Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Заусаев, Д. А. Заусаев, Интегрирование уравнений движения малых тел Солнечной системы методом оскулирующих элементов, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 1(), 222–227

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu653>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 14:32:22

Небесная механика и астрономия

УДК 523.642

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАЛЫХ ТЕЛ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ ОСКУЛИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. Ф. Заусаев, Д. А. Заусаев

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: Zausaev_AF@mail.ru

Предложен алгоритм метода оскулирующих элементов для численного интегрирования уравнений движения малых тел Солнечной системы.

Ключевые слова: интерполяция, численное интегрирование, дифференциальные уравнения движения, метод оскулирующих элементов.

Дифференциальные уравнения движения. В связи с решением проблемы астероидной опасности исследование эволюции орбит малых тел Солнечной системы (астероидов, комет, крупных фрагментов в метеорных потоках) является актуальной задачей.

Большое значение имеет выбор математической модели, описывающей движение небесных тел. Учет лишь гравитационных взаимодействий, который заложен в стандартных уравнениях движения задачи n тел, оказывается недостаточным. Это приводит к более сложной форме дифференциальных уравнений движения, где наряду с гравитационными эффектами учитываются релятивистские эффекты, фигура планет и Солнца, реактивные силы и т. д.

В работе [1] предложен интерполяционный метод оскулирующих элементов, используемый для получения координат и элементов орбит больших планет и малых тел Солнечной системы. Этот метод предназначен для работы с банком данных координат и элементов орбит малых тел Солнечной системы и обеспечивает требуемую точность на ограниченном интервале времени — порядка 100 дней. Данное ограничение связано с тем, что смещение исследуемого объекта на каждом шаге интегрирования проводилось по невозмущенным кеплеровским орбитам. Возмущение от больших планет учитывалось только в конце шага интегрирования. Однако при использовании данного метода для численного интегрирования уравнений движения на интервале времени порядка нескольких сотен лет следует учитывать изменение элементов орбит

Заусаев Анатолий Федорович — профессор кафедры прикладной математики и информатики; д.ф.-м.н., проф.

Заусаев Дмитрий Анатольевич — студент специальности «Прикладная математика и информатика».

на каждом шаге интегрирования. Для решения поставленной задачи необходимо из уравнений движения, приведенных в работе [1], получить дифференциальные уравнения движения для задачи двух тел и проинтегрировать их.

Рассмотрим сначала абсолютное движение двух тел относительно произвольной инерционной системы отсчета. Обозначим через $\boldsymbol{\rho}_0$ и $\boldsymbol{\rho}$ векторы тел S и M , определяющие их положения относительно начала координат O выбранной инерционной системы координат. Положение тела M относительно S будет определяться вектором $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0$. Тогда дифференциальные уравнения движения, приведенные в работе [1] в векторной форме, определяющие движение тел S и M , запишутся так:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}_0}{dt^2} &= \frac{3a_{om}r_{om}^2}{r^2 + r\sqrt[3]{r^3 - r_{om}^3} + \sqrt[3]{(r^3 - r_{om}^3)^2}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \\ \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} &= \frac{3a_{os}r_{os}^2}{r^2 + r\sqrt[3]{r^3 - r_{os}^3} + \sqrt[3]{(r^3 - r_{os}^3)^2}} \cdot \left(-\frac{\mathbf{r}}{r}\right), \end{aligned} \quad (1)$$

где r_{om} , r_{os} — эффективные радиусы тел M и S ; a_{om} , a_{os} — соответствующие ускорения на расстоянии r_{om} и r_{os} , r — расстояние между центрами S и M .

Вычитая из второго уравнения (1) первое, получим уравнение, определяющее движение тела M относительно S :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= - \left(\frac{3a_{os}r_{os}^2}{r^2 + r\sqrt[3]{r^3 - r_{os}^3} + \sqrt[3]{(r^3 - r_{os}^3)^2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3a_{om}r_{om}^2}{r^2 + r\sqrt[3]{r^3 - r_{om}^3} + \sqrt[3]{(r^3 - r_{om}^3)^2}} \right) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \end{aligned} \quad (2)$$

Полагая, что r_{om} и a_{om} тела M пренебрежимо малы по сравнению с r_{os} и a_{os} тела S , что справедливо, если в качестве тела S рассматривать Солнце или большую планету, а в качестве тела M — астероид или комету, получим уравнение движения тела M относительно S в следующей форме:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{3a_{os}r_{os}^2}{r^2 + r\sqrt[3]{r^3 - r_{os}^3} + \sqrt[3]{(r^3 - r_{os}^3)^2}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (3)$$

Ограничиваясь членами первого порядка относительно $\frac{r_0^3}{r^3}$ в разложениях $\left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right)^{\frac{1}{3}}$ и $\left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right)^{\frac{2}{3}}$ в бесконечный ряд, уравнения (3) можно представить в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{a_{os}r_{os}^2}{r^3} \left(1 + \frac{r_{os}^3}{3r^3}\right). \quad (4)$$

Полагая, что $a_{os}r_{os}^2 = \mu$; $\frac{r_{os}^3}{3} = \varepsilon$, запишем уравнение (4) следующим образом:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} \left(1 + \frac{\varepsilon}{r^3}\right). \quad (5)$$

Как показано в работе [3], из уравнений (5) следует, что возмущения в большой полуоси, эксцентриситете и в движении линии апсид можно вычислить по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\varphi} &= -\frac{2e\varepsilon}{a^2(1-e^2)^5} \sin \varphi (1+e \cos \varphi)^3, \\ \frac{de}{d\varphi} &= -\frac{\varepsilon}{a^3(1-e^2)^3} \sin \varphi (1+e \cos \varphi)^3, \\ \frac{d\omega}{d\varphi} &= \frac{\varepsilon}{ea^3(1-e^2)^3} \cos \varphi (1+e \cos \varphi)^3,\end{aligned}\tag{6}$$

где a — большая полуось, e — эксцентриситет, φ — истинная аномалия возмущаемого тела, ω — аргумент перигелия.

Изменение элементов орбит за время одного полного оборота находится интегрированием по полярному углу φ (истинная аномалия).

Легко убедиться в том, что большая полуось и эксцентриситет не имеют вековых изменений, в то время как линия апсид в течении каждого оборота поворачивается в прямом направлении на угол

$$\Delta\omega = \frac{\varepsilon}{ea^3(1-e^2)^3} \int_0^{2\pi} \cos \varphi (1+e \cos \varphi)^3 d\varphi,\tag{7}$$

величина которого с учётом членов первого порядка относительно эксцентриситета такова:

$$\Delta\omega = \frac{3\pi\varepsilon}{a^3(1-e^2)^3}.$$

При соответствующем выборе постоянной ε можно получить удовлетворительное количественное объяснение невязок в движении линии апсид планетных орбит.

Таким образом, эффект смещения линии апсид в прямом направлении, как следует из (7), должен наблюдаться в невозмущенной задаче двух тел. При численном интегрировании уравнений движения малых тел Солнечной системы методом оскулирующих элементов начальными данными являются координаты x, y, z и скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ исследуемого объекта, а также координаты и скорости больших планет $x_i, y_i, z_i; \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ в экваториальной системе координат на момент времени t_0 .

Нахождение элементов орбит по координатам и скоростям. По известным координатам и скоростям находим элементы орбит по формулам [4]

$$\frac{1}{a} = \left| \frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu} \right|,\tag{8}$$

где a — большая полуось орбиты; $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, $\mu = a_0 r_{os}^2$.

Эксцентриситет e и эксцентрическая аномалия E на момент времени t_0 вычисляются из соотношений

$$e \sin E = \frac{r \dot{r}}{\mu \sqrt{a}}, \quad e \cos E = 1 - \frac{r}{a},\tag{9}$$

где $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}$. Затем с помощью уравнения Кеплера

$$M_0 = E - e \sin E \quad (10)$$

вычисляется средняя аномалия в эпоху t_0 .

Из соотношений

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu p} \sin i \sin \Omega &= y\dot{z} - z\dot{y}, \\ \sqrt{\mu p} \sin i \sin \cos \Omega &= x\dot{z} - z\dot{x}, \\ \sqrt{\mu p} \cos i &= x\dot{y} - y\dot{x}, \end{aligned} \quad (11)$$

находятся наклонение i и долгота восходящего узла Ω , отнесенные к экватору, а также параметр p .

Аргумент перигелия ω находится по формулам

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} v &= \frac{\sqrt{p} r \dot{r}}{k(p-r)}, & \operatorname{tg} u &= \frac{z \cos i}{x \cos \Omega + y \sin \Omega}, \\ \omega &= u - v, & \omega &= \omega + \Delta\omega. \end{aligned} \quad (12)$$

Вычисление координат и скоростей по элементам орбит. Экваториальные координаты x, y, z и скорости $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ на следующем шаге $h = t - t_0$ вычисляются с помощью следующих формул [4]:

$$M = n(t - t_0) + M_0, \quad (13)$$

$$E - e \sin E = M, \quad (14)$$

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad (15)$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v}, \quad (16)$$

$$\omega = v + \omega, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь M — средняя аномалия; $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ — среднесуточное движение, t_0 — начальный момент времени (эпоха), M_0 — средняя аномалия в эпоху, E — эксцентрическая аномалия, v — истинная аномалия, u — аргумент широты.

Пусть V — скорость, V_r — радиальная скорость, V_k — трансверсальная скорость. Тогда

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (19)$$

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v, \quad (20)$$

$$V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos v). \quad (21)$$

Для нахождения экваториальных координат скорости продифференцируем по времени формулы (18), получим

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{x}{r}V_r + (-\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i)V_n, \\ \dot{y} &= \frac{y}{r}V_r + (-\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i)V_n, \\ \dot{z} &= \frac{z}{r}V_r + \cos u \sin i V_n.\end{aligned}\tag{22}$$

Для учёта возмущающего действия от больших планет уравнения движения возмущаемого тела следует представить в гелиоцентрической системе координат. При переходе от барицентрической системы координат к гелиоцентрической уравнения движения возмущаемого тела, приведенные в работе [1], с учётом формулы (3) запишутся в виде

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{3a_{oo}r_{os}^2}{r^2 + r\sqrt[3]{r^3 - r_{os}^3} + \sqrt[3]{(r^3 - r_{os}^3)^2}} \cdot \frac{x}{r} + X, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{3a_{oo}r_{os}^2}{r^2 + r\sqrt[3]{r^3 - r_{os}^3} + \sqrt[3]{(r^3 - r_{os}^3)^2}} \cdot \frac{y}{r} + Y, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{3a_{oo}r_{os}^2}{r^2 + r\sqrt[3]{r^3 - r_{os}^3} + \sqrt[3]{(r^3 - r_{os}^3)^2}} \cdot \frac{z}{r} + Z,\end{aligned}\tag{23}$$

где

$$\begin{aligned}X &= \sum_i \left(\frac{x_i - x}{\Delta_i} \cdot \frac{3a_{oi}r_{oi}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i\sqrt[3]{\Delta_i^3 - r_{oi}^3} + \sqrt[3]{(\Delta_i^3 - r_{oi}^3)^2}} + \frac{x_i}{r_i} \frac{3a_{oi}r_{oi}^2}{r_i^2 + r_i\sqrt[3]{r_i^3 - r_{oi}^3} + \sqrt[3]{(r_i^3 - r_{oi}^3)^2}} \right), \\ Y &= \sum_i \left(\frac{y_i - y}{\Delta_i} \cdot \frac{3a_{oi}r_{oi}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i\sqrt[3]{\Delta_i^3 - r_{oi}^3} + \sqrt[3]{(\Delta_i^3 - r_{oi}^3)^2}} + \frac{y_i}{r_i} \frac{3a_{oi}r_{oi}^2}{r_i^2 + r_i\sqrt[3]{r_i^3 - r_{oi}^3} + \sqrt[3]{(r_i^3 - r_{oi}^3)^2}} \right), \\ Z &= \sum_i \left(\frac{y_i - y}{\Delta_i} \cdot \frac{3a_{oi}r_{oi}^2}{\Delta_i^2 + \Delta_i\sqrt[3]{\Delta_i^3 - r_{oi}^3} + \sqrt[3]{(\Delta_i^3 - r_{oi}^3)^2}} + \frac{z_i}{r_i} \frac{3a_{oi}r_{oi}^2}{r_i^2 + r_i\sqrt[3]{r_i^3 - r_{oi}^3} + \sqrt[3]{(r_i^3 - r_{oi}^3)^2}} \right), \\ \Delta_i^2 &= (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2; r_{oi} - \text{эффективный радиус } i\text{-того тела}; \\ a_{oi} &- \text{соответствующее ускорение для } i\text{-того тела на расстоянии } r_{oi} \text{ от центра массы}; X, Y, Z - \text{возмущающие ускорения от больших планет}.\end{aligned}$$

Исправляя найденные координаты и скорости за счет возмущающего действия от больших планет, окончательно получим координаты и скорости на следующем шаге интегрирования:

$$x_{n+1} = x'_{n+1} + \frac{h^2}{2}X, \quad y_{n+1} = y'_{n+1} + \frac{h^2}{2}Y, \quad z_{n+1} = z'_{n+1} + \frac{h^2}{2}Z,\tag{24}$$

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}'_{n+1} + hX, \quad \dot{y}_{n+1} = \dot{y}'_{n+1} + hY, \quad \dot{z}_{n+1} = \dot{z}'_{n+1} + hZ,\tag{25}$$

где $x'_{n+1}, y'_{n+1}, z'_{n+1}, \dot{x}'_{n+1}, \dot{y}'_{n+1}, \dot{z}'_{n+1}$ — координаты и компоненты вектора скорости возмущаемого тела на $n+1$ шаге, вычисленные без учёта возмущающего действия от больших планет; $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}, \dot{x}_{n+1}, \dot{y}_{n+1}, \dot{z}_{n+1}$ — координаты и компоненты вектора скорости возмущаемого тела на $n+1$ шаге, полученные с учётом возмущающего действия от больших планет и Луны.

Таким образом, координаты радиус-вектора и скорости возмущаемого тела в точке t_{n+1} , если они известны в точке t_n , методом оскулирующих элементов вычисляются следующим образом:

- а) по формулам (8)–(12) находятся элементы орбит исследуемого объекта на момент времени t_n ;
- б) с использованием формул (13)–(22) вычисляются координаты и скорости данного объекта на момент времени t_{n+1} , при этом исправляется величина аргументы перигелия по формулам (12);
- в) с помощью формулы (24) определяются окончательные координаты и компоненты скорости объекта на момент времени t_{n+1} с учётом возмущающего действия от больших планет и Луны.

Эффективность предложенного метода можно существенно повысить, если для координат и скоростей больших планет использовать заранее полученный банк данных.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по образованию (РНП. 2.1.1/745).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зайцаев А. Ф., Зайцаев Д. А. Эволюция методы интерполяции, используемые для получения координат и элементов орбит больших планет и малых тел Солнечной системы // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. — № 2(17). — С. 231–238.
2. Standish E. M. JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE / In: *Jet Lab Technical Report. IOM 321. F-048*, 1998. — Р. 1–7.
3. Богородский А. Ф. Всемирное тяготение. — Киев: Наукова думка, 1971. — 353 с.
4. Зайцаев А. Ф., Зайцаев А. А. Математическое моделирование орбитальной эволюции малых тел Солнечной системы. — М.: Машиностроение-1, 2008. — 250 с.

Поступила в редакцию 08/XII/2008;
в окончательном варианте — 09/II/2009.

MSC: 85-08

INTEGRATION OF EQUATIONS OF SOLAR SYSTEM SMALL BODIES MOTION WITH OSCULATING ELEMENTS METHOD

A. F. Zausaev, D. A. Zausaev

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100.
E-mails: Zausaev_AF@mail.ru

Algorithm of osculating elements method for numerical integration of equations of Solar system small bodies' motion is introduced.

Key words: *interpolation, numerical integration, differential equations of motion, method of osculating elements.*

Original article submitted 08/XII/2008;
revision submitted 09/II/2009.

Zausaev Anatoliy Fedorovich, Ph. D. (Phys. & Math.), Prof., Dept. of Applied Mathematics and Computer Science.

Zausaev Dmitriy Anatol'evich, Student, Dept. of Applied Mathematics and Computer Science.