Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Бейбалаев, Численный метод решения задачи переноса с двусторонней производной дробного порядка, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 1(), 267–270

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu643>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:08:03

Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.98

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА С ДВУСТОРОННЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

В. Д. Бейбалаев

Дагестанский государственный университет,
367025, Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а.

E-mail: kaspjij_03@mail.ru

Рассматривается численный метод решения задачи теплопереноса с двусторонней производной дробного порядка по пространственной переменной и с производной дробного порядка по времени. Построена конечно-разностная схема и доказана устойчивость этой разностной схемы.

Ключевые слова: численный метод, аппроксимация, фрактал, фрактальная среда, дифференциальное уравнение, устойчивость.

Введение. За последнее время можно считать установленным, что математический аппарат интегро-дифференцирования дробного порядка является адекватным выражением фундаментальных физических концепций, лежащих в основе физики фракталов. В рамках математического аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка удаётся не только более глубоко понять известные, но и получить принципиально новые результаты.

Рассмотрим задачу переноса с двусторонней производной дробного порядка в средах с фрактальной структурой.

ЗАДАЧА. Найти решение $u(x, t) \in L_p(L, R)$ ($1 \leq p \leq \infty$) уравнения

$$D_{0t}^{\alpha} u(x, t) = P_+(x, t) D_{L+}^{\beta} u(x, t) + P_-(x, t) D_{R-}^{\beta} u(x, t) + f(x, t), \quad (1)$$

где $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq \beta \leq 2$, $P_+(x, t) \geq 0$, $P_-(x, t) \geq 0$, $L < x < R$, $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

и граничным условиям

$$u(L, t) = \mu_1(t) \quad \text{и} \quad u(R, t) = \mu_2(t)$$

в области $D = \{(x, t) : L \leq x \leq R, 0 \leq t \leq T\}$.

Бейбалаев Ветлугин Джабраилович — старший преподаватель кафедры прикладной математики.

Здесь функции $P_+(x, t)$ и $P_-(x, t)$ такие, что в случае $\beta = 2$: $P(x, t) = P_+(x, t) + P_-(x, t)$, а в случае $\beta = 1$: $P(x, t) = P_+(x, t) - P_-(x, t)$. Двусторонние производные, в случае когда $n - 1 < \beta \leq n$, имеют вид [1]:

$$(D_{L+}^\beta f)(x) = \frac{d^\beta f(x)}{d_+ x^\beta} = \frac{1}{\Gamma(n - \beta)} \frac{d^n}{dx^n} \int_L^x \frac{f(\xi)}{(x - \xi)^{\beta+1-n}} d\xi$$

$$(D_{R-}^\beta f)(x) = \frac{d^\beta f(x)}{d_- x^\beta} = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \beta)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^R \frac{f(\xi)}{(\xi - x)^{\beta+1-n}} d\xi.$$

Несмотря на долгую историю развития математического аппарата дробного дифференцирования [1, 2], аналитические методы решения уравнений дробной диффузии оказываются малоэффективными, а теория численных методов их решения носит фрагментарный характер и далека от завершения [3]. Разработке численных методов решения краевых задач для уравнения переноса с производной дробного порядка посвящены работы [3–8]. В работе [3] рассматривается краевая задача для уравнения переноса с двусторонней производной дробного порядка по пространственной переменной. Особенность систем с фрактальной структурой в том, что для них существенны такие эффекты, как память, сложная природа пространственных корреляций и эффекты самоорганизации. В качестве математической модели процессов стохастического блуждания консервативных частиц в сильно неоднородной трещиноватой среде необходимо рассматривать линейные эволюционные уравнения с дробным производным как по пространственной, так и по временной переменным.

Численный метод решения задачи переноса с двусторонней производной дробного порядка. Точных методов решения задачи (1) не существуют. Для нахождения решения задачи (1) применим конечно-разностный метод. Построим разностную схему. В области D введём сетку

$$\varpi_{h\tau} = \left\{ (x_i, t_n) : x_i = L + ih, i = 0, 1, \dots, K; \right. \\ \left. t_n = n\tau, h = \frac{R - L}{K}, \tau = \frac{T}{N}, n = 0, 1, 2, \dots, N \right\}$$

с шагом h по x и τ по t .

Используя определение Грюнвальда—Летникова дробной производной по пространству [1]:

$$D_{L+}^\beta u(x, t) = \lim_{M_+ \rightarrow \infty} \frac{1}{h^\beta} \sum_{k=0}^{M_+} q_k u(x - kh, t),$$

$$D_{R-}^\beta u(x, t) = \lim_{M_- \rightarrow \infty} \frac{1}{h^\beta} \sum_{k=0}^{M_-} q_k u(x + kh, t),$$

где $q_0 = 1$, а $q_k = (-1)^k \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-k+1)}{k!}$ ($k \in \mathbb{N}$) и формулу Римана—Лиувилля для дробной производной по времени [1] на отрезке $[t_n, t_{n+1}]$:

$$D_{0t}^\alpha u(x, t_n) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \left[\frac{u(x, t_n)}{(t_{n+1} - t_n)^\alpha} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{u'(x, \tau) d\tau}{(t_{n+1} - \tau)^\alpha} \right],$$

получим следующую неявную разностную схему для задачи (1):

$$\frac{u_i^{n+1} - \alpha u_i^n}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)\tau^\alpha} = \frac{1}{h^\beta} \left[\sum_{k=0}^{i+1} q_k P(+)_i^{n+1} u_{i-k+1}^{n+1} + \sum_{k=0}^{K-i+1} q_k P(-)_i^{n+1} u_{i-k-1}^{n+1} \right] + f_i^{n+1}, \quad (2)$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad u_0^n = \mu_1(t_n), \quad u_K^n = \mu_2(t_n),$$

где $P(-)_i^{n+1} = P_-(x_i, t_{n+1})$, $P(+)_i^{n+1} = P_+(x_i, t_{n+1})$.

ТЕОРЕМА. Разностная схема (2) безусловно устойчива для всех $0 < \alpha \leq 1$ и $1 < \beta \leq 2$.

Доказательство. После элементарных преобразований (2) примет вид:

$$\frac{1}{\alpha} u_i^{n+1} - \frac{1}{\alpha} \xi_i^+ \sum_{k=0}^{i+1} q_k u_{i-k+1}^- - \frac{1}{\alpha} \xi_i^- \sum_{k=0}^{K-i+1} q_k u_{i+k-1}^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{\alpha} \gamma \tau^\alpha f_i^{n+1},$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad u_0^n = \mu_1(t_n), \quad u_K^n = \mu_2(t_n),$$

при этом $\gamma = \Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)$, $\xi_i^+ = \frac{P(+)_i^{n+1} \gamma \tau^\alpha}{h^\beta}$, $\xi_i^- = \frac{P(-)_i^{n+1} \gamma \tau^\alpha}{h^\beta}$.

Система уравнений в матричной форме запишется так:

$$AU^{n+1} = U^n + \frac{1}{\alpha} \tau f^{n+1},$$

где $U^n = [u_0^n, u_1^n, \dots, u_K^n]^T$, $f^n = [0, f_1^n, f_2^n, \dots, f_{K-1}^n, 0]^T$.

Матрица коэффициентов A имеет вид:

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}(1 - (\xi_i^+ + \xi_i^-)q_1), & \text{если } j = i; \\ -\frac{1}{\alpha}(\xi_i^+ q_2 + \xi_i^- q_0), & \text{если } j = i - 1; \\ -\frac{1}{\alpha}(\xi_i^+ q_0 + \xi_i^- q_2), & \text{если } j = i + 1; \\ -\frac{1}{\alpha}\xi_i^+ q_{i-j+1}, & \text{если } j < i - 1; \\ -\frac{1}{\alpha}\xi_i^- q_{j-i+1}, & \text{если } j > i + 1. \end{cases}$$

Здесь $a_{00} = 1$; $a_{0j} = 0$, если $j = 1, 2, \dots, K$; $a_{KN} = 1$ и $a_{Kj} = 0$, если $j = 0, 1, \dots, K - 1$.

Согласно теореме [4] собственные значения матрицы A находятся в соединении K кругов с центрами в a_{ii} и с радиусами r_i :

$$r_i = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0, k \neq i}^{i+1} \xi_i^+ q_k + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0, k \neq i}^{K-i+1} \xi_i^- q_k \leq \frac{1}{\alpha} (\xi_i^+ + \xi_i^-) \beta, \quad (3)$$

$$a_{ii} = \frac{1}{\alpha} [1 - (\xi_i^+ + \xi_i^-) q_1] = \frac{1}{\alpha} [1 + (\xi_i^+ + \xi_i^-) \beta] \geq 1. \quad (4)$$

Из неравенств (3) и (4) следует, что собственные значения матрицы A больше либо равны единице. Тогда собственные значения матрицы A^{-1} положительны и меньше либо равны единице. Следовательно, разностная схема (2) безусловно устойчива. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по образованию (проект РНП. 2.1.1/2669)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Мн.: Наука и техника, 1987. — 688 с.
2. Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их применение. — Нальчик: КБНЦ РАН, 2000. — 299 с.
3. Головизнин В. М., Киселев В. П., Короткин И. А., Юрко Ю. И. Прямые задачи неклассического переноса радионуклидов в геологических формациях // *Извест. РАН. Энергетика*, 2004. — № 4. — С. 121–130.
4. Isaacson E., Keller H. B. Analysis of Numerical Methods. — New York – London – Sydney: Wiley & Sons, Inc., 1966. — 541 p.
5. Бейбалаев В. Д. Численный метод решения математической модели теплопереноса в средах с фрактальной структурой // *Фундаментальные исследования*, 2007. — № 12. — С. 249–251.
6. Tadjeran Charles, Meerschaert Mark M., Scheffler Hana–Peter A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation // *J. Computat. Phys.*, 2006. — Vol. 213, No. 1. — P. 205–213.
7. Liu Q., Liu F., Turner I., Anh V. Approximation of the Levy–Feller advection-dispersion process by random walk and finite difference method // *J. Computat. Phys.*, 2007. — Vol. 222, No. 1. — P. 57–70.
8. Головизнин В. М., Киселев В. П., Короткин И. А. Численные методы решения уравнения дробной диффузии в одномерном случае. — М.: ИБРАЭ РАН, 2002. — 35 с. — Препринт № IBRAE–2002–10.

Поступила в редакцию 16/X/2008;
в окончательном варианте — 09/II/2009.

MSC: 65N12

NUMERICAL METHOD OF SOLUTION OF THE PROBLEM ON TRANSPPOSITION OF TWO-SIDED DERIVATIVE OF THE FRACTIONAL ORDER

V. D. Beybalaev

Daghestan State University,
43a, M. Gadzhiyev st., Makhachkala, 367025.

E-mail: kaspij_03@mail.ru

Numerical method of the solution of the problem of heat transposition with two-sided derivative of the fractional order along the space variable and with the fractional order derivative in time is studied. Finite-different scheme was constructed and the stability of this different scheme was proven.

Key words: *numerical methods, approximation, fractal, fractal structure, differential equations, stability.*

Original article submitted 16/X/2008;
revision submitted 09/II/2009.

Beybalaev Vetlugin Dzhabrailovich, Senior Lecturer, Dept. of Applied Mathematics.