Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Радченко, А. В. Симонов, С. А. Дудкин, Стохастический вариант одномерной теории ползучести и длительной прочности, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2001, выпуск 12, 73–84

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu64>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:02:16

В.П. Радченко, А.В. Симонов, С.А. Дудкин

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ ОДНОМЕРНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ

Предложен одномерный вариант стохастической теории ползучести и длительной прочности на основе энергетической концепции накопления поврежденности и разрушения. Дана методика идентификации параметров детерминированных и случайных величин модели. Разработана схема прогнозирования неупругой деформации и времени разрушения в стохастической постановке на основе метода статистических испытаний. Выполнена экспериментальная проверка модели для сплава ЭИ698 при $T=750^\circ$ и стали 12Х18Н10Т при $T=850^\circ$. Наблюдается хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных.

1. Постановка задачи. Механические свойства материалов имеют четкую вероятностную природу, начиная с атомно-молекулярного уровня и заканчивая уровнем элемента конструкции, машины или сооружения. Следствием этого является то, что однотипные изделия имеют неодинаковые механические свойства. Более того, механические свойства материала оказываются не только различными в разных точках одного и того же элемента конструкции, но они являются различными и при испытании образцов в лабораторных условиях.

Это объясняется наличием неконтролируемых флуктуаций химического состава материала, его поликристаллической и композиционной структурой, случайными изменениями параметров технологических процессов и их неустойчивостью (неоднородность и нестационарность температурных полей при кристаллизации и термообработке, полей деформаций при обработке давлением и т.д.), несовершенством системы контроля качества и другими причинами. К числу факторов, влияющих на разброс механических свойств, относятся, например, микротрещины, включения, пустоты. Механические свойства конструкционных металлических материалов неодинаковы для различных плавок и тем более для продукции различных заводов и поставщиков.

В результате такие механические характеристики, как предел прочности, предел текучести, долговечность, длительная прочность, относительное удлинение при разрыве, неупругая деформация приобретают ярко выраженный стохастический характер. Так, циклическая долговечность при испытаниях на усталость может изменяться на порядок и более, а результаты испытаний на ползучесть могут отличаться друг от друга по величине минимальной скорости ползучести на 50% и такие результаты приходится расценивать как хорошо согласующиеся между собой данные. Существенное влияние случайных возмущений механических характеристик материалов на поля деформаций и напряжений и необходимость построения соответствующих стохастических моделей для расчетов на прочность отмечалось во многих работах (см., например, [1-9]). Широко используемые для оценки ресурса безопасной эксплуатации элементов конструкции феноменологические теории (в частности, и теория ползучести), как правило, носят детерминированный характер и не учитывают явление разброса для тех или иных механических характеристик (деформации ползучести, перемещения, времени разрушения и т.д.). Поэтому детерминированный метод расчета является первым, и в ряде случаев недостаточным, приближением. Неточности детерминированного расчета на прочность покрываются, например, назначением коэффициента запаса прочности, который во многих случаях выбирается без достаточных оснований и не является оптимальным. Это приводит либо к появлению не используемых резервов прочности элементов конструкции, либо к преждевременному их разрушению. В связи с появлением новых машин и конструкций с небольшим опытом эксплуатации, использованием новых материалов, высоких скоростных режимов, давлений, температур возрастает значение научно обоснованного прогноза и (как одного из методов решения этой задачи) роли статистических методов исследования в механике деформируемого твердого тела и расчетах на прочность. В связи с вышеизложенным, актуальность проблемы, связанной с разработкой стохастических моделей (в том числе для ползучести и длительной прочности) и их применение не вызывает сомнений.

Однако при построении соответствующих стохастических моделей необходимо учитывать, что структура полей макро- и микронеоднородностей механических свойств материала различна. Здесь следует отметить, что установлено существенное влияние микронеоднородностей на

долговечность по критериям типа допустимых перемещений (деформаций), а микронеоднородностей – на отказы по критерию разрушения.

Прежде чем рассмотреть вопрос собственно построения стохастической модели ползучести и длительной прочности, что является целью настоящей работы, проанализируем глобальную картину неоднородностей свойств материала.

Следуя Ю.П.Самарину [10], будем считать, что некоторым производителем в течении длительного времени изготавливается металлический прут. Тогда всю продукцию можно представить как один глобальный стержень, образованный из последовательно изготовленных прутков. Если через x обозначить координату на оси глобального стержня, а через $A(x)$ – исследуемую механическую характеристику материала, то влияние неоднородности качественно будет описываться кривой, изображенной на рис.1. Здесь нетрудно увидеть два вида неоднородностей: макро- и микро-неоднородности.

Р и с. 1. Схематическое распределение неоднородностей вдоль глобального стержня

Медленные изменения рассматриваемой функции (плавная кривая на рис.1.) соответствуют макронеоднородностям материала, обусловленным трендом (постепенным изменением) условий производства, свойств сырья, нестабильностью технологических процессов и т.д. При этом возможны разрывы кривой, описывающей тренд, за счет перехода на

новое сырье, измененную технологию и т.п. Указанные разрывы хорошо известны экспериментаторам при сравнении опытных данных, например, на ползучесть образцов из различных плавок.

Наряду с трендом, на рис.1 показана быстро осциллирующая кривая, связанная с микроструктурным строением материала. При этом характерные частоты флуктуаций, возникающих за счет микронеоднородностей, будут гораздо выше частот, обусловленных наличием макронеоднородностей. Поэтому для глобального описания неоднородностей можно предложить следующее соотношение:

$$A(x) = u_0(x) + \sum_k [u_k(x) \cos w_k x + v_k \sin w_k x]. \quad (1)$$

Здесь функция $u_0(x)$ описывает тренд исследуемой механической характеристики, т.е. макронеоднородность, а выражение под знаком суммы – ее микроструктурные флуктуации. Функции $u_k(x)$ и $v_k(x)$ изменяются так же медленно, как и $u_0(x)$. Они предназначены для описания тренда амплитуд микроструктурных флуктуаций.

Пусть теперь из глобального стержня вырезан образец длиной l , соответствующий отрезку $[a, a+l]$ (рис. 1). При этом предполагается, что величин l значительно больше, чем характерная длина волны микронеоднородностей, т.е. число $w_k l / 2\pi$ является большим. С другой стороны, длину l будем считать достаточно малой для того, чтобы зафиксировать тренд. Тогда в (1) функции $u_0(x)$, $u_k(x)$ и $v_k(x)$ можно приближенно считать независимыми от x ($x \in [a, a+l]$):

$$A(x) = u_0 + \sum_k (u_k \cos w_k x + v_k \sin w_k x). \quad (2)$$

Очевидно, что величины $u_0(x)$, $u_k(x)$ и $v_k(x)$ зависят от того места, где вырезан образец, т.е. от величины a (см. рис. 1). Если местоположение образцов выбирать случайно, то указанные величины будут восприниматься по отношению к набору образцов тоже как случайные.

С помощью (2) нетрудно найти эффективное (среднее) значение исследуемой механической характеристики для выбранного образца ($x \in [a, a+l]$):

$$\frac{1}{l} \int_a^{a+l} A(x) dx = u_0 + \sum_k \frac{1}{w_k l} [u_k \sin w_k (a+l) - u_k \sin w_k a - v_k \cos w_k (a+l) + v_k \cos w_k a] \approx u_0,$$

поскольку числа $w_k l$ считаются большими.

Таким образом, для описания макронеоднородностей достаточно рассматривать лишь величину u_0 , причем для набора образцов она будет восприниматься при статистическом исследовании

довании как случайная величина, закон распределения которой зависит от формы кривой, выражающей тренд. Возможно, именно поэтому законы распределения для одной и той же механической характеристики, полученные разными авторами на стандартных образцах, не всегда оказываются одинаковыми. Например, для величины накопленной в серии образцов деформации ползучести предлагались [4, 11-13] нормальный, логарифмически нормальный и другие законы распределения. По сути, значения величины u_0 для различных образцов представляют собой значения величины $u_0(x)$ в различных точках и об обоснованном законе распределения для u_0 можно говорить, лишь ориентируясь на какой-либо конкретный вид тренда. К сожалению, на практике такого вида информация отсутствует. В дальнейшем величину u_0 будем называть индивидуальной характеристикой образца или главной частью механической характеристики образца.

Обобщая (2), для пространственного случая, можно записать

$$A(x_1, x_2, x_3) = u_0 + u(x_1, x_2, x_3), \quad \langle u(x_1, x_2, x_3) \rangle = 0, \quad (3)$$

где u_0 - индивидуальная характеристика пространственного образца, предназначенная для описания макронеоднородностей; $u(x_1, x_2, x_3)$ - микроструктурная флуктуация, представляющая собой однородную случайную функцию.

Представления (1) – (3) относятся к механическим характеристикам, не зависящим от времени (например, деформациям упругости и пластичности). Если механические характеристики изменяются еще и во времени, то в соотношениях типа (1) – (3), наряду с пространственными координатами, должен еще учитываться и временной фактор. Примером такой характеристики является деформация ползучести.

Целью дальнейших исследований является построение стохастических уравнений ползучести и длительной прочности для моделирования макронеоднородностей, т.е. для компоненты u_0 в соотношениях (1) – (3). Актуальность поставленной задачи обусловлена необходимостью иметь инструмент для оценки надежности элементов конструкций при ползучести в стохастической постановке. Однако для чисто феноменологического стохастического прогнозирования требуется большой объем соответствующих экспериментальных данных, получение которых в условиях длительного эксперимента крайне затруднительно и экономически нецелесообразно. Один из подходов, позволяющих избежать указанные трудности, заключается в использовании метода статистических испытаний – метода Монте-Карло. Применяя последний, на основе соответствующих стохастических уравнений состояния можно осуществить прогнозирование как деформации ползучести, так и времени до разрушения с заданной вероятностью, что дает возможность значительно сократить объем дорогостоящего эксперимента.

Известен ряд работ, в которых успешно применен указанный подход [14-17]. В частности, были предложены стохастические уравнения для описания деформации ползучести в пределах первой и второй стадий [14], установлены законы распределения случайных параметров соответствующих моделей, описывающих все три стадии ползучести [15, 16], приведен метод прогнозирования деформации ползучести в вероятностном аспекте, включая стадию ускоренной ползучести [17]. Определенное обобщение работ [14-17] было выполнено в [18], где кроме деформации ползучести учитывалась пластическая деформация, а также был введен стохастический критерий разрушения.

Цель настоящей работы – систематизация результатов работ [14-18] и разработка единой методологической основы для построения стохастических уравнений, с помощью которых на основании метода статистического моделирования можно осуществлять прогнозирование как деформации ползучести, так и времени до разрушения в вероятностной постановке в условиях одноосного растяжения.

2 Стохастическая модель одноосной ползучести и длительной прочности. При построении стохастических реологических уравнений, моделирующих макронеоднородности, нужно исходить из того, что причины рассеяния опытных данных по ползучести можно разделить на две группы: свойства материала (анизотропия, неоднородность, вариации химического состава, технологии изготовления и термической обработки) и методика испытаний (погрешность изготовления образцов и измерения деформаций, колебания температуры и точность ее измерения, погрешность в определении приложенной нагрузки и т.д.). В связи с изложенным,

аналогично [14] предполагается, что деформация образца $e(t)$ является аддитивной составляющей двух случайных функций:

$$e(t) = e_1(t) + e_2(t)$$

где $M[e_2(t)] = 0$ и $|e_2(t)| \ll e_1(t)$ ($M[\bullet]$ - оператор математического ожидания). В силу этих условий $e_2(t)$ рассматривается как некоторый шум, порожденный второй группой причин рассеяния и наложенный на случайную функцию $e_1(t)$, отражающей стабильные случайные свойства материала. Таким образом, роль случайной функции $e_2(t)$ сводится к созданию незначительных флуктуаций возле каждой из реализаций $e_1 = e_1(t)$. Поэтому $e_1 = e_1(t)$ называется главной частью деформации $e(t)$.

В соответствии с [18] основной вариант стохастической реологической модели ползучести и длительной прочности имеет вид

$$e = e + e^p + p; \quad e = \frac{S}{E};$$

$$\mathcal{E}^p = \begin{cases} 0, & S(t) \leq S_{np}, \\ I[a(S(t) - S_{np})^{n_1} - e^p(t)], & a(S(t) - S_{np})^{n_1} > e^p(t), \\ 0, & a(S(t) - S_{np})^{n_1} \leq e^p(t), \quad S(t) \geq S_{np}; \end{cases}$$

$$p = u + v + w;$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^s u_k(t), \quad \mathcal{U}_k(t) = I_k \left[A_k \left(\frac{S(t)}{S_*} \right)^n - u_k(t) \right];$$

$$v(t) = \sum_{k=1}^s v_k(t); \quad \mathcal{V}_k = \begin{cases} I_k \left[B_k \left(\frac{S(t)}{S_*} \right)^n - v_k(t) \right], & B_k \left(\frac{S(t)}{S_*} \right)^n > v_k(t), \\ 0, & B_k \left(\frac{S(t)}{S_*} \right)^n \leq v_k(t), \end{cases}$$

$$\mathcal{W}(t) = C \left(\frac{S(t)}{S_*} \right)^m; \quad (4)$$

$$S = S_0(1 + w); \quad (5)$$

$$\mathcal{W} = gS \mathcal{E}^p + aS \mathcal{P}. \quad (6)$$

Здесь e - полная деформация; e и e^p - упругая и пластическая деформации; p - деформация ползучести; u, v, w - вязкоупругая, вязкопластическая и вязкая составляющие p (соответственно); S_0 и S - номинальное и истинное напряжения (соответственно); E - модуль Юнга; $I_k, A_k, B_k, C, n, m, S_*$ - параметры материала; с помощью которых описываются первая и вторая стадии ползучести, а также ее обратимая после разгрузки часть; w - параметр поврежденности, который полагается пропорциональным линейной комбинации работы истинного напряжения на деформации ползучести и пластичности; a и g - параметры материала, контролирующие процессы разупрочнения материала на пластической деформации и деформации ползучести соответственно за счет накопления поврежденности,

$$g = g_1(e^p)^{m_2}, \quad a = L_1(S_0)^{m_1}, \quad (7)$$

g_1, L_1, m_2, m_1 - характеристики материала (в честных случаях для ряда материалов $g = const$, $a = const$); a, n_1, I - параметры, описывающие диаграмму мгновенного пластического деформирования; S_{np} - предел пропорциональности. Согласно третьего соотношения (4) пластическая деформация e^p описывается такими же по структуре уравнениями, как и вязкопластическая компонента v деформации ползучести, т.е. также развивается во времени. Данный под-

ход к описанию пластической деформации соответствует так называемым эндохронным теориям пластичности [19, 20] т.е. теориям пластичности с внутренним временем.

В предложенных уравнениях в качестве внутреннего времени используется обычное физическое время. Если выбрать $I \gg \max_k \{I_k\}$, то при некотором фиксированном S_0 всегда можно указать такой интервал времени $[0, t]$, что e^p будут сколь угодно мало отличаться от своего асимптотического значения, полученного из решения третьего соотношения (4) при $t \rightarrow +\infty$, в то время как $p(t) \approx 0$.

С целью прогнозирования времени до разрушения $t = t^*$ предлагается следующий критерий разрушения энергетического типа:

$$\int_0^{t^*} \frac{S(t) de^p(t)}{A_*^p} + \int_0^{t^*} \frac{S(t) dp(t)}{A_*^c(S_0)} = 1, \quad (8)$$

где A_*^p и $A_*^c(S_0) = L_A(S_0)^{m_A}$ - соответственно критические удельные величины работ разрушения истинного напряжения на пластической деформации и деформации ползучести; L_A, m_A - характеристики материала.

Из соотношений (4) – (6) следует, что даже при напряжениях $S_0 < S_{np}$ в процессе ползучести за счет накопления поврежденности в некоторый момент времени $t = t_1$ истинное напряжение $S(t) > S_{np}$ ($t > t_1$) и наряду с деформацией ползучести будет развиваться пластическая деформация. Таким образом, на третьей стадии ползучести неупругая деформация в общем случае складывается из двух компонент различной природы.

При построении феноменологической модели стохастической теории ползучести и длительной прочности необходимо:

- 1) ввести гипотезы относительно характера параметров (случайных или детерминированных), входящих в предложенную модель (4) – (8);
- 2) иметь экспериментальную диаграмму упругопластического деформирования и экспериментальную выборку кривых ползучести для определения параметров законов распределения случайных величин модели;
- 3) установить вид законов распределения выделенных случайных величин.

В соответствии с изложенной схемой построения стохастической модели (4) – (8) часть ее параметров являются детерминированными, другая ее часть – случайными. Поскольку разброс опытных данных в упругопластической области, как правило, много меньше разброса данных при ползучести, то вводится первая гипотеза, согласно которой параметры $I, a, n_1, g_1, m_2, A_*^p, E, S_{np}$, описывающие упругопластическую деформацию, полагаются детерминированными. Относительно же параметров, описывающих деформацию ползучести в пределах трех стадий вплоть до разрушения, вводится вторая гипотеза: I_k, n, m, m_A, S_*, m_1 - детерминированные величины, а величины A_K, B_K, C, L_1, L_A - случайные. В частности, если вместо случайных величин использовать их математические ожидания $b_k = M[B_k], a_k = M[A_k], c = M[C], a_1 = M[L_1], a_A = M[L_A]$, то основной вариант (4) – (8) дает известный детерминированный вариант одноосной теории ползучести и длительной прочности [21, 22], методика идентификации параметров которого изложена в [23].

Вторая гипотеза с точки зрения теории случайных процессов накладывает достаточно жесткие ограничения на отношение среднеквадратического отклонения к математическому ожиданию в зависимости от напряжения S_0 для любой из функций

$$\bar{a}_k(S_0) = A_k \left(\frac{S_0}{S_*} \right)^n, \quad \bar{b}_k(S_0) = B_k \left(\frac{S_0}{S_*} \right)^n, \quad \bar{c}(S_0) = C \left(\frac{S_0}{S_*} \right)^m, \\ \bar{a}(S_0) = L_1(S_0)^{m_1}, \quad \bar{A}_*^c(S_0) = L_A(S_0)^{m_A}. \quad (9)$$

Действительно, обозначая через $F(S_0)$ любую из перечисленных в (9) функций, запишем каноническое разложение для $F(S_0)$, ограничиваясь одной базисной функцией [24]:

$$F(S_0) = M[F(S_0)] + S[F(S_0)] \cdot u, \quad (10)$$

где u - нормированная случайная величина, $M[u] = 0$, $M[u^2] = 1$, $M[\bullet]$ и $S[\bullet]$ - соответственно символы математического ожидания и среднеквадратического отклонения. Преобразуем (10) к виду

$$F(s_0) = M[F(s_0)] \cdot \left(1 + \frac{S[F(s_0)]}{M[F(s_0)]} u \right) \quad (11)$$

Очевидно, что при выполнении условия

$$S[F(s_0)]/M[F(s_0)] = \text{const} \quad (12)$$

соотношение (11) преобразуется к виду

$$F(s_0) = u_1 M[F(s_0)], \quad M[u_1] = 1,$$

где $u_1 = 1 + (S[F(s_0)]/M[F(s_0)])u$, откуда сразу следует представление типа (9). Условие (12) можно использовать для экспериментального обоснования второй гипотезы, т.е. обоснования представления (9). Следует отметить, что экспериментальная проверка гипотезы (9) в пределах первых двух стадий ползучести (т.е. для функций $\bar{a}_k(s_0)$, $\bar{b}_k(s_0)$, $\bar{c}(s_0)$) была выполнена в [14, 25], где был сделан вывод о ее приемлемости. Однако проблема обоснования (9) для ползучести с учетом трех стадий, деформации пластичности и разрушения и в настоящее время остается открытой.

С точки зрения механики деформируемого твердого тела представление (9) означает, что варьируя случайные величины A_k, B_k, C, L_1, L_A можно получить на основании (4) – (8) хорошее аналитическое приближение к любой реализации (кривой ползучести) от момента $t=0$ вплоть до разрушения как при $s_0 = \text{const}$, так и при переменных режимах нагружения s_0 .

В настоящей работе экспериментальная проверка представления (9) и условия (12) была выполнена на основании экспериментальных данных по ползучести для стали 12X18M10T при $T = 850^\circ\text{C}$ [25, 26] и для сплава ЭИ698 при $T = 750^\circ\text{C}$. Методика идентификации параметров соотношений (4) – (8) состоит в следующем. На первом этапе на основании осредненных экспериментальных данных строится соответствующая детерминированная модель, значения параметров которой вычислены в [22] и приведены в табл. 1 и 2. Как следует из данных этих таблиц первая стадия ползучести для стали 12X18M10T отсутствует ($a_k = b_k = 0$), поэтому для соответствующей стохастической модели имеем три случайные величины: C, L_1, L_A . Для сплава ЭИ698 имеется первая стадия, но при этом величины a_k и b_k удовлетворяют условию: $a_u = a_k/(a_k + b_k) = \text{const}$ и a_u не зависит от напряжения s_0 . Поэтому $a_k = a_u c_k$, $b_k = (1 - a_u) c_k$, где $c_k = a_k + b_k$. В связи с этим для случайных величин A_k и B_k этого сплава вводится упрощающая гипотеза: $A_k = a_u C_k$, $B_k = (1 - a_u) C_k$, где $C_k = A_k + B_k$ - случайная величина, а a_u - детерминированная величина (коэффициент обратимости деформации неустановившегося течения). Таким образом, случайными величинами для сплава ЭИ698 являются C_k, C, L_1 и L_A .

Т а б л и ц а 1

Значение параметров модели для описания деформации пластичности

	$T, ^\circ\text{C}$	$s_{np}, \text{МПа}$	$E \cdot 10^5, \text{МПа}$	$a, \text{МПа}^{-n}$	n	$g_1, \text{МПа}^{-1}$	$A_p^p, \text{МДж/м}^3$	m_2
ЭИ698	750	480.7	1.47	$4.27 \cdot 10^{-8}$	2.145	$7.06 \cdot 10^{-3}$	201.2	0
12X18H10T	850	44.1	0.775	$7.48 \cdot 10^{-7}$	3.46	$1.19 \cdot 10^{-5}$	36.44	1.48

Т а б л и ц а 2

Значение параметров модели для описания деформации ползучести

	$T, ^\circ\text{C}$	$s_*, \text{МПа}$	k	$I_k, \text{ч}^{-1}$	a_k	b_k	c	n_1	m	$a_1, \text{МПа}^{-1-m_1}$	m_1	$a_*, \text{МПа}^{-1-m_*}$	m_a
ЭИ698	750	490.5	1	0.2	$5.2 \cdot 10^{-4}$	$7.8 \cdot 10^{-4}$	$3.98 \cdot 10^{-4}$	3.45	10.96	$3.81 \cdot 10^5$	-2.59	12.6	0
12X18H10T	850	9.81	-	-	-	-	$9.91 \cdot 10^{-6}$	-	3.2	42.28	-1.5	7.52	0

Определение оценок случайных величин C_k и C осуществляется по экспериментальным данным, соответствующим первой и второй стадиям. Для этого необходимо иметь серию кривых ползучести при различных $S_0 = const$ ($S_0 < S_{np}$). Тогда на начальных участках кривых ползучести $w \approx 0$, $S = S_0$ и решение (4) – (8) дает следующую зависимость для $p(t)$:

$$p(t) = \sum_{k=1}^s c_k \left(\frac{S}{S_*} \right)^n (1 - e^{-I_k t}) + C \left(\frac{S_0}{S_*} \right)^m t, \quad (13)$$

Используя далее, например, метод наименьших квадратов для каждой реализации, вычисляются значения C_k и C .

Для нахождения величин L_1 и L_A используется вся кривая ползучести вплоть до разрушения для каждой реализации. При этом величина L_1 варьируется и осуществляется численный расчет по модели (4) – (7) таким образом, чтобы расчетная кривая прошла через точку разрушения (p^*, t^*) , где p^* и t^* – деформация и время в момент разрушения соответственно. После определения L_1 на основании критерия разрушения (8) определяется

$$A_*^C(S_0) = \int_0^{t^*} S dp / \left(1 - \int_0^{t^*} \frac{S de^p}{A_*^p} \right)$$

и из второй формулы (7) –

$$L_A = \frac{A_*^C(S_0)}{S_0^{m_A}}.$$

Используя разработанную методику на основании экспериментальных данных [25, 26] (двадцать одна реализация) были получены статистические выборки случайных величин C , L_1 , L_A для стали 12X18H10T при $T = 850^\circ C$ и случайных величин C_k , C , L_1 , L_A для сплава ЭИ698 при $T = 750^\circ C$ (восемь реализаций), их математические ожидания $M[\bullet]$, дисперсии $S[\bullet]$ и отношения $S[\bullet]/M[\bullet]$, которые приведены в табл. 3 и 4. Как следует из данных, приведенных в таблицах 3 и 4, в первом приближении справедливость гипотезы (12) можно считать обоснованной.

Р и с. 2. Гистограммы (1) и функции распределения (2) для случайных величин C (а), L_1 (б), L_A (в)

На основании статистической выборки были построены гистограммы распределения случайных величин C , L_1 , L_A для стали 12X18H10T, которые представлены на рис. 2. Анализ представленных гистограмм позволяет принять гипотезу нормального распределения для величин C , L_A и равномерного распределения для L_1 . Для сплава ЭИ698 при $T = 750^\circ C$ в силу малого объема экспериментальной выборки такой анализ сделать затруднительно. Поэтому для данного сплава было положено, что случайные величины C_k , C , L_1 , L_A подчиняются нормальному закону распределения.

В качестве примера на рис. 3 приведены расчетные значения неупругой деформации для стали 12X18H10T по стохастической модели (4) – (8) для отдельных образцов со значениями случайных величин из таблицы 3. Данные, представленные на рис. 3 подтверждают правомер-

Т а б л и ц а 3

Значения случайных величин стохастических уравнений для стали 12X18H10T при T=850°C

№ п. п.	№ образца	S_0 , МПа	$C \cdot 10^5$, ч ⁻¹	L_A , МПа ^{1-m_a}	L_1 , МПа ^{1-m₁}	$\frac{S[\bar{c}(s_0)]}{M[\bar{c}(s_0)]}$	$\frac{S[\bar{a}(s_0)]}{M[\bar{a}(s_0)]}$	$\frac{S[\bar{A}_*^C(s_0)]}{M[\bar{A}_*^C(s_0)]}$
1	5	39,24	0,947	2,276	49,03	0,08	0,225	0,57
2	11		0,959	4,777	53,83			
3	16		0,947	9,91	45,12			
4	13		0,995	13,83	34,60			
5	30		0,995	5,592	26,92			
6	32		0,959	6,671	30,41			
7	24	45,09	1,333	4,905	41,21	0,151	0,103	0,245
8	22		1,1	5,82	49,09			
9	23		1,1	7,406	49,09			
10	27		1,1	5,905	43,36			
11	26		1,21	8,790	38,07			
12	29		0,986	8,04	40,3			
13	28	58,86	0,812	4,710	40,12	0,217	0,48	0,65
14	15		1,197	4,454	82,42			
15	31		0,873	2,953	24,49			
16	17		0,744	5,131	55,08			
17	7		0,744	3,217	31,30			
18	14		1,067	13,28	32,50			
19	21	78,48	0,744	6,376	39,56	0,59	0,74	0,13
20	39		1,417	3,63	26,82			
21	37		0,58	12,07	89,18			
	M[·]		$0,991 \cdot 10^{-5}$	6,837	43,9			
	S[·]		$0,204 \cdot 10^{-5}$	3,068	10,28			

Т а б л и ц а 4

Значения случайных величин стохастических уравнений для стали ЭИ698 при T=750°C

№ образца	S_0 , МПа	$C \cdot 10^4$, ч ⁻¹	$C_k \cdot 10^3$	$L_1 \cdot 10^{-5}$, МПа ^{1-m₁}	L_A , МПа ^{1-m_a}	$\frac{S[\bar{c}(s_0)]}{M[\bar{c}(s_0)]}$	$\frac{S[\bar{c}_k(s_0)]}{M[\bar{c}_k(s_0)]}$	$\frac{S[\bar{a}(s_0)]}{M[\bar{a}(s_0)]}$	$\frac{S[\bar{A}_*^C(s_0)]}{M[\bar{A}_*^C(s_0)]}$
70	520	3,52	0,245	3,088	5,61	0,031	0,354	0,386	0,054
83		3,37	0,409	5,405	5,2				
75	470,9	5,21	0,69	3,977	14,08	0,056	0,428	0,08	0,083
69		5,64	1,29	3,550	12,51				
67	421,8	2,01	1,178	2,60	11,56	0,51	0,130	0,257	0,075
76		4,28	1,413	3,754	12,85				
81	372,8	6,73	1,517	3,462	12,26	0,032	0,11	0,112	0,089
71		6,98	1,301	4,053	10,8				
	M[·]	$472 \cdot 10^{-4}$	$1,01 \cdot 10^{-3}$	$3,74 \cdot 10^5$	10,64				
	S[·]	$174 \cdot 10^{-4}$	$4,85 \cdot 10^{-4}$	$8,24 \cdot 10^4$	3,335				

Т а б л и ц а 5

Значение коэффициентов корреляции случайных величин

Материал	T, °C		C_k	C	L_1	L_A
ЭИ698	750	C_k	1	0,58	-0,21	0,74
		C		1	0,17	0,417
		L_1			1	-0,39
		L_A				1
12X18H10T	850	C		1	-0,003	0,0028
		L_1			1	-0,19
		L_A				1

ность структуры случайных функций в виде (9) для описания неупругой деформации при наличии трех стадий ползучести.

В табл. 5 приведены значения матрицы коэффициентов корреляции случайных величин C_k , C , L_1 и L_A для рассматриваемых материалов. Как видно, эти величины можно считать некоррелированными.

Таким образом, задача построения стохастической модели (4) – (8) и обоснования гипотез, заложенных в ее основе, решена полностью.

3 Статистическое моделирование при одноосном напряженном состоянии.

Хорошо известно, что для чисто феноменологического стохастического прогнозирования требуется большой объем соответствующих экспериментальных данных, получение которых в условиях длительного эксперимента крайне затруднительно и экономически нецелесообразно (длительность испытаний на ползучесть составляет от нескольких часов до сотен тысяч часов). Одним из подходов в механике деформируемого твердого тела, позволяющим восполнить недостающее количество экспериментальных данных, являются методы статистических испытаний. В настоящей работе для решения задачи прогнозирования неупругой деформации и разрушения на основании стохастической модели (4) – (8) используется классический метод статистических испытаний - метод Монте-Карло.

Достоверность вероятностного прогнозирования ползучести и времени до разрушения для стали 12X18H10T проверялась в область интерполяции при напряжениях $S_0 = \{39,21; 49,05; 58,86; 78; 45\}$ МПа. При реализации метода Монте-Карло для каждого уровня напряжений (каждой программы нагружения) моделировалось по 30 кривых ползучести с использованием стандартных программ генерации независимых случайных нормально распределенных и равномерно распределенных чисел. В качестве примера на рис. 4 и 5 приведены соответственно экспериментальные [25, 26] и смоделированные на основании уравнений (4) – (8) кривые ползучести стали 12X18H10T при $S_0 = 49,05$ МПа. Причем на рис. 5 выбраны произвольно подряд семь реализаций из 30 (с 23 по 29). Без предварительной информации трудно понять, на каком из рисунков представлены экспериментальные данные, а на каком – смоделированные.

Р и с. 3. Экспериментальные (значки) и расчетные (сплошные линии) кривые неупругой деформации стали 12X18H10T при $T = 750^\circ\text{C}$ и $S_0 = 58,86$ МПа

Р и с. 4. Экспериментальные кривые ползучести стали 12X18H10T при $T = 850^\circ\text{C}$ и $S_0 = 49,05$ МПа. (Цифры – номера образцов)

Р и с. 5. Смоделированные по методу статистических испытаний кривые ползучести стали 12X18H10T при $T = 850^\circ\text{C}$ и $S_0 = 49,05$ МПа. (Цифры – номера реализаций)

По результатам моделирования установлен нормальный закон распределения для времени достижения заданного значения неупругой деформации и времени до разрушения. В табл. 6 приведены средние расчетные значения (математическое ожидание) времени до разрушения

t_p , его доверительный интервал $[t_1, t_2]$ с вероятностью $b = 0,95$, а также массивы экспериментальных данных времени до разрушения t^* [25, 26]. Как следует из табл. 6, экспериментальные значения времени до разрушения попадают в область прогноза (за исключением трех реализаций при $S_0 = 58,86 \text{ МПа}$).

Экспериментальная проверка стохастических уравнений для стали 12Х18Н10Т выполнена в области интерполяции при указанных выше напряжениях. В качестве примера на рис. 4 штриховой линией приведены значения математического ожидания для неупругой деформации, штрих-пунктирной – его 99% доверительный интервал, прямоугольником – область разрушения материала (декартово произведение 99% интервалов времени разрушения и деформации в момент разрушения) для $S_0 = 49,05 \text{ МПа}$.

Аналогичные исследования были выполнены и для сплава ЭИ698 при $T = 750^\circ\text{C}$. Проверка адекватности модели для данного сплава была выполнена в области интерполяции для четырех уровней напряжения $S_0 = \{520; 470,9; 421,8; 372,8\} \text{ МПа}$, а также при переменных режимах нагружения. На рис. 6 и рис. 7 в качестве примера приведены соответствующие математические ожидания неупругой деформации (штриховые линии), границы ее 99% доверительного интервала (сплошные линии), области разрушения (прямоугольники). Экспериментальные данные представлены здесь значками.

Р и с. 6. Расчетные значения математического ожидания (пунктир) и его 99% доверительный интервал (сплошная линия) при статистическом моделировании неупругой деформации для сплава ЭИ698 при $T = 750^\circ\text{C}$: а) $S_0 = 372,78$; б) $S_0 = 421,8$; в) $S_0 = 470,9$; г) $S_0 = 520 \text{ МПа}$. Цифры – номера образцов. Значки – экспериментальные данные

Р и с. 7. Расчетные значения математического ожидания (пунктир) и его 99% доверительный интервал (сплошные линии) неупругой деформации образцов №24 (+) и №25 (.) из сплава ЭИ698 при $T = 750^{\circ}\text{C}$. Цифры – напряжение S_0 в МПа

Т а б л и ц а 6

Расчетные и экспериментальные значения времени до разрушения образцов из стали 12X18H10T при $T=850^{\circ}\text{C}$

S_0 , МПа	N , шт.	t_p , час	t_1 , час	t_2 , час	t^* , час
39,21	6	54,1	34,7	61,8	68; 67; 66; 47; 40; 35
49,05	7	25,5	17,3	33,7	30; 28; 24; 22,5; 21,5; 20,5; 18
58,86	6	15,0	11,8	18,2	20,5; 20; 16; 15; 14; 6,7
78,45	2	5,75	7,2	7,2	6; 6

Таким образом, теоретические и экспериментальные исследования свидетельствуют о целесообразности применения предложенной модели неупругого деформирования и разрушения материалов в расчетной практике на основе метода статистических испытаний не только для вероятностного прогнозирования неупругой деформации в процессе ползучести, но и для оценки времени до разрушения и неупругой деформации в момент разрушения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кузнецов А.А., Алифанов О.Н., Ветров В.И. и др. Вероятностные характеристики прочности авиационных материалов и размеров сортамента. М.: Машиностроение, 1970. 568 с.
2. Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение. 1984. 312 с.
3. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970. 139с.
4. Самарин Ю.П. О применении стохастических уравнений в теории ползучести материалов // Изв. АН СССР. МТТ, 1974. № 1. С. 88-94.
5. Биргер И.А., Шорр Б.Ф. и др. Термопрочность деталей машин. М.: Машиностроение, 1975. 456 с.
6. Бадаев А.Н. К вопросу об определении функции распределения параметров уравнения состояния ползучести // Проблемы прочности. 1984. №12. С. 22-26.
7. Локощенко А.М., Шестериков С.А. Методика описания ползучести и длительной прочности при чистом растяжении // Журнал прикл. механика и технич. физика. 1980. №3. С. 155-159.
8. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташикинов А.А., Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. М.: Наука. 1997. 228с.
9. Сараев Л.А. Моделирование макроскопических пластических свойств многокомпонентных композиционных материалов. Самара: Изд-во Самарского госуниверситета. 2000. 182с.
10. Самарин Ю.П. Стохастические механические характеристики и надежность конструкций с реологическими свойствами // Ползучесть и длительная прочность конструкций. Сб. научн. трудов. Куйбышев: КнТИ, 1986. С.8-17.
11. Асатуров А.А., Комарова В.А., Рыбалко Ф.П., Волков С.Д. О моментных функциях пластических микродеформаций // ФММ, 1964. Т.17. Вып.5. С.13-19.

12. Борисов С.П., Борщев Н.И., Степанов М.Н., Хазанов И.И. Неустановившаяся ползучесть и релаксация сплава АК4-1 в вероятностном аспекте // Проблемы прочности. 1975. №1. С. 22-26.
13. Одинг И.А., Иванова В.С., Бурдукский В.В., Геминев В.Н., Теория ползучести и длительной прочности металлов. М.: Металлургия. 1959. 488 с.
14. Самарин Ю.П. О применении стохастических уравнений в теории ползучести материалов // Изв. АН СССР. МТТ, 1974. №1. С. 88-94.
15. Бадаев А.Н. и др. О статистическом моделировании характеристик ползучести конструкционных материалов // Проблемы прочности. 1982. №5. С. 16-20.
16. Бадаев А.Н. К вопросу об определении функции распределения параметров уравнения состояния ползучести // Проблемы прочности. 1984. №12. С. 22-26
17. Ковпак В.И., Бадаев А.Н. Унифицированный подход к прогнозированию ползучести. Вопросы жаропрочных материалов в статистическом аспекте // Унифицированные методы определения ползучести и длительной прочности. М.: Изд-во стандартов. 1986. С. 51-62.
18. Радченко В.П. Прогнозирование ползучести и длительной прочности материалов на основе энергетического подхода в стохастической постановке // Проблемы прочности, 1992. №2. С. 34-40.
19. Кадашев Ю.И., Мосолов А.Б. Эндохронные теории пластичности: основные положения, перспективы развития. // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1989. №1. С.161-168.
20. Мосолов А.Б. Эндохронная теории пластичности / АН СССР. Ин-т пробл. механики. –Препр. М., 1988.–44 с.
21. Радченко В.П. Энергетический вариант одноосной теории ползучести и длительной прочности // Журнал прикл. механика и технич. физика, 1991. №4. С. 172-179.
22. Радченко В.П. Математическая модель неупругого деформирования и разрушения металлов при ползучести энергетического типа // Вестник СамГТУ, вып. 4. Серия: физико-математические науки. Самара: СамГТУ. 1996. С. 43-63.
23. Радченко В.П., Симонов А.В. Разработка автоматизированной системы построения моделей неупругого деформирования металлов на основе методов непараметрического выравнивания экспериментальных данных. // Вестник СамГТУ, выпуск 7. Серия: физико-математические науки. Самара: СамГТУ. 1999. С.51-63.
24. Венцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576с.
25. Локощенко А.М., Мякотин С.А., Шестериков С.А. Ползучесть и длительная прочность стал 12Х18Н10Т в условиях сплошного напряженного состояния // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1979. №4. С. 87-94.
26. Локощенко А.М., Шестериков С.А. Методика описания ползучести и длительной прочности при чистом растяжении // Прикл. механика и техн. физика. 1980. №3. С. 155-159.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 01-01-00528.