Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Х. Рузиев, Краевая задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом в области, эллиптическая часть которой — полуполоса, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 1(), 33–40

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu645>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 11:36:07

УДК 517.956.6

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В ОБЛАСТИ, ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ КОТОРОЙ — ПОЛУПОЛОСА

*М. Х. Рузиев*Институт математики и информационных технологий АН РУз,
100125 Ташкент, ул. Дурмон йули, 29.

E-mail: mruziev@mail.ru

Исследована краевая задача в неограниченной области. Единственность решения задачи доказана с помощью принципа экстремума, а существование решения задачи установлена методами разделения переменных и интегральных уравнений.

Ключевые слова: полуполоса, уравнение смешанного типа, краевая задача, единственность, существование.

Пусть область D является суммой областей D^+ и D^- , первая из которых представляет собой эллиптическую полуполосу $0 \leq x \leq 1, y \geq 0$, а вторая — характеристический треугольник OBC , где OC и BC — две пересекающиеся в точке $C\left(\frac{1}{2}; -\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}\right)$ характеристики уравнения

$$\operatorname{sign} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \quad (1)$$

исходящие соответственно из точек $O(0, 0)$ и $B(1, 0)$. В (1) m и β_0 — некоторые действительные числа, удовлетворяющие условиям $m > 0, -\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$.

Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения (1) в случае $\beta_0 = 0$ в области, эллиптическая часть которой есть полуполоса, исследованы в работах [1–3].

Задача Т. Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

- 1) $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$ и удовлетворяет уравнению (1) в $D^+ \cup D^-$;
- 2) $\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0$ (2)

равномерно по $x \in [0, 1]$;

- 3) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad y \geq 0, \quad (3)$$

$$u|_{OC} = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad (4)$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{\beta_0} u_y = \lim_{y \rightarrow +0} y^{\beta_0} u_y, \quad x \in (0, 1), \quad (5)$$

причём эти пределы при $x = 0, x = 1$ могут иметь особенность порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\overline{D} = D \cup OC \cup BC \cup OO_\infty \cup BB_\infty$, $OO_\infty = \{(x, y) : x = 0, y > 0\}$,

Рузиев Менглибай Холтожибаевич — старший научный сотрудник; к.ф.-м.н.

$BB_\infty = \{(x, y) : x = 1, y > 0\}$; $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ и $\phi(x)$ — заданные функции, $\beta = \frac{m+2\beta_0}{2(m+2)}$.

Используя решение видоизмененной задачи Коши для уравнения (1) в D^- , согласно краевому условию (4), имеем

$$\nu(x) = \gamma D_{0x}^{1-2\beta} \tau(x) - \psi(x), \quad (6)$$

где

$$\psi(x) = \frac{2\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-2\beta)} \left(\frac{m+2}{4} \right)^{2\beta} x^\beta D_{0x}^{1-\beta} \phi\left(\frac{x}{2}\right), \quad \gamma = \frac{2\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta)} \left(\frac{m+2}{4} \right)^{2\beta},$$

D_{0x}^l — оператор дробного дифференцирования порядка l в смысле Римана—Лиувилля [4].

Равенство (6) есть основное функциональное соотношение между неизвестными функциями $\nu(x)$ и $\tau(x)$, принесённое на J гиперболической части D^- области D .

Имеет место следующая

ЛЕММА 1. Если функция $u(x, y)$ — решение уравнения (1) в области D^- такое, что $\tau(x) = u(x, 0)$ достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке $x = x_0$, $0 < x_0 < 1$, при этом $\phi(x) \equiv 0$, то $\nu_-(x_0) > 0$ ($\nu_-(x_0) < 0$).

Доказательство леммы 1 следует из формулы (6) и принципа экстремума для операторов дробного дифференцирования.

Пусть D_h и D_h^+ — конечные области, отсекаемые прямой $y = h > 0$ соответственно от D и D^+ ; $O_h(0, h)$, $B_h(1, h)$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Задача T не может иметь более одного решения.

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ — решение задачи T , удовлетворяющее однородным краевым условиям. Покажем, что $u(x, y) \equiv 0$ в D^+ .

Допустим, что это не так. Тогда найдётся такая область $\overline{D}_h^+$, в которой $u(x, y) \neq 0$.

Действительно, $\max_{\overline{D}_h^+} |u(x, y)| > 0$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\max_{\overline{D}_h^+} |u(x, y)| = \max_{\overline{D}_h^+} u(x, y) > 0.$$

Допустим, что $\max_{\overline{D}_h^+} u$ не достигается на $O_h B_h$. Поскольку $u(0, y) = u(1, y) = 0$ при $y \geq 0$, то он не должен достигаться на $\sigma = \overline{OO}_h \cup \overline{BB}_h$, и в силу хорошо известного свойства эллиптических уравнений он должен достигаться на отрезке $\overline{OB}$ в некоторой его внутренней точке $(x_0, 0)$. Но тогда, по лемме, приведённой в работе [5], должно быть $\nu_+(x_0) < 0$, что противоречит $\nu_-(x_0) > 0$ в силу леммы 1.

Следовательно, $\max_{\overline{D}_h^+} u$ должен достигаться на $O_h B_h$. Возьмём произвольное малое число $\varepsilon > 0$ и в силу (2) выберем h настолько большим, чтобы $|u(x, y)| < \varepsilon$ на $y = h$.

Пусть (x_0, y_0) — произвольная точка области D^+ . При достаточно большом h эта точка попадает в область D_h^+ и потому $|u(x_0, y_0)| < \varepsilon$. В силу

произвольности ε будем иметь $u(x_0, y_0) = 0$. Тогда $u(x, y) \equiv 0$ в области $\overline{D}^+$ и, в частности, $u(x, +0) = \tau_+(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$. Но ввиду $\tau_+(x) = \tau_-(x)$ из (6) следует, что $\nu_-(x) \equiv 0$. Тогда из формулы Дарбу [6] получим $u(x, y) \equiv 0$ и в области D^- . $\square$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия:

$$\varphi_i(y) \in C[0, \infty), \quad y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}} \varphi_i(y) \in L(0, \infty), \quad i = 1, 2,$$

а функция

$$\phi(x) \in C\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C^{(3,\delta)}\left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \varphi_1(0) = \phi(0), \quad \varphi_2(0) = 0.$$

Тогда решение задачи T существует.

Доказательство. Решение уравнения (1) в области D^+ , удовлетворяющее условиям (2), (3), будем искать в виде суммы двух функций $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$, где $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ — решения уравнения (1), удовлетворяющие соответственно краевым условиям:

$$u_1(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_1(1, y) = \varphi_2(y), \quad y \geq 0, \quad (7)$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} u_1(x, y) = 0 \text{ равномерно по } x \in [0, 1],$$

$$u_1(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1],$$

$$u_2(0, y) = 0, \quad u_2(1, y) = 0, \quad y \geq 0, \quad (8)$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} u_2(x, y) = 0 \text{ равномерно по } x \in [0, 1], \quad (9)$$

$$u_2(x, 0) = \tau(x), \quad x \in [0, 1], \quad (10)$$

где $\tau(x)$ — непрерывная, а $\tau'(x)$ — абсолютно интегрируемая на отрезке $[0, 1]$ функции.

Функцию $u_1(x, y)$ будем искать в виде

$$u_1(x, y) = y^{\frac{1-\beta_0}{2}} \int_0^\infty \left(a_1(\lambda) e^{\lambda x} + a_2(\lambda) e^{-\lambda x} \right) J_{\frac{1-2\beta}{2}} \left(\frac{2\lambda y^{\frac{m+2}{2}}}{m+2} \right) d\lambda, \quad (11)$$

где $a_1(\lambda)$ и $a_2(\lambda)$ — произвольные функции, $J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода [7]. Применяя преобразование Ханкеля, в силу (7) после необходимых вычислений получим

$$\begin{aligned} a_1(\lambda) e^{\lambda x} + a_2(\lambda) e^{-\lambda x} &= \frac{2\lambda}{(m+2) \operatorname{sh} \lambda} \int_0^\infty y^{\frac{2m+1+\beta_0}{2}} J_{\frac{1-2\beta}{2}} \left(\frac{2\lambda y^{\frac{m+2}{2}}}{m+2} \right) \times \\ &\times [\operatorname{sh} \lambda(1-x) \varphi_1(y) + \operatorname{sh} \lambda x \varphi_2(y)] dy. \end{aligned} \quad (12)$$

Формулы (11) и (12) определяют искомое решение $u_1(x, y)$. Применяв метод разделения переменных, в силу условий (8)–(10) нетрудно получить явный вид функции $u_2(x, y)$:

$$u_2(x, y) = y^{\frac{1-\beta_0}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \pi n x K_{\frac{1-2\beta}{2}} \left(\frac{2\pi n}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} \right), \quad (13)$$

где

$$a_n = \frac{4}{\Gamma\left(\frac{1-2\beta}{2}\right)} \left(\frac{\pi n}{m+2} \right)^{\frac{1-2\beta}{2}} \int_0^1 \tau(t) \sin \pi n t dt,$$

$K_\nu(z)$ — функция Макдональда [7].

Выполнив некоторые преобразования в (13), имеем

$$u_2(x, y) = k_2 y^{1-\beta_0} \int_0^1 \tau(t) G_2(x, t, y) dt, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} G_2(x, t, y) = & \left[(x-t)^2 + \frac{4y^{m+2}}{(m+2)^2} \right]^{\beta-1} - \left[(x+t)^2 + \frac{4y^{m+2}}{(m+2)^2} \right]^{\beta-1} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[(2n+x-t)^2 + \frac{4y^{m+2}}{(m+2)^2} \right]^{\beta-1} - \left[(2n+x+t)^2 + \frac{4y^{m+2}}{(m+2)^2} \right]^{\beta-1} + \right. \\ & \left. + \left[(2n-x+t)^2 + \frac{4y^{m+2}}{(m+2)^2} \right]^{\beta-1} - \left[(2n-x-t)^2 + \frac{4y^{m+2}}{(m+2)^2} \right]^{\beta-1} \right\}, \end{aligned}$$

$$k_2 = \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2-2\beta} \frac{\Gamma^2(1-\beta)(1-\beta_0)}{4\pi\Gamma(2-2\beta)}.$$

Из равенств (11), (12) и (14) после несложных вычислений имеем

$$\begin{aligned} \nu(x) = & -k_2 \frac{m+2}{2} \int_0^1 \tau'(t) (x-t) |x-t|^{2\beta-2} dt - \\ & - k_2 (1-\beta_0) \int_0^1 \tau(t) \left\{ (x+t)^{2\beta-2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[(2n+x-t)^{2\beta-2} - (2n+x+t)^{2\beta-2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + (2n-x+t)^{2\beta-2} - (2n-x-t)^{2\beta-2} \right] \right\} dt + F_0(x), \quad (15) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_0(x) = & \frac{2(m+2)^{\frac{2\beta-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)} \times \\ & \times \left\{ \int_0^\infty t^{\frac{2m+1+\beta_0}{2}} \varphi_1(t) dt \int_0^\infty \lambda^{\frac{3-2\beta}{2}} \frac{\operatorname{sh} \lambda(1-x)}{\operatorname{sh} \lambda} J_{\frac{1-2\beta}{2}} \left(\frac{2\lambda t^{\frac{m+2}{2}}}{m+2} \right) d\lambda + \right. \end{aligned}$$

$$+ \int_0^\infty t^{\frac{2m+1+\beta_0}{2}} \varphi_2(t) dt \int_0^\infty \lambda^{\frac{3-2\beta}{2}} \frac{\operatorname{sh} \lambda x}{\operatorname{sh} \lambda} J_{\frac{1-2\beta}{2}} \left(\frac{2\lambda t^{\frac{m+2}{2}}}{m+2} \right) d\lambda \Big\}.$$

Равенство (15) есть основное функциональное соотношение между неизвестными функциями $\nu(x)$ и $\tau(x)$, принесённое на J эллиптической части D^+ области D .

Согласно (5), исключая $\nu(x)$ из (6) и (15), получим

$$\begin{aligned} \gamma D_{0x}^{1-2\beta} \tau(x) - \psi(x) = & -k_2 \frac{m+2}{2} \int_0^1 \tau'(x)(x-t)|x-t|^{2\beta-2} dt - k_2(1-\beta_0) \times \\ & \times \int_0^1 \tau(t) \left\{ (x+t)^{2\beta-2} - \sum_{n=1}^\infty \left[(2n+x-t)^{2\beta-2} - (2n+x+t)^{2\beta-2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + (2n-x+t)^{2\beta-2} - (2n-x-t)^{2\beta-2} \right] \right\} dt + F_0(x). \end{aligned}$$

Применив оператор $D_{0x}^{2\beta-1}$ к обеим частям последнего равенства и выполнив некоторые преобразования, получим сингулярное интегральное уравнение относительно $\tau(x)$:

$$\tau(x) - \mu \int_0^1 \tau(t) K(x, t) dt = \Phi(x), \quad x \in (0, 1), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} K(x, t) = & \left(\frac{t}{x} \right)^{2\beta-1} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x} \right) + \\ & + \sum_{n=1}^\infty \left[\left(\frac{2n-t}{x} \right)^{2\beta-1} \left(\frac{1}{2n-t+x} - \frac{1}{2n-t-x} \right) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{2n+t}{x} \right)^{2\beta-1} \left(\frac{1}{2n+t+x} - \frac{1}{2n+t-x} \right) \right], \\ \Phi(x) = & \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta} \frac{\Gamma^2(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} \frac{\cos \pi\beta}{1+\sin \pi\beta} \left(D_{0x}^{2\beta-1} \Psi(x) + D_{0x}^{2\beta-1} F_0(x) \right), \\ \mu = & \frac{\cos \pi\beta}{\pi(1+\sin \pi\beta)}. \end{aligned}$$

Полагая

$$\tau(x) = x^{2-2\beta} \varphi(x), \quad K(x, t) = \left(\frac{x}{t} \right)^{2-2\beta} L(x, t), \quad \Phi(x) = x^{2-2\beta} g(x),$$

приведём уравнение (16) к виду

$$\varphi(x) - \mu \int_0^1 L(x, t) \varphi(t) dt = g(x), \quad (17)$$

где

$$L(x, t) = \frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{t}{2n+t} \right)^{2-2\beta} \left(\frac{1}{2n+t+x} + \frac{1}{2n+t-x} \right) - \left(\frac{t}{2n-t} \right)^{2-2\beta} \left(\frac{1}{2n-t+x} + \frac{1}{2n-t-x} \right) \right].$$

Из (17) после некоторых вычислений получим

$$\varphi(x) - \mu \int_0^1 L_0(x, t) \varphi(t) dt = \mu \int_0^1 \Delta L(x, t) \varphi(t) dt + g(x), \quad (18)$$

где

$$L_0(x, t) = \frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+t+x} + \frac{1}{2n+t-x} - \frac{1}{2n-t+x} - \frac{1}{2n-t-x} \right),$$

$$\begin{aligned} \Delta L(x, t) &= L(x, t) - L_0(x, t) = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(2n-t)^{2\beta-1} [(2n-t)^{2-2\beta} - t^{2-2\beta}]}{(2n-t)^2 - x^2} - \frac{(2n+t)^{2\beta-1} [(2n+t)^{2-2\beta} - t^{2-2\beta}]}{(2n+t)^2 - x^2} \right\}. \end{aligned}$$

Легко убеждаемся в том, что $\Delta L(x, t)$ — ограниченная функция в квадрате $0 \leq x, t \leq 1$. Далее, используя разложение $\operatorname{ctg} x$ на простейшие дроби, ядро $L_0(x, t)$ запишем в виде:

$$L_0(x, t) = \frac{\frac{d}{dt} \sin^2 \frac{\pi t}{2}}{\sin^2 \frac{\pi t}{2} - \sin^2 \frac{\pi x}{2}}. \quad (19)$$

С учётом (19) из (18) имеем

$$\varphi(x) - \mu \int_0^1 \frac{\varphi(t) \frac{d}{dt} \sin^2 \frac{\pi t}{2}}{\sin^2 \frac{\pi t}{2} - \sin^2 \frac{\pi x}{2}} dt = r(x), \quad (20)$$

где

$$r(x) = \mu \int_0^1 \Delta L(x, t) \varphi(t) dt + g(x). \quad (21)$$

Произведя замену $z = \sin^2 \frac{\pi x}{2}$, $\xi = \sin^2 \frac{\pi t}{2}$ и полагая $\rho(z) = \varphi(x)$, $\chi(z) = r(x)$, из (20) получим

$$\rho(z) - \mu \int_0^1 \frac{\rho(\xi) d\xi}{\xi - z} = \chi(z), \quad z \in (0, 1). \quad (22)$$

Решение уравнения (22) ищем в классе $h(1)$ функций $\rho(z) \in H(0, 1)$, которые при $z = 1$ ограничены, а при $z = 0$ могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы. Нетрудно показать, что индекс χ класса $h(1)$ равен нулю. Тогда единственное решение уравнения (22) в классе $h(1)$ имеет вид

$$\rho(z) = \frac{1 + \sin \pi \beta}{2} \chi(z) + \frac{\cos \pi \beta}{2\pi} \left(\frac{1-z}{z} \right)^{\frac{1-2\beta}{4}} \int_0^1 \frac{\chi(\xi) d\xi}{\left(\frac{1-\xi}{\xi} \right)^{\frac{1-2\beta}{4}} (\xi - z)}.$$

Отсюда, возвращаясь к прежним переменным, получим

$$\varphi(x) = \frac{1 + \sin \beta \pi}{2} r(x) + \frac{\cos \pi \beta}{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi t}{2}} \right)^{-\frac{1-2\beta}{2}} L_0(x, t) r(t) dt. \quad (23)$$

В силу (21) равенство (23) запишем в виде

$$\varphi(x) + \int_0^1 H(x, t) \varphi(t) dt = g_1(x), \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} H(x, t) = & -\frac{\cos \pi \beta}{2\pi} \Delta L(x, t) - \\ & - \frac{\cos^2 \pi \beta}{2\pi^2(1 + \sin \pi \beta)} \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi t}{2}} \right)^{-\frac{1-2\beta}{2}} L_0(x, \xi) \Delta L(\xi, t) d\xi, \\ g_1(x) = & \frac{1 + \sin \pi \beta}{2} g(x) + \frac{\cos \pi \beta}{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi t}{2}} \right)^{-\frac{1-2\beta}{2}} L_0(x, t) g(t) dt. \end{aligned}$$

Равенство (24) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Разрешимость уравнения (24) следует из единственности решения задачи T . $\square$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Репин О. А. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа в области, эллиптическая часть которой полуполоса // *Дифференц. уравнения*, 1996. — Т. 32, № 4. — С. 565–567.
2. Лернер М. Е., Репин О. А. Об одной задаче с двумя нелокальными краевыми условиями для уравнения смешанного типа // *Докл. РАН*, 1999. — Т. 365, № 5. — С. 593–595.
3. Бломкина И. А. О построении решения задачи Трикоми для уравнения типа Чаплыгина в полуполосе // *Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. Мат.-мех.-астр.*, 1971. — № 13. — С. 12–23.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Мн.: Наука и техника, 1987. — 688 с.
5. Салахитдинов М. С., Рузиев М. Х. Задача Трикоми для одного класса уравнений смешанного типа в неограниченной области // *Узбек. мат. журн.*, 2005. — № 2. — С. 77–83.

6. Салахитдинов М. С., Мирсабуров М. О некоторых краевых задачах со смещением для уравнения гиперболического типа, вырождающегося на границе // *Изв. АН УзССР. Сер. Физ.-мат. науки*, 1980. — № 1. — С. 16–21.
7. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. — М.: Наука, 1990. — 528 с.

Поступила в редакцию 28/X/2008;
в окончательном варианте — 05/II/2009.

MSC: 35M10

**BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE EQUATION OF MIXED
TYPE WITH SINGULAR COEFFICIENT IN THE DOMAIN WHERE
THE ELLIPTICAL PART IS A HALF-BAND**

M. Kh. Ruziev

Institute of Mathematics and Information Technologies Uzbek Academy of Sciences,
29, Durmon yuli st., Tashkent, 100125.

E-mail: mruziev@mail.ru

Boundary value problem is studied in the unbounded domain. Uniqueness of the problem is proven with the help of the extreme principle. Existence of the problem is established by methods of separation of variables and integral equations.

Key words: *half-band, mixed type equation, boundary value problem, uniqueness, existence.*

Original article submitted 28/X/2008;
revision submitted 05/II/2009.

Ruziev Menglibay Kholtojiyevich, Ph. D. (Phys. & Math.), Senior Scientific Researcher.