1)}}$
2	$c_n = \beta_n + \left[\frac{\frac{\gamma}{8} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k [(k+2) \operatorname{div} 2]}{(k+1)(k+2)}}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+2) \operatorname{div} 2]^2}{(k+1)(k+2)}} \right] [(n+2) \operatorname{div} 2]$	$\Delta_1 = \int_0^\infty S_{xH}^2(\omega) \mu(\omega) d\omega - \frac{4}{\gamma^3} \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k^2}{(k+1)(k+2)}$ $\Delta_2 = \frac{4}{\gamma^3} \frac{\left[\frac{\gamma}{8} - \sum_{k=0}^m \frac{\beta_k [(k+2) \operatorname{div} 2]}{(k+1)(k+2)} \right]^2}{\sum_{k=0}^m \frac{[(k+2) \operatorname{div} 2]^2}{(k+1)(k+2)}}$

условия нормировки [2]:

$$\int_0^{\infty} S_a(\omega) d\omega = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m c_k W_k(0) = \frac{\sigma_x^2}{2}.$$

Выражения для коэффициентов разложения c_n и погрешностей аппроксимации Δ_1, Δ_2 для выбранных значений α представлены в табл. 3.

Оценим КФ по параметрам модели СПМ [2]:

$$K_{axy}(\tau) = 2\sigma_x^2 \left[\sum_{k=0}^{m_{\text{Re}}} \beta_{k \text{ Re}} \cdot \text{Re } W_{k \text{ Re}}(j\tau) + \sum_{k=0}^{m_{\text{Im}}} \beta_{k \text{ Im}} \cdot \text{Im } W_{k \text{ Im}}(j\tau) \right], \quad (11)$$

где $W_k^{(\alpha)}(j\omega)$ — преобразование Фурье ортогональных функций;

$$\beta_{k \text{ Re}} = \frac{1}{\|\psi_{k \text{ Re}}\|^2} \int_0^{\infty} \text{Re } S_{xy}(u) L_{k \text{ Re}}^{(a)}(u, \alpha_{\text{Re}}) du,$$

$$\beta_{k \text{ Im}} = \frac{1}{\|\psi_{k \text{ Im}}\|^2} \int_0^{\infty} \text{Im } S_{xy}(u) L_{k \text{ Im}}^{(a)}(u, \alpha_{\text{Im}}) du.$$

Представим решение обратной задачи: построим ортогональную модель СПМ и по параметрам модели оценим КФ.

На рис. 3 представлена аппроксимация СПМ (см. рис. 2) с применением ортогональных функций Сонина—Лагерра ($\alpha = 0$).

По параметрам модели СПМ оценивается КФ. На рис. 4 отражены результаты решения прямой (аппроксимация КФ и оценка СПМ) и обратной (аппроксимация СПМ и оценка КФ) задач.

Рис. 3. Аппроксимация СПМ функциями Сонина—Лагерра ($\alpha = 0$); $\gamma = 20$, $m = 400$. Относительная погрешность аппроксимации $\delta = 0,058$

Рис. 4. Наложение исходной КФ и КФ, полученной после аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа

Совпадение моделей исходной и результирующей АКФ (см. рис. 4) свидетельствует об адекватности предложенных ортогональных моделей и правильности разработанных алгоритмов аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Прохоров, С. А. Частотные характеристики ортогональных функций Сонина—Лагерра [Текст] / С. А. Прохоров, И. М. Куликовских // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2007. — № 2 (15). — С. 123–127.
2. Прикладной анализ случайных процессов [Текст] / под ред. С. А. Прохорова. Самара: СНЦ РАН, 2007. — 582 с.

Поступила в редакцию 12/V/2008;
в окончательном варианте — 14/X/2008.

MSC: 93B40, 42C05, 33C45

APPROXIMATION OF CORRELATION FUNCTION AND POWER SPECTRAL DENSITY WITH SONIN-LAGUERRE ORTHOGONAL FUNCTIONS

S. A. Prokhorov, I. M. Kulikovskikh

S. P. Korolyov Samara State Aerospace University,
443086, Samara, Moskovskoe sh., 34.
E-mails: sp@smr.ru; eirisan@rambler.ru

Approximate capabilities of Sonin–Laguerre orthogonal functions with predefined parameter of orthogonal basis are studied. Parameters of approximation expression are evaluated, that are used for construction of the models of correlation function and power spectral density in compliance with the minimal weighted quadratic error of approximation.

Key words: approximation, correlation function, Sonin–Laguerre orthogonal basis, Fourier transformation, random process, power spectrum density.

Original article submitted 12/V/2008;
revision submitted 14/X/2008.

*Prokhorov Sergey Antonovich, Dr. Sci. (Tech), Prof. Head of Information Systems and Technologies Chair of Samara State Aerospace University.
Kulikovskikh Ilena Markovna, Postgraduate Student of Information Systems and Technologies Chair of Samara State Aerospace University.*