Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Дмитриев, Нелокальная задача с нелинейным интегральным условием для гиперболического уравнения, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 1(), 26–32

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu644>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 17:52:09

УДК 517.956.3

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С НЕЛИНЕЙНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В. Б. Дмитриев

Самарский муниципальный институт управления,
443084, Самара, ул. Стара-Загора, 96.

E-mail: dmitriev_v.b@mail.ru

Рассматривается задача для гиперболического уравнения с нелинейным интегральным условием вместо стандартного граничного. Задача рассмотрена в пространстве произвольной размерности. Доказаны существование и единственность решения.

Ключевые слова: нелокальная задача, нелинейные условия, гиперболическое уравнение, априорная оценка, обобщенное решение.

Введение. Математическое моделирование ряда процессов, изучаемых в физике, химии и биологии, нередко приводит к постановке нелокальных задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Ранее краевые задачи для гиперболических уравнений на плоскости с интегральными условиями были исследованы Л. С. Пулькиной в работах [1, 2], Д. Г. Гордзиани и Г. А. Авалишвили в работе [3], А. И. Кожановым и Л. С. Пулькиной в работе [4]. Исследования нелокальных задач с интегральными условиями показали, что стандартные методы для их изучения часто оказываются неприемлемыми без соответствующих модификаций.

В настоящей работе доказана однозначная обобщённая разрешимость задачи с нелокальным условием, содержащим значение производной от искомого решения на границе. Однако как интегральное условие, так и правая часть нелинейны по u — в отличие от работы [5].

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) u_{x_j} \right) + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) u_{x_i} + b(x, t) u_t = f(x, t, u) \quad (1)$$

в цилиндре $Q_T = \{(x, \tau) : x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, 0 < \tau < T\}$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, и поставим для него задачу с начальными условиями Коши:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (2)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (3)$$

и нелокальным условием

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \Big|_{S_T} = \int_0^t \int_{\Omega} K(x, y, \tau, u(y, \tau)) dy d\tau, \quad x \in \partial\Omega, \quad (4)$$

Дмитриев Виктор Борисович — доцент кафедры математических методов и информационных технологий; к.ф.-м.н.

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $K(x, y, \tau, u(y, \tau))$ — некоторые заданные функции, а $S_T = \{(x, t) : x \in \partial\Omega, 0 < t < T\}$ — боковая поверхность цилиндра Q_T . Здесь

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \nu \xi^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \leq \mu \xi^2, \quad \nu > 0.$$

Стандартным образом получим следующее тождество:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \left(-u_t v_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) u_{x_j} v_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) u_{x_i} v + b(x, t) u_t v + \right. \\ \left. + a(x, t) uv \right) dx dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} v(x, t) \int_0^t \int_{\Omega} K(x, y, \tau, u(y, \tau)) dy d\tau ds dt = \\ = \int_0^T \int_{\Omega} f(x, t, u) v(x, t) dx dt + \int_{\Omega} \psi(x) v(x, 0) dx. \quad (5) \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовём *обобщённым решением* из $W_2^1(Q_T)$ задачи (1)–(4) функцию $u(x, t) \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую условию (2) и тождеству (5) для любой функции $v \in W_2^1(Q_T)$ такой, что $v(x, T) = 0$.

Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены следующие условия:

$$|f(x, t, u_1) - f(x, t, u_2)| \leq H(x, t) |u_1 - u_2|, \quad |f(x, t, 0)| \leq B(y, t) \quad \forall x \in \Omega;$$

$$|K(x, y, \tau, u_1) - K(x, y, \tau, u_2)| \leq R(y, \tau) |u_1 - u_2|,$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} R^2(y, t) dy dt = R_1 < \infty, \quad |K(x, y, t, 0)| \leq F(y, t) \quad \forall x \in \Omega;$$

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} F(y, \tau) dy \right)^2 d\tau = M_3 < \infty;$$

$$B(x, t) \in L_{2,1}(Q_T), \quad \varphi(x) \in W_2^1(\Omega), \quad \psi(x) \in L_2(\Omega);$$

$$\max_{Q_T} \left(\left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right|, \left| \frac{\partial b}{\partial t} \right|, |a_i|, |b| \right) \leq \mu_1, \quad \int_0^T \sup_{x \in \Omega} H(x, t) dt = G < \infty.$$

Тогда задача (1)–(4) имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(Q_T)$.

Далее в статье получена априорная оценка, доказывается единственность решения, затем при помощи априорной оценки устанавливается существование решения.

2. Априорная оценка и доказательство теоремы. Рассмотрим уравнение

$$Lw = f(x, t, w). \quad (6)$$

Пусть $w(x, t) \in W_2^2(Q_T)$ — решение этого уравнения, удовлетворяющее нелокальному условию

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial w}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \Big|_{S_T} = \int_0^t \int_{\Omega} K(x, y, \tau, w(y, \tau)) dy d\tau. \quad (7)$$

Введём обозначения:

$$z(t) \equiv \int_{\Omega} \left(w^2 + w_t^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} w_{x_i} w_{x_j} \right) dx,$$

$2c|\Omega|M_3 + \sup_{0 \leq \xi \leq t} z(\xi) = z_1(t)$, $\lambda(t) = \sup_{x \in \Omega} H(x, t)$, где c — некоторая константа.

В итоге приходим к оценке, верной для любого $t \in [0, T]$:

$$z_1^{\frac{1}{2}}(t) \leq p(t) z_1^{\frac{1}{2}}(0) + q(t) \|B\|_{2,1,Q_t} + r(t), \quad (8)$$

где $p(t)$, $q(t)$ и $r(t)$ определяются постоянными c , M_3 , G , R_1 и величиной t . Это энергетическое неравенство, позволяющее оценить энергетическую норму решения $w(x, t)$ через начальные данные Коши и $f(x, t, w)$, доказывается так же, как и априорная оценка в работе [5], но с рядом усложнений — задача более общая, и вывод нужных неравенств более тонок. Так, для наших целей нужно оценить интеграл вида $\int_{t_1}^{t_1+t} \lambda(t) dt$ (где $t_1 + t \leq T$) для произ-

вольного t_1 . Из условия $\int_0^T \lambda(t) dt < \infty$, и в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега имеем $\int_{t_1}^{t_1+t} \lambda(t) dt < \varepsilon$, как только мера Лебега множества $E = [t_1, t_1 + t]$ достаточно мала: $\mu(E) = t < \delta$.

Доказательство единственности решения. Пусть задача (1)–(4) имеет два обобщённых решения u_1 и u_2 из $W_2^1(Q_T)$. Тогда их разность $u = u_1 - u_2 \in W_2^1(Q_T)$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \left(-u_t v_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) u_{x_j} v_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) u_{x_i} v + b(x, t) u_t v \right) dx dt - \\ & - \int_0^T \int_{\partial\Omega} v(x, t) \int_0^t \int_{\Omega} \left\{ K(x, y, \tau, u_1(y, \tau)) - K(x, y, \tau, u_2(y, \tau)) \right\} dy d\tau ds dt - \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} (f(x, t, u_1) - f(x, t, u_2)) v dx dt = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

и при $t = 0$ обращается в нуль. Возьмём в этом равенстве

$$v(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{при } p \leq t \leq T, \\ \int_p^t u(x, \tau) d\tau, & \text{при } 0 \leq t \leq p. \end{cases} \quad (10)$$

Подставим v из (10) в (9) и выразим u , u_t и u_{x_i} через v и их производные. После преобразований, учитывая условия $v_t|_{t=0} = u|_{t=0} = 0$, $v_{x_i}|_{t=p} = 0$ и условия теоремы, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[v_t^2(x, p) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) v_{x_j} v_{x_i} \Big|_{t=0} \right] dx \leq c_1 \int_{Q_p} (v^2 + |\nabla v|^2) dx + c_1 p \int_{Q_p} v_t^2 dx dt + \\ + 2 \left| \int_0^p \int_{\Omega} (f(x, t, u_1) - f(x, t, u_2)) v dx dt \right|. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь c_1 зависит только от M и μ_1 .

Введём функции $g_i(x, t) = \int_t^0 u_{x_i}(x, \tau) d\tau$. Преобразуя (11) и воспользовавшись произволом в выборе p , получаем:

$$\int_{\Omega} \left(u^2(x, p) + \sum_{i=1}^n g_i^2(x, p) \right) dx \leq \frac{2c_2(p)}{\min(1, \nu)} \int_0^p \int_{\Omega} \left(u^2(x, \tau) + \sum_{i=1}^n g_i^2(x, \tau) \right) dx d\tau.$$

Здесь $c_2(p) = c_1(2 + p + p^2) + G\sqrt{p}$. Это в силу неравенства Гронуолла [6, с. 23], где $g(t) = 0$, означает, что $\int_{\Omega} \left(u^2(x, p) + \sum_{i=1}^n g_i^2(x, p) \right) dx = 0$, и тогда $u(x, p) = 0$ и $g_i(x, p) = 0$ при $p \in [0, \gamma]$, где $\gamma = \min(\nu/(4c_1), 1/(4G^2))$. Повторяем рассуждение для $t \in [\gamma, 2\gamma]$, и так в конечное число шагов докажем обращение $u(x, t)$ в нуль для всех $t \in [0, T]$. Единственность доказана. $\square$

Доказательство существования решения. Воспользуемся методом Галёркина. Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ есть фундаментальная система в $W_2^1(\Omega)$, ортонормированная в $L_2(\Omega)$, и пусть

$$u^N = \sum_{k=1}^N c_k^N(t) \varphi_k(x) \quad (12)$$

— приближённое решение, которое ищется из соотношений

$$\begin{aligned} (u_{tt}^N, \varphi_l) + \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) u_{x_j}^N(x, t) \varphi_{l x_i}(x) + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) u_{x_i}^N(x, t) \varphi_l(x) + \right. \\ \left. + b(x, t) u_t^N(x, t) \varphi_l(x) \right] dx - \int_{\partial\Omega} \varphi_l \int_0^t \int_{\Omega} K(x, y, \tau, u^N(y, \tau)) dy d\tau ds - \\ - (f(x, t, u^N(x, t)), \varphi_l) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (13)$$

$$c_k^N(0) = \alpha_k^N, \quad \frac{d}{dt} c_k^N(t) \Big|_{t=0} = (\psi, \varphi_k). \quad (14)$$

Здесь α_k^N — коэффициенты сумм $\varphi^N(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k^N \varphi_k(x)$, аппроксимирующих при $N \rightarrow \infty$ функцию $\varphi(x)$ в норме $W_2^1(\Omega)$.

Подставим (12) в (13) и после несложных преобразований и смены порядка суммирования получим

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} c_l^N(t) + \sum_{k=1}^N c_k^N(t) \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \varphi_{kx_j}(x) \varphi_{lx_i}(x) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{kx_i}(x) \varphi_l(x) + \right. \\ & \left. + b \varphi_{kt}(x) \varphi_l(x) \right) dx - \int_{\partial\Omega} \varphi_l(x) \int_0^t \int_{\Omega} K \left(x, y, \tau, \sum_{k=1}^N c_k^N(\tau) \varphi_k(y) \right) dy d\tau ds - \\ & - \left(f \left(x, t, \sum_{k=1}^N c_k^N(t) \varphi_k(x) \right), \varphi_l \right) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (15) \end{aligned}$$

В силу условий теоремы коэффициенты системы (15) ограничены, а последнее слагаемое левой части (15) — ограниченная функция переменных $c_l^N(t)$.

Таким образом, система (15) — система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по t для неизвестных $c_k^N(t)$, $k = 1, 2, \dots, N$, разрешенная относительно старших производных. Далее, $f \in L_{2,1}(Q_T)$, $\varphi \in W_2^1(\Omega)$ и $\psi \in L_2(\Omega)$. Следовательно, система (15) для любого N однозначно разрешима при начальных условиях (14) [7, с. 27].

Мы построили последовательность $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$. Для неё верна оценка (8). Из этой последовательности можно выделить подпоследовательность (за которой сохраним то же обозначение), которая будет сходиться равномерно по $t \in [0, T]$ в норме $L_2(\Omega)$ слабо к элементу $u \in L_2(\Omega)$ при всех $t \in [0, T]$, при этом $u \in W_2^1(Q_T)$ [8, с. 214].

Более того, полученная последовательность будет сходиться равномерно по $t \in [0, T]$ в норме $L_2(\Omega)$ к элементу $u \in L_2(\Omega)$ для любого $t \in [0, T]$ сильно. Чтобы доказать это, применяется лемма [9, с. 529] для случая $m = 2$. Более подробные выкладки приведены в [10].

Покажем, что $u(x, t)$ есть обобщённое решение задачи (1)–(4). Начальное условие будет выполнено в силу отмеченной сходимости $u^N(x, t)$ к $u(x, t)$ в $L_2(\Omega)$ и того, что $u^N(x, 0) \rightarrow \varphi(x)$ в $L_2(\Omega)$. Теперь умножим каждое из соотношений (13) на свою функцию $d_l(t) \in W_2^1(0, T)$, $d_l(T) = 0$, полученные равенства просуммируем по всем l от 1 до N и проинтегрируем по t от 0 до T . После этого в первом члене выполним интегрирование по частям, тогда имеем равенство

$$\int_{Q_T} \left(-u_t^N v_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_j}^N v_{x_i} + \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i}^N v + b u_t^N v + a u^N v dx \right) dx dt - \int_{\Omega} u_t^N v \Big|_{t=0} dx -$$

$$-\int_0^T \int_{\partial\Omega} v \int_0^t \int_{\Omega} K(x, y, \tau, u^N(y, \tau)) dy d\tau ds dt = \int_{Q_T} f(x, t, u^N) v dx dt, \quad (16)$$

справедливое для любой функции v вида $\sum_{l=1}^N d_l(t) \varphi_l(x)$. Совокупность таких v мы обозначим через $\mathfrak{M}_N$. Переходя в (16) к пределу по $\{u^N\}_{N=1}^\infty$ при фиксированном v из какого-либо $\mathfrak{M}_{N_i}$, получим равенство (5) для предельной функции u при любой функции $v \in \mathfrak{M}_{N_i}$. При этом сильная сходимость $\{u^N\}$ к u в $L_2(\Omega)$ нужна для того, чтобы $\int_0^T \int_{\Omega} f(x, t, u^N) v dx dt$ сходилась при $N \rightarrow \infty$ к $\int_0^T \int_{\Omega} f(x, t, u) v dx dt$ и чтобы $\int_{\partial\Omega} v \int_0^t \int_{\Omega} K(x, y, \tau, u^N(y, \tau)) dy d\tau ds$ сходилась к $\int_{\partial\Omega} v \int_0^t \int_{\Omega} K(x, y, \tau, u(y, \tau)) dy d\tau ds$.

Далее, $\mathfrak{M} = \bigcup_{N=1}^\infty \mathfrak{M}_N$ плотно в $\hat{W}_2^1(Q_T)$, а $u \in W_2^1(Q_T)$, следовательно, (5)

будет выполняться при любой функции $v \in \hat{W}_2^1(Q_T)$. Таким образом, доказано, что предельная функция $u(x, t)$ есть обобщенное решение из $W_2^1(Q_T)$ задачи (1)–(4). $\square$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пулькина Л. С. Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения // *Матем. заметки*, 2003. — Т. 74, № 3. — С. 435–445.
2. Пулькина Л. С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // *Дифференц. уравнения*, 2004. — Т. 40, № 7. — С. 887–892.
3. Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // *Математ. моделирование*, 2000. — Т. 12, № 1. — С. 94–103.
4. Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // *Докл. РАН*, 2005. — Т. 404, № 5. — С. 589–592.
5. Дмитриев В. Б. Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения // *Вестн. СамГУ. Естественнаучн. сер.*, 2006. — № 2(42). — С. 15–27.
6. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. — М.: Иностран. лит-ра, 1961. — 122 с.
7. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения: изд. 4-е. — М.: Наука, 1974. — 331 с.
8. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — 408 с.
9. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 736 с.
10. Дмитриев В. Б. Нелокальная задача с интегральным условием для уравнения гиперболического типа // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006. — № 42. — С. 35–40.

Поступила в редакцию 24/X/2008;
в окончательном варианте — 09/II/2009.

MSC: 35L70

NON-LOCAL PROBLEM WITH NON-LINEAR CONDITIONS FOR A HYPERBOLIC EQUATION

V. B. Dmitriev

Samara municipal management institute,
96, Stara-Zagora st., Samara, 443084.

E-mail: dmitriev_v.b@mail.ru

Non-local problem with non-linear integral condition for the hyperbolic equation with random size space variables is studied. Existence of the unique generalized solution is proved.

Key words: *nonlocal problem, nonlinear conditions, hyperbolic equation, estimation, generalised solution.*

Original article submitted 24/X/2008;
revision submitted 09/II/2009.

Dmitriev Victor Borisovich, Ph. D. (Phys. & Math.), Dept. of Mathematical Methods and Information Technologies.