Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Битюрин, В. К. Манжосов, Математическое моделирование продольного удара системы однородных стержней о жёсткую преграду при неударяющих связях, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 2(), 133–139

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu652>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:00:24

УДК 517.958:622.233.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДОЛЬНОГО УДАРА СИСТЕМЫ ОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ О ЖЁСТКУЮ ПРЕГРАДУ ПРИ НЕУДЕРЖИВАЮЩИХ СВЯЗЯХ

А. А. Битюрин, В. К. Манжосов

Ульяновский государственный технический университет,
432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.

E-mail: Denjgy0706@yandex.ru

Осуществляется математическое моделирование продольного упругого центрального удара стержневой системы, состоящей из двух однородных стержней различной длины и площади поперечного сечения, о жёсткую преграду при неудерживающих связях.

Ключевые слова: деформация, моделирование, продольный удар, стержень.

Введение. Задача о продольном ударе стержня с учётом его распределённой массы и описания движения поперечных сечений волновыми уравнениями была сформулирована Навье, Буссинеском, Сен–Венаном, Сирсом.

Во второй половине XX века применение ударных технологий в машиностроении, горнодобывающей промышленности, строительстве, приборостроении привело к значительному количеству теоретических и экспериментальных исследований в области продольного удара.

В известных работах модель учёта неудерживающих связей в задачах продольного удара стержней сводится к тому, что процесс удара считался завершённым, если в ударном сечении возникла деформация растяжения и происходил разрыв связи. Возможность повторного соударения стержней исследователями не рассматривалась. Такая модель продольного удара, с одной стороны, отсекала информацию о последующем нагружении стержня при повторных соударениях, а с другой стороны, представляла некорректную информацию о восстановлении скорости стержня при продольном ударе.

В данной работе представлена модель продольного удара стержней при разрывах связей и с учётом возникновения повторных соударений [1].

1. Постановка задачи. Рассматривается продольный удар однородного стержня 1, движущегося с предударной скоростью V_0 , по стержню 2, взаимодействующему с жёсткой преградой. Длина первого стержня l_1 и масса m_1 , длина и масса второго соответственно l_2 и m_2 (см. рис. 1). Общая длина обоих стержней $l = l_1 + l_2$. Оба стержня состоят из одного материала. Используется волновая модель [1–5].

Движение поперечных сечений соударяемых стержней описывается волновыми уравнениями

$$\frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad (1)$$

Анатолий Александрович Битюрин (к.т.н.), старший преподаватель, каф. теоретической и прикладной механики. *Владимир Кузьмич Манжосов* (д.т.н., проф.), зав. кафедрой, каф. теоретической и прикладной механики.

Рис. 1. Схема соударения однородных стержней

$$\frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad l_1 \leq x \leq l. \quad (2)$$

Начальные условия определяют состояние стержней перед их соударением при $t = t_0 = 0$:

$$\frac{\partial u_1(x, t_0)}{\partial t} = V_0, \quad \frac{\partial u_1(x, t_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x, t_0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_2(x, t_0)}{\partial x} = 0.$$

Краевые условия определяют отсутствие силы в сечении $x = 0$ и равенство нулю скорости сечения $x = l$ при взаимодействии стержня 2 с жёсткой преградой:

$$\frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2(l, t)}{\partial t} = 0,$$

а также равенство сил и условия сопряжения стержней в сечениях $x = l_1$ при непосредственном их взаимодействии:

$$\begin{aligned} EA_1 \frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial x} &= EA_2 \frac{\partial u_2(l_1, t)}{\partial x}, & \text{если } \frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial x} < 0, \\ \frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial t} &= \frac{\partial u_2(l_1, t)}{\partial t}, & \text{если } \frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial x} < 0, \end{aligned}$$

либо отсутствие сил в ударных сечениях стержней, если их взаимодействие отсутствует:

$$\frac{\partial u_1(l_1, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_2(l_1, t)}{\partial x} = 0, \quad \text{если } u_1(l_1, t) - u_2(l_1, t) \leq 0,$$

где E — модуль упругости первого рода, A_1 и A_2 — площади поперечных сечений соответственно первого и второго стержней, a — скорость распространения продольной волны деформации.

2. Метод решения. Решение дифференциальных уравнений (1), (2) реализуется методом Даламбера [2] в следующем виде:

$$u_1(x, t) = f_1(at - x) + \varphi_1(at + x), \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad (3)$$

$$u_2(x, t) = f_2(at - x) + \varphi_2(at + x), \quad l_1 \leq x \leq l_1 + l_2, \quad (4)$$

$$\varepsilon_1(x, t) = \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} = -f'_1(at - x) + \varphi'_1(at + x), \quad (5)$$

$$v_1(x, t) = \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = a[f'_1(at - x) + \varphi'_1(at + x)], \quad (6)$$

$$\varepsilon_2(x, t) = \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} = -f'_2(at - x) + \varphi'_2(at + x), \quad (7)$$

$$v_2(x, t) = \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = a[f'_2(at - x) + \varphi'_2(at + x)]. \quad (8)$$

Перейдём к относительным величинам, характеризующим прямые и обратные волны:

$$\tilde{f}'(at - x) = f'(at - x) / \left(\frac{V_0}{a} \right), \quad \tilde{\varphi}'(at + x) = \varphi'(at + x) / \left(\frac{V_0}{a} \right),$$

а также деформацию в сечении и его скорость:

$$\tilde{\varepsilon}(x, t) = -\tilde{f}'(at - x) + \tilde{\varphi}'(at + x), \quad \tilde{v}(x, t) = \frac{v(x, t)}{V_0} = \tilde{f}'(at - x) + \tilde{\varphi}'(at + x).$$

Относительные величины будут использоваться в дальнейшем.

Рассмотрим некоторое произвольное сечение j на i -том интервале времени (см. рис. 2). Это сечение является границей сопряжения j -того и $j + 1$ -го участков. На сечение j слева падает прямая волна $f_j(at - x_{j-1})$, сформированная на $(i - 1)$ -м интервале времени в $(j - 1)$ -м сечении, а справа — обратная волна $\varphi_{j+1}(at + x_{j+1})$, сформированная на $(i - 1)$ -м интервале времени в $(j + 1)$ -м сечении. Поскольку ударные волны в однородных участках имеют прямоугольный вид, волна $f_j(at - x_{j-1})$ иллюстрирована в виде левого верхнего прямоугольника переменного тона, а волна $\varphi_{j+1}(at + x_{j+1})$ — в виде правого верхнего прямоугольника.

Стрелками и направлением затемнённого растра указано направление распространения соответствующей волны деформации.

Интервал времени $\Delta t = \frac{\Delta l}{a}$ равен времени распространения волны деформации на участке длиной Δl ; x_{j-1} и x_{j+1} — координаты $j - 1$ -го и $j + 1$ -го сечений.

При преобразовании падающих волн в сечении j формируется прямая волна $f_{j+1}(at - x_j)$, распространяющаяся от сечения j к сечению $j + 1$, и обратная волна $\varphi_j(at + x_j)$, распространяющаяся от сечения j к сечению $j - 1$. Причём производные функций определяются как [2]

$$\begin{aligned} f'_{j+1}(at - x_j) &= q_f(j) f'_j(at - x_j) + r_\varphi(j) \varphi'_{j+1}(at + x_j), \\ \varphi'_j(at + x_j) &= q_\varphi(j) \varphi'_{j+1}(at + x_j) + r_f(j) f'_j(at - x_j), \end{aligned}$$

где $q_f(j) = \frac{2}{(r_{j+1})/r_j}$ — коэффициент прохождения прямой волны $f'_j(at - x_j)$, падающей на границу $x = x_j$ со стороны j -того участка; $r_j = \frac{A_j}{A_{j+1}}$ — отношение площадей поперечных сечений сопряженных j -того и $j + 1$ -го участков;

Рис. 2. Граница сопряжения однородных участков

$r_\varphi(j) = \frac{1-r_j}{1+r_j}$ — коэффициент отражения обратной волны $\varphi'_{j+1}(at + x_j)$, падающей на границу $x = x_j$ со стороны $j + 1$ -го участка; $q_\varphi(j) = \frac{2}{r_j+1}$ — коэффициент прохождения обратной волны $\varphi'_{j+1}(at + x_j)$, падающей на границу $x = x_j$ со стороны $j - 1$ -го участка; $r_f(j) = \frac{r_j-1}{r_j+1}$ — коэффициент отражения прямой волны $f'_j(at - x_j)$, падающей на границу $x = x_j$ со стороны $j - 1$ -го участка.

Деформация в сечении x_j , принадлежащим j -тому участку, определится как

$$\begin{aligned}\varepsilon_j(x_j, t) &= -f'_j(at + x_j) + q_\varphi(j)\varphi'_{j+1}(at + x_j) + r_f(j)f'_j(at - x_j) = \\ &= -(1 - r_f(j))f'_j(at + x_j) + q_\varphi(j)\varphi'_{j+1}(at + x_j).\end{aligned}$$

Деформация в сечении x_j , принадлежащим $j + 1$ -му участку, определится как:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{j+1}(x_j, t) &= -q_f(j)f'_j(at + x_j) - r_\varphi(j)\varphi'_{j+1}(at + x_j) + \varphi'_j(at - x_j) = \\ &= -q_f(j)f'_j(at + x_j) + (1 - r_\varphi(j))\varphi'_{j+1}(at + x_j).\end{aligned}$$

Равенство $\varepsilon_j(x_j, t) = \varepsilon_{j+1}(x_j, t)$ может быть только в том случае, когда $r_f(j) = 0$, $r_\varphi(j) = 0$, $q_f(j) = 1$, $q_\varphi(j) = 1$, а это возможно только тогда, когда $r_j = \frac{A_j}{A_{j+1}} = 1$, т. е. при сопряжении однородных участков. Скорости сопряженных сечений участков всегда равны между собой $v_j(x_j, t) = v_{j+1}(x_j, t)$. Разница скоростей сопряженных сечений привела бы к разрыву стержня в этих сечениях.

3. Пример расчёта. Рассмотрим продольный упругий удар о жёсткую преграду однородных стержней с длинами $l_1 = l_2 = 0,5l$. Соотношение площадей поперечных сечений первого и второго стержней $\tilde{A} = \frac{A_1}{A_2} = 0,5$ (см. рис. 2). Применим метод характеристик для построения поля состояний (см. рис. 3). Области состояний I_0 – I_5 , Π_0 – Π_6 с соответствующими значениями $\tilde{f}'(at - x)$, $\tilde{\varphi}'(at + x)$, $\tilde{\varepsilon}(x, t)$, $\tilde{v}(x, t)$ определяют параметры прямых и обратных волн деформаций, продольную деформацию и скорость поперечных сечений. Длительность состояния для произвольного сечения определяется разностью ординат t , которые имеют точки наклонных линий для этого сечения.

При $t = 2l/a$ происходит отрыв однородного стержня 2 от жёсткой преграды, при $t = 2,5l/a$ происходит отрыв в контактном сечении $x = 0,5l$.

4. Анализ результатов. Авторами осуществлялось математическое моделирование продольного удара однородных стержней с длинами $l_1 = 0,2l$, $l_1 = 0,4l$, $l_1 = 0,5l$, $l_1 = 0,6l$, $l_1 = 0,8l$ при соотношении площадей поперечных сечений предыдущего участка к последующему $\tilde{A} = 0,5$ и $\tilde{A} = 0,33$, где $\tilde{A} = \frac{A_1}{A_2}$. Анализ результатов моделирования удобнее проиллюстрировать на графике зависимости максимальной относительной продольной деформации в опасном сечении $\tilde{\varepsilon}_{\max}$ от длины начального участка l_1 и величины $\tilde{A}$ (см. рис. 4).

Выводы.

1. При ударе однородного стержня о стержень, взаимодействующий с преградой, при $l_1 = 0,4l$, $\tilde{A} = 0,5$ наблюдается повторное соударение стержней

Рис. 3. Поле состояний при ударе системы однородных стержней о жёсткую преграду

в контактном сечении $x = l_1$. При других соотношениях длин однородных участков повторные соударения не наблюдаются.

2. Исходя из анализа графика следует отметить, что максимальная относительная продольная деформация $\tilde{\varepsilon}_{\max}$ в опасном сечении будет зависеть от длины l_1 и от параметра A . При переходе l_1 через значение $0,5l$ максимальная деформация $\tilde{\varepsilon}_{\max}$ изменяется скачкообразно от значений $0,67 \div 0,75$ до $1,10 \div 1,12$ (рис. 4).

Используя данные математического моделирования, можно рассчитать значение абсолютной деформации (удлинение или укорочение) любого i -того

Рис. 4. Зависимость максимальной относительной продольной деформации $\tilde{\varepsilon}_{\max}$: 1 — $\tilde{\varepsilon}_{\max}(l_1)$ при $\tilde{A} = 0,5$; 2 — $\tilde{\varepsilon}_{\max}(l_1)$ при $\tilde{A} = 0,33$

участка стержневой системы Δl_i , поскольку имеет место зависимость, полученная с учётом [6] и (3)–(8):

$$\Delta l_i = l_i \tilde{\varepsilon} \frac{V_0}{a},$$

где Δl_i — абсолютная продольная деформация i -того участка стержневой системы, l_i — длина этого участка.

Как видно, изменение линейных размеров стержневой системы будет зависеть от относительной продольной деформации, начальной предупредной скорости и характеристик материала.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Битюрин А. А., Манжосов В. К. Изменение деформации на участках стержневой системы после повторного удара в контактном сечении // *Вестн. УлГТУ*, 2007. — № 3. — С. 23–28.
2. Александров Е. В., Соколинский В. Б. Прикладная теория и расчёт ударных систем. — М.: Наука, 1969. — 199 с.
3. Алимов О. Д., Манжосов В. К., Еремьянц В. Э. Распространение волн деформаций в ударных системах. — М.: Наука, 1985. — 354 с.
4. Битюрин А. А., Манжосов В. К. Моделирование продольного удара однородных стержней при неудерживающих связях // *Вестн. УлГТУ*, 2005. — № 3. — С. 23–25.
5. Манжосов В. К. Модели продольного удара. — Ульяновск, 2006. — 159 с.
6. Дарков А. В., Шпиро Г. С. Сопротивление материалов. — М.: Высш. шк., 2003. — 641 с.

Поступила в редакцию 04/ХП/2008;
в окончательном варианте — 15/П/2009.

MSC: 65M25, 68T35, 12L12

**MATHEMATICAL MODELING OF LONGITUDINAL BLOW OF THE
SYSTEM OF HOMOGENEOUS RODS ABOUT RIGID BARRIER AT
NOT-HOLDING CONNECTIONS**

A. A. Bityurin, V. K. Manzhosov

Ulyanovsk State Technical University,
432027, Ulyanovsk, Nothern Venetz str., 32.

E-mail: Denjgy0706@yandex.ru

Mathematical modeling of the longitudinal elastic central blow of the rod system, consisting of two homogeneous rods of various lengths and the area of cross section over a rigid barrier is implemented at not-holding connections.

Key words: *deformation, modeling, longitudinal blow, rod.*

Original article submitted 04/XII/2008;
revision submitted 15/II/2009.

Anatoliy A. Bityurin (Ph. D. (Techn.)), Lecturer, Dept. of Theoretical & Applied Mechanics.
Vladimir K. Manzhosov (Dr. Sci. (Techn.)), Head of Dept., Dept. of Theoretical & Applied Mechanics.