Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Коваленко, Н. Н. Попов, Моделирование краевого эффекта в задаче о растяжении стохастически неоднородной полосы при ползучести, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 1(), 85–94

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu650>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 15:49:10

УДК 539.376

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРАЕВОГО ЭФФЕКТА В ЗАДАЧЕ О РАСТЯЖЕНИИ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛОСЫ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Л. В. Коваленко, Н. Н. Попов

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: flytitmouse@mail.ru; ponick25@gmail.ru

Моделируется краевой эффект при решении стохастической нелинейной краевой задачи ползучести о растяжении неоднородной бесконечной полосы. Определяющие соотношения ползучести, взятые в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения, сформулированы в стохастической форме. Задача решается приближенно по методу возмущений относительно компонент тензора напряжений. На основе решения проведён статистический анализ, позволяющий определить основные особенности краевого эффекта.

Ключевые слова: ползучесть, стохастически неоднородная полоса, случайное поле напряжений и деформаций.

Введение. Научно-технический прогресс, достижения в сфере высоких технологий диктуют необходимость глубокого и детального изучения свойств используемых материалов. При эксплуатации материалов на производстве необходимо учитывать, что все они обладают той или иной степенью неоднородности. Эта неоднородность в материалах может возникать из-за различных технологических и структурных факторов, случайных изменений в параметрах технологических процессов при изготовлении изделия. Структурная неоднородность существенно влияет на процессы деформирования твердых тел, что приводит к их преждевременному разрушению.

Как правило, задачи на ползучесть решаются в детерминированной постановке. Однако если принимать во внимание естественный разброс опытных данных, то становится ясно, что этот подход оказывается явно недостаточным, т.к. он не может объяснить ряд механических эффектов, возникающих в результате неоднородности материала. Одним из таких эффектов является краевой эффект. Суть его состоит в том, что вблизи границ тела со структурной неоднородностью имеется пограничный слой, в котором возникают концентрации напряжений, причём они могут достигать достаточно больших значений. Поэтому их учёт в расчётах на ползучесть может привести к нежелательным последствиям — к переоценке прочностных свойств материалов. Теоретическое объяснение этого эффекта в условиях ползучести на основе решения стохастической краевой задачи проведено для полуплоскости [1, 2] и полупространства [3, 4]. В данной работе рассматривается ползучесть стохастически неоднородной полосы с быстроосциллирующими реологическими свойствами.

Попов Николай Николаевич — доцент кафедры прикладной математики и информатики; к.ф.-м.н., доцент.

Коваленко Людмила Викторовна — аспирант кафедры прикладной математики и информатики.

1. Постановка задачи. Пусть бесконечная стохастически неоднородная полоса (пластина) $-\infty \geq x_1 \geq \infty$, $-b \geq x_2 \geq b$ растягивается вдоль оси x_1 постоянными напряжениями $\sigma_{11} = \sigma^0$, которые приложены на бесконечности $x_1 \rightarrow \pm\infty$, а её границы $x_2 = \pm b$ свободны от напряжений:

$$\sigma_{22}|_{x_2=\pm b} = 0, \quad \sigma_{12}|_{x_2=\pm b} = 0. \quad (1)$$

Пусть компоненты тензора напряжений σ_{ij} удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (i, j = 1, 2), \quad (2)$$

а компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{p}_{ij}$ — условию

$$\Lambda_{ij}\Lambda_{kl}\dot{p}_{jk,il} = 0, \quad (3)$$

которое получается из уравнения совместности деформаций путём дифференцирования по времени, Λ_{ij} — единичный антисимметричный псевдотензор:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнения (1) и (2) замыкаются определяющими соотношениями ползучести, которые принимаются в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения (установившейся ползучести) в стохастической форме [1]:

$$\dot{p}_{ij} = cs^{n-1} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{mm} \right) (1 + \alpha U(x_1, x_2)), \quad (4)$$

где s — интенсивность напряжений:

$$s^2 = \frac{1}{2} (3\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}),$$

δ_{ij} — символ Кронекера, c, n, α — постоянные материала, $U(x_1, x_2)$ — случайная однородная функция, описывающая флуктуации реологических свойств материала с математическим ожиданием $\langle U \rangle = 0$ и дисперсией, равной $\langle U^2 \rangle = 1$, точка обозначает дифференцирование по времени. По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2. Постоянная α в формуле (4) определяет степень неоднородности материала, и для реальных материалов может изменяться в пределах от 0,05 до 0,5.

Соотношения (2)–(4) при краевых условиях (1) задают нелинейную стохастическую краевую задачу ползучести, которая в дальнейшем решается приближенно относительно напряжений σ_{ij} .

2. Решение задачи. Представим тензор напряжений в виде суммы:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^*, \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^0, \quad \langle \sigma_{ij}^* \rangle = 0, \quad (5)$$

где σ_{ij}^0 — детерминированные составляющие тензора напряжений, а σ_{ij}^* — флуктуации напряжений. В силу постановки задачи и граничных условий (1) во всей пластине имеем:

$$\sigma_{11}^0 = \sigma^0, \quad \sigma_{22}^0 = 0, \quad \sigma_{12}^0 = 0.$$

Выпишем функцию s^{n-1} , входящую в определяющие соотношения (4), используя (5), в виде

$$s^{n-1} = (s_0^2 + s_*)^{\frac{n-1}{2}},$$

где

$$s_0 = \sigma^0, \quad s_* = \sigma^0 (2\sigma_{11}^* - \sigma_{22}^*).$$

Считая величину s_* малой по сравнению с детерминированной величиной s_0^2 , разложим функцию s^{n-1} в окрестности значения s_0^2 по степеням s_* и в этом разложении ограничимся только линейными членами. В итоге получим:

$$s^{n-1} \approx s_0^{n-1} + \frac{n-1}{2} s_0^{n-3} s_* = (\sigma^0)^{n-2} \left(\sigma^0 + \frac{n-1}{2} (2\sigma_{11}^* - \sigma_{22}^*) \right). \quad (6)$$

Подставим в определяющие соотношения (4) выражения (5) и (6):

$$\begin{aligned} \dot{p}_{11} &= \frac{1}{3} c (\sigma^0)^{n-1} (2\sigma^0 + n(2\sigma_{11}^* - \sigma_{22}^*) + 2\sigma^0 \alpha U), \\ \dot{p}_{22} &= \frac{1}{3} c (\sigma^0)^{n-1} \left(-\sigma^0 + \frac{3+n}{2} \sigma_{22}^* - n\sigma_{11}^* - \sigma^0 \alpha U \right), \\ \dot{p}_{12} &= c (\sigma^0)^{n-1} \sigma_{12}^*. \end{aligned} \quad (7)$$

В данных преобразованиях для статистической линеаризации определяющего соотношения (4) использовалось корреляционное приближение теории случайных функций, т.е. предполагалось, что произведениями вида $\sigma_{ij}^* \sigma_{kl}^*$, $\alpha U \sigma_{ij}^*$ допустимо пренебречь по сравнению с σ_{ij}^* .

Флуктуации скоростей деформаций $\dot{p}_{ij}^*$ согласно (7) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{p}_{11}^* &= \frac{1}{3} c (\sigma^0)^{n-1} (n(2\sigma_{11}^* - \sigma_{22}^*) + 2\sigma^0 \alpha U), \\ \dot{p}_{22}^* &= \frac{1}{3} c (\sigma^0)^{n-1} \left(\frac{3+n}{2} \sigma_{22}^* - n\sigma_{11}^* - \sigma^0 \alpha U \right), \\ \dot{p}_{12}^* &= c (\sigma^0)^{n-1} \sigma_{12}^*. \end{aligned} \quad (8)$$

Из уравнений (2) и (3) следует, что

$$\sigma_{ij,j}^* = 0, \quad (9)$$

$$\Lambda_{ij} \Lambda_{kl} \dot{p}_{jk,il}^* = 0.$$

Поскольку $\Lambda_{12} \Lambda_{12} = \Lambda_{21} \Lambda_{21} = 1$, $\Lambda_{12} \Lambda_{21} = -1$, а $\Lambda_{11} = \Lambda_{22} = 0$, то уравнение совместности для флуктуаций деформаций запишется в виде

$$\dot{p}_{11,22}^* + \dot{p}_{22,11}^* - 2\dot{p}_{12,12}^* = 0. \quad (10)$$

Подставляя в уравнение совместности деформаций (10) соотношения (8), можно получить линейное дифференциальное уравнение в частных производных относительно σ_{ij}^* :

$$4n\sigma_{11,22}^* - 2n(\sigma_{22,22}^* + \sigma_{11,11}^*) + (3+n)\sigma_{22,11}^* - 12\sigma_{12,12}^* = -2\alpha\sigma^0(2U_{,22} - U_{,11}) \quad (11)$$

с краевыми условиями

$$\sigma_{22}^*|_{x_2=\pm b} = 0, \quad \sigma_{12}^*|_{x_2=\pm b} = 0.$$

Вводя функцию напряжений F с помощью формул $\sigma_{11}^* = F_{,22}$, $\sigma_{22}^* = F_{,11}$, $\sigma_{12}^* = -F_{,12}$, вместо системы (9)–(11) получим одно дифференциальное уравнение

$$(3+n)F_{,1111} + 4(3-n)F_{,1122} + 4nF_{,2222} = -2\alpha\sigma^0(2U_{,22} - U_{,11}) \quad (12)$$

с краевыми условиями

$$F_{,11}|_{x_2=0} = 0, \quad F_{,12}|_{x_2=0} = 0. \quad (13)$$

Случайная однородная функция $U(x_1, x_2)$, с помощью которой описывается случайное поле возмущений реологических свойств материала, задаётся в виде [5]

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega c_k x_1 + \omega d_k x_2 + \varphi_k),$$

где c_k , d_k — безразмерные величины порядка единицы; ω — параметр, имеющий размерность, обратную длине, такой, что функция U является почти периодической быстроосциллирующей функцией координат; A_k , φ_k — случайные величины, обладающие свойствами: A_k — центрированные случайные величины, φ_k имеют равномерное распределение в интервале $(0; 2\pi)$, причём все случайные величины независимы.

Для удобства дальнейших выкладок переходим к комплексному виду функции U :

$$\tilde{U} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \exp(i\omega(c_k x_1 + d_k x_2)), \quad (14)$$

где $\tilde{A}_k = A_k \exp(i\varphi_k)$. Функция $\tilde{U}$ введена так, что ее действительная часть равна самой функции U : $\text{Re } \tilde{U} = U$.

При быстроосциллирующих свойствах материала влияние граничных условий при $x_2 = b$ и $x_2 = -b$ друг на друга достаточно мало, и ими можно пренебречь. Тогда решение краевой задачи (12), (13) примет вид

$$\tilde{F} = \sum_{k=1}^{\infty} (v_k + w_k + l_k). \quad (15)$$

Здесь v_k — частное решение уравнения (12), полученное при замене функции $\tilde{U}$ k -тым членом разложения (14):

$$(3+n)v_{k,1111} + 4(3-n)v_{k,1122} + 4nv_{k,2222} = 2\alpha\sigma^0\omega^2\tilde{A}_k \exp(i\omega(c_kx_1 + d_kx_2))(2d_k^2 - c_k^2),$$

а w_k и l_k — решения однородного уравнения, соответствующего (12), удовлетворяющие при $x_2 = b$ и $x_2 = -b$ условиям

$$\begin{aligned} w_{k,11}|_{x_2=b} &= -v_{k,11}|_{x_2=b}, & w_{k,12}|_{x_2=b} &= -v_{k,12}|_{x_2=b}, \\ l_{k,11}|_{x_2=-b} &= -v_{k,11}|_{x_2=-b}, & l_{k,12}|_{x_2=-b} &= -v_{k,12}|_{x_2=-b}. \end{aligned}$$

Функции v_k можно искать в виде

$$v_k = f_k \exp(i\omega(c_kx_1 + d_kx_2)). \quad (16)$$

Здесь величины f_k — константы, которые могут быть найдены из алгебраического уравнения

$$(3+n)\omega^2c_k^4f_k + 4(3-n)\omega^2c_k^2d_k^2f_k + 4n\omega^2d_k^4f_k = 2\alpha\sigma^0\tilde{A}_k(2d_k^2 - c_k^2),$$

из которого следует

$$f_k = \frac{2\alpha\sigma^0}{\omega^2} \cdot \frac{\tilde{A}_k(2d_k^2 - c_k^2)}{(3+n)c_k^4 + 4(3-n)c_k^2d_k^2 + 4nd_k^4}.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ задаёт решение вдали от границ пластины без учета краевого эффекта. Функции w_k и l_k имеют характер пограничного слоя: они быстро затухают по мере удаления от границ $x_2 = b$ и $x_2 = -b$. Их можно искать в виде

$$w_k = g_k^1(t_1) \exp i\omega(c_kx_1 - d_kb), \quad t_1 = \omega(x_2 + b), \quad (17)$$

$$l_k = g_k^2(t_2) \exp i\omega(c_kx_1 + d_kb), \quad t_2 = \omega(x_2 - b), \quad (18)$$

где функции $g_k^s(t_i)$ ($s = 1, 2$) могут быть найдены из однородных дифференциальных уравнений

$$4n\frac{d^4g_k^s}{dt_s^4} - 4(3-n)c_k^2\frac{d^2g_k^s}{dt_s^2} + (3+n)c_k^4g_k^s = 0 \quad (19)$$

с краевыми условиями

$$g_k^s|_{t_s=0} = -f_k, \quad \frac{dg_k^s}{dt_s}|_{t_s=0} = -id_kf_k. \quad (20)$$

Найдем функцию $g_k^1(t_1)$. Все корни r_s^k характеристического уравнения, соответствующего уравнению (19), простые и составляют величины

$$r_{1,2}^k = -\omega c_k(B_1 \pm iB_2), \quad r_{3,4}^k = \omega c_k(B_1 \pm iB_2),$$

где

$$B_1 = \frac{\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}}{\sqrt{2}}, \quad B_2 = \frac{\sqrt{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}}{\sqrt{2}}, \quad a = \frac{3-n}{2n}, \quad b = \frac{3\sqrt{n-1}}{2n}.$$

Тогда решение уравнения (19) имеет вид

$$g_k^1(t_1) = \sum_{s=1}^4 C_s^k \exp(r_s^k t_1), \quad (21)$$

где C_s^k — произвольные постоянные.

Из четырех корней характеристического уравнения два корня r_3^k и r_4^k имеют положительные действительные части. Так как при $x_2 \rightarrow \infty$ краевой эффект должен затухать, то две постоянные C_3^k и C_4^k , соответствующие этим корням, равны нулю. Для нахождения двух других констант C_1^k и C_2^k используем граничные условия (20). Решая систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными, находим константы C_1^k и C_2^k :

$$C_1^k = -\frac{f_k(r_2^k + id_k)}{r_2^k - r_1^k}, \quad C_2^k = \frac{f_k(r_1^k + id_k)}{r_2^k - r_1^k}. \quad (22)$$

Подставляя выражение (21)–(22) в (17) можно найти w_k :

$$w_k = f_k \exp(i\omega(c_k x_1 + d_k b)) \times \\ \times \left[-\frac{r_2^k + id_k}{r_2^k - r_1^k} \exp(\omega r_1^k(b - x_2)) + \frac{r_1^k + id_k}{r_2^k - r_1^k} \exp(\omega r_2^k(b - x_2)) \right]. \quad (23)$$

Проводя аналогичные действия с привлечением выражений (18), (19), (20), находим решение l_k в области $x_2 \geq -b$ вблизи границы $x_2 = -b$:

$$l_k = f_k \exp(i\omega(c_k x_1 - d_k b)) \times \\ \times \left[-\frac{r_2^k - id_k}{r_2^k - r_1^k} \exp(\omega r_1^k(b + x_2)) + \frac{r_1^k - id_k}{r_2^k - r_1^k} \exp(\omega r_2^k(b + x_2)) \right]. \quad (24)$$

Подставляя (16), (23), (24) в (15), найдём решение задачи (12), (13) в общем виде:

$$\tilde{F} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k (\exp(i\omega(c_k x_1 + d_k x_2)) + \exp(i\omega(c_k x_1 + d_k b)) \times \\ \times \left[-\frac{r_2^k + id_k}{r_2^k - r_1^k} \exp(\omega r_1^k(b - x_2)) + \frac{r_1^k + id_k}{r_2^k - r_1^k} \exp(\omega r_2^k(b - x_2)) \right] + \\ + \exp(i\omega(c_k x_1 - d_k b)) \times \\ \times \left[-\frac{r_2^k - id_k}{r_2^k - r_1^k} \exp(\omega r_1^k(b + x_2)) + \frac{r_1^k - id_k}{r_2^k - r_1^k} \exp(\omega r_2^k(b + x_2)) \right]).$$

Переходя от функции напряжения $\tilde{F}$ к напряжениям с помощью формул $\sigma_{11}^* = F_{,22}$, $\sigma_{22}^* = F_{,11}$, $\sigma_{12}^* = -F_{,12}$, получим решение задачи (1)–(4):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^* = & \sum_{k=1}^{\infty} f_k \omega^2 e^{i\omega c_k x_1} \left(-d_k^2 \cos(d_k \omega x_2) - \frac{c_k e^{-c_k B_1 \omega(b-x_2)}}{B_2} \times \right. \\
 & \times [c_k(B_1^2 + B_2^2)L_1(\omega(b-x_2)) \cos d_k \omega b + d_k L_2(\omega(b-x_2)) \sin d_k \omega b] - \\
 & - \frac{c_k e^{-c_k B_1 \omega(b+x_2)}}{B_2} \times \\
 & \times [c_k(B_1^2 + B_2^2)L_1(\omega(b+x_2)) \cos d_k \omega b + d_k L_2(\omega(b+x_2)) \sin d_k \omega b] + \\
 & + i \left[-d_k^2 \sin(d_k \omega x_2) - \frac{c_k e^{-c_k B_1 \omega(b-x_2)}}{B_2} [c_k(B_1^2 + B_2^2)L_1(\omega(b-x_2)) \sin d_k \omega b - \right. \\
 & - d_k L_2(\omega(b-x_2)) \cos d_k \omega b] + \frac{c_k e^{-c_k B_1 \omega(b+x_2)}}{B_2} \times \\
 & \times [c_k \sin d_k \omega b (B_1^2 + B_2^2)L_1(\omega(b+x_2)) - d_k \cos d_k \omega b L_2(\omega(b+x_2))] \left. \right] \Bigg), \\
 \sigma_{22}^* = & - \sum_{k=1}^{\infty} f_k c_k^2 \omega^2 \exp(i\omega c_k x_1) \left(\cos(d_k \omega x_2) - \frac{e^{-c_k B_1 \omega(b-x_2)}}{c_k B_2} \times \right. \\
 & \times [c_k L_3(\omega(b-x_2)) \cos d_k \omega b + d_k \sin(c_k B_2 \omega(b-x_2)) \sin d_k \omega b] + \\
 & + \frac{e^{-c_k B_1 \omega(b+x_2)}}{c_k B_2} \times \\
 & \times [c_k L_3(\omega(b+x_2)) \sin d_k \omega b - d_k \sin(c_k B_2 \omega(b+x_2)) \cos d_k \omega b] + \\
 & + i \left[\sin(d_k \omega x_2) - \frac{e^{-c_k B_1 \omega(b-x_2)}}{c_k B_2} [c_k L_3(\omega(b-x_2)) \sin d_k \omega b - \right. \\
 & - d_k \sin(c_k B_2 \omega(b-x_2)) \cos d_k \omega b] + \frac{e^{-c_k B_1 \omega(b+x_2)}}{c_k B_2} \times \\
 & \times [c_k L_3(\omega(b+x_2)) \sin d_k \omega b - d_k \sin(c_k B_2 \omega(b+x_2)) \cos d_k \omega b] \left. \right] \Bigg), \\
 \sigma_{12}^* = & \sum_{k=1}^{\infty} f_k \omega^2 c_k \exp(i\omega c_k x_1) \left(-d_k \cos(d_k \omega x_2) + \frac{e^{-c_k B_1 \omega(b-x_2)}}{B_2} \times \right. \\
 & \times [c_k(B_1^2 + B_2^2) \sin(c_k B_2 \omega(b-x_2)) \sin d_k \omega b - d_k L_1(\omega(b-x_2)) \cos d_k \omega b] + \\
 & + \frac{e^{-c_k B_1 \omega(b+x_2)}}{B_2} \times \\
 & \times [c_k(B_1^2 + B_2^2) \sin(c_k B_2 \omega(b+x_2)) \sin d_k \omega b - d_k L_1(\omega(b+x_2)) \cos d_k \omega b] +
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

$$+i \left[-d_k \sin(d_k \omega x_2) - \frac{e^{-c_k B_1 \omega(b-x_2)}}{B_2} [c_k(B_1^2 + B_2^2) \sin(c_k B_2 \omega(b-x_2)) \cos d_k \omega b + \right. \\ \left. + d_k L_1(\omega(b-x_2)) \sin d_k \omega b] + \frac{e^{-c_k B_1 \omega(b+x_2)}}{B_2} \times \right. \\ \left. \times [c_k(B_1^2 + B_2^2) \sin(c_k B_2 \omega(b+x_2)) \cos d_k \omega b + d_k L_1(\omega(b+x_2)) \sin d_k \omega b] \right],$$

где

$$L_1(\omega(b \pm x_2)) = B_1 \sin(c_k B_2 \omega(b \pm x_2)) - B_2 \cos(c_k B_2 \omega(b \pm x_2)), \\ L_2(\omega(b \pm x_2)) = (B_1^2 - B_2^2) \sin(c_k B_2 \omega(b \pm x_2)) - 2B_1 B_2 \cos(c_k B_2 \omega(b \pm x_2)), \\ L_3(\omega(b \pm x_2)) = B_1 \sin(c_k B_2 \omega(b - x_2)) + B_2 \cos(c_k B_2 \omega(b - x_2)).$$

Проще говоря, решением краевой задачи (1)–(4) являются действительные части (25), однако при вычислении дисперсий случайного поля напряжений по формуле

$$D_{ij} = \langle |\sigma_{ij}^*|^2 \rangle \quad (26)$$

нет необходимости явного выделения действительных частей комплексных функций [6].

Полученное решение (25) удовлетворяет уравнениям равновесия и условию совместности точно, а граничные условия при $x_2 = \pm b$ имеют невязку порядка $\omega b \exp(-\omega b)$. Таким образом, соотношения (25) дают асимптотическое представление решения исходной краевой задачи при $\omega b \gg 1$, где параметр ω определяет характерную частоту флуктуаций реологических свойств материала, а b — характерный размер пластины.

На основе полученного решения проведён статистический анализ, для чего найдены дисперсии случайного поля напряжений по формуле (26) при $c_k = d_k = 1$, а также исследовано их поведение вблизи и вдали от границ полосы $x_2 = \pm b$. Аналитические формулы для дисперсий не выписаны в силу их

Графики нормированных дисперсий D_{ij}^0 при $n = 3$: 1 — D_{11}^0 , 2 — D_{22}^0 , 3 — D_{12}^0

громоздкости. На рис. представлены зависимости нормированных дисперсий $D_{ij}^0 = \frac{D_{ij}(\omega x_2)}{D_{ij}(\infty)}$ от безразмерной координаты ωx_2 при степени нелинейности установившейся ползучести $n = 3$. Здесь $D_{ij}(\infty)$ определяет дисперсию напряжения σ_{ij} для неограниченной плоскости. Она является постоянной во всей плоскости, а ее значения представлены в работе [2]. Графики нормированных дисперсий на этих рисунках построены при $\omega b = 20$. Видно, что на границах полосы $\pm \omega b$ разброс напряжений D_{11}^0 принимает значение, равное 1,5, тогда как D_{22}^0 и D_{12}^0 равны нулю; они достигают своих максимальных значений в пограничном слое, ширина которого с ростом n увеличивается, но незначительно. Вдали от границ полосы дисперсии принимают те же значения, что и для неограниченной плоскости.

Отсюда ясно, что флуктуации напряжений в пограничном слое играют существенную роль при решении вопроса о надёжности элементов конструкций по критериям длительной прочности и мгновенных локальных напряжений за счёт выбросов напряжений. Неучёт краевых эффектов может привести к необоснованному завышению оценок работоспособности элементов конструкций в условиях ползучести.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 07-01-00478-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Попов Н. Н., Самарин Ю. П. Исследование полей напряжений вблизи границы стохастически неоднородной плоскости при ползучести // *ПМТФ*, 1988. — № 1. — С. 159–164.
2. Попов Н. Н., Коваленко Л. В. Поля напряжений на границе стохастически неоднородной полуплоскости при ползучести // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006. — № 42. — С. 61–66.
3. Попов Н. Н., Коваленко Л. В. Нелинейная стохастическая задача о растяжении полупространства в условиях ползучести // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2007. — № 1(14). — С. 56–61.
4. Попов Н. Н., Самарин Ю. П. Пространственная задача стационарной ползучести стохастически неоднородной среды // *ПМТФ*, 1985. — № 2. — С. 150–155.
5. Ломакин В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. — М.: Наука, 1970. — 139 с.
6. Болотин В. В. Методы теории вероятностей и теории надёжности в расчётах сооружений. — М.: Стройиздат, 1982. — 352 с.

Поступила в редакцию 24/XI/2008;
в окончательном варианте — 03/III/2009.

MSC: 74E05, 74E35, 74C10, 74R20

**BOUNDARY EFFECT MODELING IN THE PROBLEM OF
STOCHASTIC HETEROGENEOUS STRIPE
TENSION UNDER CREEP**

L. V. Kovalenko, N. N. Popov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100.

E-mails: flytitmouse@mail.ru; ponick25@gmail.ru

The boundary effect in stochastic creep boundary problem of endless heterogeneous stripe tension was modeled. Determining creep factors which were applied in compliance with a nonlinear theory of viscid flow are formulated in a stochastic form. The problem is solved approximately with disturbance method related to tensions tensor component. Statistical analysis was performed on the basis of solution allowing defining the basic features of boundary effect.

Key words: *creep, stochastic heterogeneous stripe, stochastic field of stress and strain.*

Original article submitted 24/XI/2008;
revision submitted 03/III/2009.

Popov Nikolay Nikolaevich, Ph. D. (Phys. & Math.), Ass. Prof., Dept. of Applied Mathematics and Computer Science.

Kovalenko Ludmila Viktorovna, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics and Computer Science.