Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Паньков, Упругие волны в композитах со случайными структурами,
Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2001, выпуск 12, 85–90

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu65>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 17:44:02

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В КОМПОЗИТАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ СТРУКТУРАМИ

Представлены решения для динамических эффективных упругих и дифракционных свойств композитов со случайными структурами из однородных включений, полученные на основе решения соответствующих осредненных волновых уравнений обобщенного метода самосогласования. Расчетная схема осредненной задачи – дифракция продольной и поперечной волн, падающих на расположенное в среде с искомыми динамическими эффективными упругими свойствами одиночное включение, окруженное переходным слоем с неоднородными упругими свойствами. Приведены результаты численных расчетов компонент тензора динамических эффективных упругих свойств и сечений рассеяния для однонаправленного волокнистого композита в плоскости изотропии при различных значениях круговой частоты.

В задачах о распространении волн в композитах характерный размер неоднородностей имеет определяющее значение и динамическое поведение композитов можно, в наиболее общем случае, отнести к одному из двух видов. В первом длина волны значительно больше характерного масштаба неоднородности композита и поведение композита описывается через соответствующие статические эффективные физико-механические свойства. Ко второму виду относится поведение композита, когда длина волны соизмерима с характерным масштабом неоднородности и в связи с чем в композите могут возникать очень сложные динамические эффекты, так как наличие поверхностей раздела фаз в композите приводит к возникновению отраженных и преломленных волн. Одной из актуальных задач механики композитов является исследование распространения и анализ эффекта затухания волн в матричных композитах с учетом дифракции волн на случайным образом расположенных в матрице композита включениях. Понятие элементарного объема $\mathbf{V}$ в динамике рассеивающих сред [1-8] вводится как объем, в котором количество поглощенной и рассеянной энергии волн пропорционально его размеру. Для этого необходимо, чтобы он был, с одной стороны, достаточно велик, т.е. чтобы статистические характеристики распространения волн были близки к средним, а с другой – мал, чтобы интенсивность падающей на него волны оставалась почти неизменной в его пределах [3].

Будем рассматривать распространение и эффект затухания гармонических волн в матричных композитах, например, когда все включения имеют одинаковые геометрическую форму, ориентацию и случайный размер. Упругие свойства и плотности включений и матрицы композита различны. Выполняются условия идеального контакта на межфазных поверхностях. Величины относящиеся к включениям и матрице будем обозначать индексами F и M соответственно.

В области $\mathbf{V}$ на микроуровне композита уравнения движения

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$$

с учетом разложений

$$u_i(\mathbf{r}, t) = u_{(a)i}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) = \sigma_{(a)ij}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \quad (1)$$

принимают вид

$$\sigma_{(a)ij,j}(\mathbf{r}) - \rho(\mathbf{r}) \omega^2 u_{(a)i}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2)$$

или

$$\left(C_{ijmn}(\mathbf{r}) u_{(a)m,n}(\mathbf{r}) \right)_{,j} + \rho(\mathbf{r}) \omega^2 u_{(a)i}(\mathbf{r}) = 0 \quad (3)$$

относительно комплексных амплитуд смещений $\mathbf{u}_{(a)}$ гармонических колебаний; в (1)-(3) ω - круговая частота. Поля упругих свойств $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ и плотности $\rho(\mathbf{r})$ в области $\mathbf{V}$ имеют вид:

$$C_{ijmn}(\mathbf{r}) = \omega_F(\mathbf{r}) C_{ijmn}^F + (1 - \omega_F(\mathbf{r})) C_{ijmn}^M, \quad (4)$$

$$\rho(\mathbf{r}) = \omega_F(\mathbf{r}) \rho_F + (1 - \omega_F(\mathbf{r})) \rho_M, \quad (5)$$

где $\mathbf{C}^F$, ρ_F и $\mathbf{C}^M$, ρ_M - тензоры упругих свойств и величины плотностей включений и матрицы композита соответственно, индикаторная функция включений

$$\omega_F(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in \mathbf{V}_F, \\ 0, & \mathbf{r} \notin \mathbf{V}_F, \end{cases} \quad (6)$$

где $\mathbf{V}_F$ - область включений в $\mathbf{V}$. Величина $v_F \equiv \langle \omega_F \rangle$ - относительное объемное содержание включений в композите, где оператор статистического осреднения $\langle \dots \rangle$ для исследуемых статистически однородных и эргодических случайных полей совпадает с оператором объемного осреднения [6]:

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{|\mathbf{V}|} \int_{\mathbf{V}} \dots d\mathbf{r}. \quad (7)$$

Случайный разброс относительных размеров включений в композите определим через представительную выборку коэффициентов подобия $\{\alpha_{(k)}; k=1, N\}$ этих размеров относительно нормированных размеров некоторого формального включения $\mathbf{v}$, где N - число включений в области $\mathbf{V}$. Размеры формального включения $\mathbf{v}$ определим из условия

$$|\mathbf{v}| \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\mathbf{v}_{(k)}|,$$

связывающего объем включения $|\mathbf{v}|$ с совокупностью значений объемов $\{|\mathbf{v}_{(k)}|; k=1, N\}$, $|\mathbf{v}_{(k)}|$ - объем k -го включения в области $\mathbf{V}$. В результате для коэффициентов подобия имеем равенство

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \alpha_{(k)}^\beta = 1, \quad (8)$$

так как выполняется зависимость $|\mathbf{v}_{(k)}| = \alpha_{(k)}^\beta |\mathbf{v}|$, где показатель степени β связан с размерностью задачи и равен 1, 2 или 3 для слоистого, однонаправленного волокнистого и гранулированного композитов соответственно.

Рассмотрим вычисление тензора динамических эффективных упругих свойств $\mathbf{C}^*$ композита, входящего в обобщенный закон Гука на макроуровне композита

$$\sigma_{(a)ij}^*(\mathbf{r}) = C_{ijmn}^* \epsilon_{(a)mn}^*(\mathbf{r}) \quad (9)$$

и связывающего амплитуды макронапряжений и макродеформаций

$$\sigma_{(a)ij}^* = \langle \sigma_{(a)ij}(\mathbf{r}) \rangle, \quad \epsilon_{(a)ij}^* = \langle \epsilon_{(a)ij}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (10)$$

Тензор динамических эффективных упругих свойств композита $\mathbf{C}^*$ может быть рассчитан по формуле

$$C_{ijmn}^* = C_{ijmn}^M + v_F (C_{ijpq}^F - C_{ijpq}^M) N_{(a)pqmn}^F, \quad (11)$$

где $\mathbf{N}_{(a)}^F$ - тензоры концентраций осредненных комплексных амплитуд деформаций на включениях композита, которые вводятся разложением

$$\epsilon_{(a)ij}^F \equiv \langle \epsilon_{(a)ij}(\mathbf{r}) \rangle_F = N_{(a)ijmn}^F \epsilon_{(a)mn}^*, \quad (12)$$

где $\langle \dots \rangle_F$ - оператор объемного осреднения по области включений композита $\mathbf{V}_F$ аналогично оператору (7).

Таким образом, задача расчета тензора динамических эффективных упругих свойств $\mathbf{C}^*$ композита сводится к расчету тензоров концентраций осредненных комплексных амплитуд деформаций на включениях $\mathbf{N}_{(a)}^F$. Рассмотрим вычисление тензоров $\mathbf{N}_{(a)}^F$ из решения соответствующих осредненных задач обобщенного метода самосогласования [9, 10].

Постановка осредненных задач в локальной системе координат. В локальной системе координат, начало которой совмещено с центром произвольного k -го включения из области $\mathbf{V}$, введем в рассмотрение осредненные поля g -го порядка для комплексных амплитуд перемещений, деформаций и напряжений:

$$\bar{u}_{(a)i}^{(g)}(\xi) \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \alpha_{(k)}^{\beta+g-1} u_{(a)i}(\mathbf{r}_{(k)} + \alpha_{(k)} \xi),$$

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{(a)ij}^{(g)}(\xi) &\equiv \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \alpha_{(k)}^{\beta+g} \varepsilon_{(a)ij}(\mathbf{r}_{(k)} + \alpha_{(k)} \xi) = \bar{u}_{(a)(i,j)}^{(g)}(\xi), \\ \bar{\sigma}_{(a)ij}^{(g)}(\xi) &\equiv \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \alpha_{(k)}^{\beta+g} \sigma_{(a)ij}(\mathbf{r}_{(k)} + \alpha_{(k)} \xi).\end{aligned}\quad (13)$$

Для значений $g=0, 1, 2, \dots$, где $\mathbf{r}_{(k)}$ - радиус-вектор центра k -го включения в области $\mathbf{V}$, индексы i и j в круглых скобках обозначают операцию выделения симметричной составляющей из поля градиентов осредненных перемещений [6].

Искомые значения компонент тензоров

$$\mathbf{N}_{(a)}^F \equiv \mathbf{N}_{(a)}^{F(0)} \quad (14)$$

могут быть рассчитаны через осредненные поля амплитуд перемещений $\bar{\mathbf{u}}_{(a)}^{(0)}(\xi)$ или амплитуд деформаций $\bar{\varepsilon}_{(a)ij}^{(0)}(\xi) \equiv \bar{u}_{(a)(i,j)}^{(0)}(\xi)$ (13), например, по формуле

$$\frac{1}{|\mathbf{v}|} \int_{\mathbf{v}} \bar{\varepsilon}_{(a)ij}^{(0)}(\xi) d\xi = N_{(a)ijmn}^{F(0)} \varepsilon_{(a)mn}^*, \quad (15)$$

При этом центр нормированного формального включения $\mathbf{v}$ совмещен с началом локальной системы координат ξ .

Осредненные поля (13) возможно определить из решения соответствующих осредненных волновых уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\bar{a}_{ijmn}^{(g)}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_n} \bar{u}_{(a)m}^{(g)}(\xi) \right) + \omega^2 \bar{\rho}_{ij}^{(g)}(\xi) \bar{u}_{(a)j}^{(g)}(\xi) = 0 \quad (16)$$

для различных значений $g=0, 1, 2, \dots$. Тензорные поля приведенных плотностей в (16) имеют вид

$$\bar{\rho}_{ij}^{(g)}(\xi) \equiv \begin{cases} \rho_F U_{(a)ip}^{F(g+2)} U_{(a)pj}^{F(g)-1}, & \xi \in \mathbf{v}, \\ \left[\bar{\beta}^{(\beta+g+1)}(\xi) \rho_M \delta_{ip} + (\bar{\alpha}_F^{(\beta+g+1)}(\xi) \rho_F - \bar{\beta}^{(\beta+g+1)}(\xi) \rho_M) \nu_F U_{(a)ip}^{F(1)} \right] s_{pj}^{(g)-1}(\xi), & \xi \notin \mathbf{v}, \end{cases} \quad (17)$$

где для $\xi \notin \mathbf{v}$ тензор $\mathbf{s}^{(g)-1}$ обратный тензору

$$s_{ij}^{(g)}(\xi) \equiv \bar{\beta}^{(\beta+g-1)}(\xi) \delta_{ip} + (\bar{\alpha}_F^{(\beta+g-1)}(\xi) - \bar{\beta}^{(\beta+g-1)}(\xi)) \nu_F U_{(a)ip}^{F(1)}, \quad (18)$$

символы Кронекера $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$. Поля приведенных упругих свойств в (16):

$$\bar{a}_{ijmn}^{(g)}(\xi) = \begin{cases} C_{ijmn}^F, & \xi \in \mathbf{v}, \\ \left[\bar{\beta}^{(\beta+g)}(\xi) C_{ijqp}^M + (\bar{\alpha}_F^{(\beta+g)}(\xi) C_{ijdb}^F - \bar{\beta}^{(\beta+g)}(\xi) C_{ijdb}^M) \nu_F N_{(a)dbqp}^{F(0)} \right] k_{qpnm}^{(g)-1}(\xi), & \xi \notin \mathbf{v}, \end{cases} \quad (19)$$

где для $\xi \notin \mathbf{v}$ тензор $\mathbf{k}^{(g)-1}$ обратный тензору

$$k_{ijmn}^{(g)}(\xi) \equiv \bar{\beta}^{(\beta+g)}(\xi) E_{ijmn} + (\bar{\alpha}_F^{(\beta+g)}(\xi) - \bar{\beta}^{(\beta+g)}(\xi)) \nu_F N_{(a)ijmn}^{F(0)}, \quad (20)$$

$E_{ijmn} = \frac{1}{2} (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm})$ - единичный тензор. Структурные функции в (17)-(20)

$$\bar{\alpha}_F^{(p)}(\xi) \equiv \frac{\bar{\omega}_F^{(p)}(\xi)}{\nu_F}, \quad \bar{\beta}^{(p)}(\xi) \equiv \frac{\eta_{(p)} - \bar{\omega}_F^{(p)}(\xi)}{1 - \nu_F} \quad (21)$$

рассчитываются через осредненную индикаторную функцию p -го порядка

$$\bar{\omega}_F^{(p)}(\xi) \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \alpha_{(k)}^p \omega_F(\mathbf{r}_{(k)} + \alpha_{(k)} \xi) \quad (22)$$

и учитывают особенности случайной структуры композита через заданное поле $\omega_F(\mathbf{r})$ (6). При значениях $|\xi|$, превышающих радиус корреляции случайной структуры композита, например, при $|\xi| \rightarrow \infty$, выполняется равенство:

$$\bar{\omega}_F^{(p)} = \eta_{(p)} \nu_F \quad (23)$$

для осредненных индикаторных функций (22) и

$$\bar{u}_{(a)i}^{(g)} = \eta_{(\beta+g)} u_{(a)i}^*, \quad \bar{\epsilon}_{(a)ij}^{(g)} = \eta_{(\beta+g)} \epsilon_{(a)ij}^*, \quad \bar{\sigma}_{(a)ij}^{(g)} = \eta_{(\beta+g)} \sigma_{(a)ij}^* \quad (24)$$

для осредненных полей деформирования (13), где структурные коэффициенты

$$\eta_{(p)} \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \alpha_{(k)}^p, \quad (25)$$

при этом в частном случае при $p=\beta$ имеем $\eta_{(\beta)} \equiv 1$ с учетом равенств (8) и (25).

Тензоры $U_{(a)}^{F(g)}$ в (17) и (18), аналогично тензорам $N_{(a)}^{F(0)}$ (15), вводятся разложением осредненных по включениям композита амплитуд перемещений

$$u_{(a)i}^{F(g)} \equiv \frac{1}{|V|} \int_V \bar{u}_{(a)i}^{(g)}(\xi) d\xi = U_{(a)ij}^{F(g)} u_{(a)j}^* \quad (26)$$

и рассчитываются через поле $\bar{u}_{(a)}^{(g)}(\xi)$ (2.1).

В результате приходим к системе (16) из бесконечной цепочки зацепляющихся осредненных волновых уравнений. Если ограничиться рассмотрением лишь первых $H+1$ уравнений, тогда встает проблема замыкания этой новой системы. Для этого используем подход, апробированный ранее в работе [10]. Воспользуемся предположением об однородности комплексных амплитуд перемещений в пределах k -го включения $u_{(a)}^{F(k)}$ в области композита V и аппроксимацией их суммой, например, степенного ряда

$$u_{(a)i}^{F(k)} = \sum_{g=0}^H \alpha_{(k)}^{-g} n_{ij}^{F(-g)} u_{(a)j}^*. \quad (27)$$

Таким образом, система $H+1$ осредненных волновых уравнений (16) для значений $g = \overline{0, H}$ может быть дополнена недостающими зависимостями

$$U_{(a)ij}^{F(g)} = \sum_{\tau=0}^H \eta_{(\beta+g-1-\tau)} n_{ij}^{F(-\tau)}. \quad (28)$$

Частные случаи. Когда задан разброс размеров включений, тогда в осредненных волновых уравнениях (16) имеем

$$\bar{\rho}_{ij}^{(g)}(\xi) \neq \rho, \quad (29)$$

даже если плотности включений и матрицы композита равны между собой

$$\rho_F = \rho_M \equiv \rho. \quad (30)$$

Число $H+1$ осредненных волновых уравнений в системе (16) равно числу членов ряда в разложении (27). Например, пусть $H=1$, тогда с учетом (28) имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\bar{a}_{ijmn}^{(0)}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_n} \bar{u}_{(a)m}^{(0)}(\xi) \right) + \omega^2 \bar{\rho}_{ij}^{(0)}(\xi) \bar{u}_{(a)j}^{(0)}(\xi) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\bar{a}_{ijmn}^{(1)}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_n} \bar{u}_{(a)m}^{(1)}(\xi) \right) + \omega^2 \bar{\rho}_{ij}^{(1)}(\xi) \bar{u}_{(a)j}^{(1)}(\xi) = 0, \\ U_{(a)ij}^{F(1)} = \eta_{(\beta)} n_{ij}^{F(0)} + \eta_{(\beta-1)} n_{ij}^{F(-1)}, \\ U_{(a)ij}^{F(2)} = \eta_{(\beta+1)} n_{ij}^{F(0)} + \eta_{(\beta)} n_{ij}^{F(-1)}, \\ U_{(a)ij}^{F(3)} = \eta_{(\beta+2)} n_{ij}^{F(0)} + \eta_{(\beta+1)} n_{ij}^{F(-1)}, \end{cases} \quad (31)$$

где поля плотностей $\bar{\rho}^{(0)}(\xi)$ и $\bar{\rho}^{(1)}(\xi)$ рассчитываются по формулам (17) через тензоры $U_{(a)}^{F(0)}$, $U_{(a)}^{F(1)}$, $U_{(a)}^{F(2)}$ и $U_{(a)}^{F(3)}$, входящих в систему (31); поля $\bar{a}^{(0)}(\xi)$ и $\bar{a}^{(1)}(\xi)$ рассчитываются через тензоры $N_{(a)}^{F(0)}$ по формуле (19) с учетом равенства (15).

Когда плотности включений и матрицы композита различны и все включения одного размера, тогда выполняются равенства

$$\alpha_{(k)} = 1 \forall k = \overline{1, N} \quad (32)$$

и из системы осредненных волновых уравнений (31) остается лишь одно “нулевое” ($g=0$) волновое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\bar{a}_{ijmn}^{(0)}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_n} \bar{u}_{(a)m}^{(0)}(\xi) \right) + \omega^2 \bar{\rho}_{ij}^{(0)}(\xi) \bar{u}_{(a)j}^{(0)}(\xi) = 0, \quad (33)$$

где поле плотностей (17) имеет вид

$$\bar{\rho}_{ij}^{(0)}(\xi) \equiv \begin{cases} \bar{\rho}_F, & \xi \in \mathbf{v} \\ \left[\bar{\beta}^{(0)}(\xi) \rho_M \delta_{ip} + \left(\bar{\alpha}_F^{(0)}(\xi) \rho_F - \bar{\beta}^{(0)}(\xi) \rho_M \right) \nu_0 U_{(a)ip}^{F(0)} \right] s_{pj}^{(0)-1}(\xi), & \xi \notin \mathbf{v} \end{cases} \quad (34)$$

при этом для $\xi \notin \mathbf{v}$ тензор $s^{(0)-1}$ обратный тензору

$$s_{ij}^{(0)}(\xi) \equiv \bar{\beta}^{(0)}(\xi) \delta_{ip} + \left(\bar{\alpha}_F^{(0)}(\xi) - \bar{\beta}^{(0)}(\xi) \right) \nu_F U_{(a)ip}^{F(0)} \quad (35)$$

с учетом равенства (18).

Однонаправленный волокнистый композит. Рассмотрим распространение продольных и поперечных гармонических волн в плоскости изотропии $r_1 Or_2$ однонаправленного волокнистого композита в условиях плоской деформации (рис. 1). Считаем, что все волокна имеют одинаковые радиусы r_F круглых поперечных сечений (32), центры которых статистически однородно распределены в узлах идеальной периодической гексагональной решетки с минимальной гарантированной прослойкой матрицы между волокнами в 4% от радиуса r_F . Пусть плотности волокон и матрицы совпадают (30). Осредненное волновое уравнение примет вид (33), где с учетом (30) надо положить $\rho^{(0)}(\xi) = \rho$. Расчетная схема – дифракция продольной и поперечной волн, падающих на расположенное в среде с искомыми динамическими эффективными упругими свойствами $\mathbf{C}^*$ одиночное включение $\mathbf{v}$, окруженное переходным слоем с неоднородными приведенными упругими свойствами $\bar{\mathbf{a}}^{(0)}(\xi)$.

Для численного решения осредненной задачи использована полярная система координат

Р и с. 1. Представительная область композита в плоскости изотропии

Р и с. 2. Расчетная схема обобщенного метода самосогласования: 1 - волокно, 2 – неоднородная окрестность, 3 – однородная эффективная среда

ξ_0 , θ и расчетная область (рис. 2) представлена совокупностью $N=50$ концентрических цилиндрических слоев с однородными изотропными упругими свойствами; при этом переходный цилиндрический слой с изотропными в каждой точке ξ плоскости $\xi_1 \xi_2$ и неоднородными по радиальной координате $\xi_0 \equiv |\xi|$ упругими свойствами $\mathbf{a}_{(a)}^{(0)}(\xi_0)$ дискретизировался на $N-2$ тонких цилиндрических слоя. Дальнейшее решение аналогично подходу, использованному, например, в [1, 2].

Результаты численного расчета компонент C_{1111}^* и C_{1212}^* тензора $\mathbf{C}^*$ эффективных динамических упругих свойств в плоскости изотропии $r_1 Or_2$ представлены в таблице, когда круговая частота $\omega = 600c^{-1}$ и относительное объемное содержание волокон в композите $\nu_F = 0,5$. Модули Юнга и коэффициенты Пуассона изотропных матрицы $E_M = 1$ ГПа, $\nu_M = 0,15$

и волокон $E_F = 100 E_M$, $\nu_F = 0,1$ при значении отношения $E_M / \rho = 10^6$. Когда круговая частота $\omega < 20 \text{ с}^{-1}$, тогда численные значения компонент C_{1111}^* или C_{1212}^* , полученные обобщенным методом самосогласования с учетом и без учета [1] динамических эффектов, различаются менее, чем на 3%.

Т а б л и ц а

**Эффективные динамические упругие компоненты C^*
и сечения рассеяния γ^* в плоскости изотропии волокнистого композита**

Эффективные константы композита	Результаты расчета	
	Статический [1]	Динамический
C_{1111}^* / C_{1111}^M	3,09	1,39
C_{1212}^* / C_{1212}^M	3,01	1,45
γ_1^* / r_F^2	-	5,99
γ_2^* / r_F^2	-	8,84

Численные значения эффективных сечений рассеяния γ^* приведены в таблице для распространяющейся вдоль оси r_1 продольной (γ_1^*) или поперечной (γ_2^*) волн в плоскости изотропии $r_1 Or_2$ однонаправленного волокнистого композита. Величина γ^* рассчитана из уравнения $\gamma^* = E^* / I^*$, где I^* - интенсивность падающей волны, рассеянная энергия за единицу времени [1]:

$$E^* = \frac{i\omega R}{4} \int_0^{2\pi} \left(\overline{\sigma}_{(a)\xi\xi}^{\bullet} \overline{u}_{(a)\xi} + \overline{\sigma}_{(a)\xi\theta}^{\bullet} \overline{u}_{(a)\theta} - \overline{\sigma}_{(a)\xi\xi} \overline{u}_{(a)\xi}^{\bullet} - \overline{\sigma}_{(a)\xi\theta} \overline{u}_{(a)\theta}^{\bullet} \right) \Big|_{\xi_0=R} d\theta.$$

Для $R \gg r_F$, символ $\bullet$ обозначает комплексно сопряженные величины.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б. Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М.: Мир. 1972. 307 с.
2. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. Киев: Наук. думка. 1978. 308 с.
3. Пришивалко А.П., Бабенко В.А., Кузьмин В.Н. Рассеяние и поглощение света неоднородными и анизотропными сферическими частицами. Минск.: Наука и техника. 1984. 263 с.
4. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир. 1969. 607 с.
5. Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Статистические явления при дифракции волн. Рязань, 1975. 102 с.
6. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеднородных сред. М.: Наука. 1977. 400 с.
7. Чернов Л.А. Волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука. 1975. 172 с.
8. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. В 2 т. М.: Мир. 1981. 320 с.
9. Паньков А.А. Анализ эффективных упругих свойств однонаправленного волокнистого стеклопластика обобщенным методом самосогласования // Изв. РАН. МТТ, 1999. №4. С. 78-86
10. Паньков А.А. Обобщенный метод самосогласования для композитов со случайными упругими свойствами фаз составных или полых включений // Механика композиционных материалов и конструкций. 2000, №3. С. 310-332