Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. И. Кадашевич, С. П. Помыткин, Описание процессов ползучести и релаксации материалов в рамках эндохронной теории неупругости для больших деформаций, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 1(), 61–65

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu657>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 06:02:08

УДК 539.376

ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПОЛЗУЧЕСТИ И РЕЛАКСАЦИИ
МАТЕРИАЛОВ В РАМКАХ ЭНДОХРОННОЙ ТЕОРИИ
НЕУПРУГОСТИ ДЛЯ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Ю. И. Кадашевич, С. П. Помыткин

Санкт-Петербургский государственный технологический
университет растительных полимеров,
198095 Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 4.

E-mails: sprom@yandex.ru

Предлагаются определяющие соотношения теории вязкопластичности эндохронного типа, распространенные на область больших деформаций. Для некоторых видов градиентов деформации анализируются разрешающие уравнения неупругого поведения материалов. Приводятся примеры расчета отклика материала на нагрузку и деформацию в процессе ползучести и релаксации напряжений. Полученные результаты сравниваются с экспериментальными наблюдениями и результатами других исследователей.

Ключевые слова: неупругость, ползучесть, релаксация, большие деформации, эндохронная теория, определяющие соотношения.

Введение. Попытки применить эндохронную теорию для описания многочисленных и разнообразных проявлений поведения материалов в процессе ползучести начались сразу же после возникновения подхода [1] неоднократно предпринимались в течение ряда лет [2, 3], продолжают они и в настоящее время [4]. В последние годы для обобщения эндохронного подхода некоторые исследователи начали учитывать в определяющих уравнениях вязкопластичности и ползучести геометрическую нелинейность при деформировании среды [5, 6]. В предлагаемой статье на примере ряда задач ползучести и релаксации представлена попытка продемонстрировать возможности одного из вариантов эндохронной теории, распространенного на область больших деформаций.

Определяющие уравнения. В работе [6] были предложены принципы обобщения теории неупругости, учитывающей вязкие свойства материалов, на область больших деформаций. Рекомендованный в ней рабочий вариант определяющих соотношений эндохронного типа имел следующий вид:

$$\frac{\alpha\tau}{2G} \overset{\circ}{\sigma} + \frac{\sigma}{2G} |\dot{r}| = \tau \overset{\circ}{r} + \frac{r}{g + \alpha} |\dot{r}|, \quad (1)$$

$$r = \varepsilon - (1 - \alpha) \frac{\sigma}{2G}. \quad (2)$$

Здесь (в безындексной форме записи для тензоров) обозначены: σ — девиатор тензора напряжений, ε — девиатор тензора деформаций, r — девиатор вспомогательного параметрического тензора, τ — аналог деформационного предела текучести, g — аналог коэффициента упрочнения, α — параметр эндохронности ($0 \leq \alpha \leq 1$), G — модуль сдвига.

Кадашевич Юлий Исаакович — профессор кафедры высшей математики; д.ф.-м.н., проф.
Помыткин Сергей Павлович — доцент кафедры высшей математики; к.-ф.м.н., доцент.

Учитывая вязкие свойства материалов, предположим, что параметр τ зависит от интенсивности параметрического тензора $|r| = \int dr$ и её производной $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ по физическому времени t :

$$\tau = \tau(|r|, |\dot{r}|). \quad (3)$$

Подставив (2) в (1), получим связь между напряжениями и деформациями:

$$\frac{\alpha\tau}{2G} \overset{\circ}{\sigma} + \frac{\sigma}{2G} \frac{g+1}{g+\alpha} |\dot{r}| = \tau \overset{\circ}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{g+\alpha} |\dot{r}|. \quad (4)$$

Объективные производные тензоров σ и ε в (4) определяются формулами типа Грина—Нахди:

$$\overset{\circ}{\sigma} = \dot{\sigma} + \sigma\Omega - \Omega\sigma, \quad \overset{\circ}{\varepsilon} = \dot{\varepsilon} + \varepsilon\Omega - \Omega\varepsilon.$$

При этом

$$\Omega = \dot{Q}Q^T, \quad \overset{\circ}{\varepsilon} = D, \quad (5)$$

где Q — ортогональный тензор поворота, D — тензор скоростей деформаций: $D = \frac{1}{2}(L + L^T)$, $L = \dot{F}F^{-1}$, причём $Q = Fu^{-1}$ — полярное разложение ортогонального тензора поворота, F — градиент деформации, u — правый тензор удлинения.

Второе соотношение в группе (5) выступает в качестве уравнения для определения тензора деформаций — фактически, как мера деформаций, порожденных нейтральной коротационной производной [6, 7]:

$$\varepsilon = Q \left(\int Q^T D Q dt \right) Q^T.$$

Разрешающая система уравнений. Если предположить в (4) (для простоты восприятия), что $\alpha = 1$, $2G = 1$ и $\tau = k_0|\dot{r}|$, то получим

$$k_0 \cdot \overset{\circ}{\sigma} + \sigma = k_0 \cdot \overset{\circ}{\varepsilon} + k \cdot \varepsilon, \quad (6)$$

где через k обозначено $k = \frac{1}{g+1}$.

Рассмотрим возможности этих простейших геометрически нелинейных определяющих соотношений для широко применяемого класса градиентов деформаций вида

$$F = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае тензор скоростей деформации D имеет следующую структуру:

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

или покомпонентно

$$D_{11} = \frac{\dot{k}_{11}}{k_{11}}, \quad D_{12} = \frac{k_{11}\dot{k}_{12} - \dot{k}_{11}k_{12}}{2}, \quad D_{22} = -D_{11},$$

а ортогональный тензор поворота Q и тензор вихря Ω выразятся как

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \dot{\beta} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{k_{11} \cdot k_{12}}{1 + k_{11}^2}.$$

(При вычислении тензора поворота Q было учтено, что правый тензор удлинения u и обратный ему u^{-1} считаются симметричными, что привело, в частности, к соотношениям $k_{22} = k_{11}^{-1}$ и $D_{22} = -D_{11}$).

При этих условиях и предположениях итоговая система уравнений, определяющая связь между напряжениями и деформациями, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} k_0(\dot{\sigma}_{11} - 2\sigma_{12}\dot{\beta}) + \sigma_{11} = k_0 D_{11} + k\varepsilon_{11}, \\ k_0(\dot{\sigma}_{22} + 2\sigma_{12}\dot{\beta}) + \sigma_{22} = k_0 D_{22} + k\varepsilon_{22}, \\ k_0(\dot{\sigma}_{12} + (\sigma_{11} - \sigma_{22})\dot{\beta}) + \sigma_{12} = k_0 D_{12} + k\varepsilon_{12}, \\ \dot{\varepsilon}_{11} - 2\varepsilon_{12}\dot{\beta} = D_{11}, \\ \dot{\varepsilon}_{22} + 2\varepsilon_{12}\dot{\beta} = D_{22}, \\ \dot{\varepsilon}_{12} + (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})\dot{\beta} = D_{12}, \\ \dot{k}_{11} = D_{11}k_{11}, \\ \dot{k}_{22} = D_{22}k_{22}, \\ \dot{k}_{12} = 2D_{12}k_{22} + D_{11}k_{12}. \end{cases}$$

Демонстрационные задачи. Рассмотрим в качестве примера два классических случая вязкого неупругого поведения материала: ползучесть и релаксацию напряжений.

В процессе реализации процесса ползучести на первой стадии производим «быструю» жёсткую нагрузку материала по схеме $D_{ij} = \text{const}$, от нулевых значений компонент напряжений до некоторых фиксированных величин $\sigma_{11} = \sigma_{11}^0$, $\sigma_{22} = \sigma_{22}^0$, $\sigma_{12} = \sigma_{12}^0$, а затем, оставляя полученные напряжения постоянными, отслеживаем изменение компонент тензора деформаций во времени: $\varepsilon_{11}(t)$, $\varepsilon_{22}(t)$, $\varepsilon_{12}(t)$.

Отметим сразу, что теоретические кривые монотонного активного нагружения, предвещающего процесс ползучести, могут иметь различный вид в зависимости от величины параметра упрочнения k , как это, например, представлено на рис. 1 для схемы простого сдвига: $D_{11} = 0$, $D_{22} = 0$, $D_{12} = 1$. Релаксация осевого напряжения после достижения им максимума (при активном сдвиге), представленная на рис. 1 а, по-видимому, впервые экспериментально была обнаружена в [8] и названа исследователями «эффектом осцилляции». А вогнутый характер кривой $\sigma_{12} \sim t$ на рис. 1 в может быть без труда обоснован в рамках концепции затвердевания материала [9].

На рис. 2 представлены графики зависимости компонент деформации ε_{11} и ε_{12} от времени t при фиксированных значениях напряжений $\sigma_{11}^0 = -\sigma_{22}^0 = 0,15$ и $\sigma_{12}^0 = 0,95$ после монотонного нагружения. Здесь также вид кривых «накопления» деформаций в процессе ползучести зависит от коэффициента

Рис. 1. Активное нагружение материала для разных k :
 $a - k = 0$, $б - k = 0,15$, $в - k = 5$

упрочнения k . Убывание сдвиговой деформации ε_{12} на рис. 2 в при больших (для рассматриваемой модели) значениях k также может быть объяснено с использованием гипотезы о затвердевании материала [9]. (На графиках рисунков указаны безразмерные значения времени и напряжения, отнесенные к пределу текучести материала, при $k_0 = 1$).

Рис. 2. Развитие деформаций ползучести для разных k :
 $a - k = 0$, $б - k = 0,15$, $в - k = 0,3$

На рис. 3 показаны графики релаксации напряжений после активного деформирования материала простым сдвигом: $D_{11} = 0$, $D_{22} = 0$, $D_{12} = 1$ до значений компонент тензора деформации на уровне $\varepsilon_{11} = 0,4$, $\varepsilon_{22} = -0,4$, $\varepsilon_{12} = 0,87$ и дальнейшего их фиксирования путём обнуления тензора скоростей деформации D_{ij} . Полученные теоретические кривые качественно не отличаются от обычно наблюдаемого в эксперименте на релаксацию поведения компонент тензора напряжений.

Рис. 3. Релаксация напряжений после активного нагружения

Закключение. Таким образом, геометрически нелинейные определяющие соотношения между напряжениями и деформациями эндохронного типа поз-

воляют описывать как традиционные проявления вязких свойств материала, так и достаточно тонкие эффекты второго порядка.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-01-00036-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Valanis K. C., Wu H. C. Endochronic representation of cyclic creep and relaxation of metals // *Trans. of ASME.*, 1975. — Vol. E 42, No. 1. — P. 67–73.
2. Watanabe O., Athuri S. N. Constitutive modeling of cyclic plasticity and creep, using an internal time concept // *Intern. J. of Plasticity*, 1986. — Vol. 2, No. 2. — P. 107–134.
3. Lee C. F. A simple endochronic transient creep model of metals with application to variable temperature creep // *Intern. J. of Plasticity*, 1996. — Vol. 12, No. 2. — P. 239–253.
4. Федоровский Г. Д. Об эндохронном представлении технических теорий нелинейной ползучести / В сб.: *Математ. моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов*: Труды XXI международной конференции (4–7 октября 2005 г., Санкт-Петербург). — СПб: БВМ, 2006. — С. 470–474.
5. Khoei A. R., Bakhshiani A., Modif M. An implicit algorithm for hypoelastic-plastic and hypoelastic-viscoplastic endochronic theory in finite strain isotropic-kinematic hardening model // *Intern. J. of Solids and Struct.*, 2003. — Vol. 40, No. 13–14. — P. 3393–3423.
6. Кадашев Ю. И., Помыткин С. П. Эндохронная теория ползучести, учитывающая конечные деформации // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004. — № 26. — С. 83–85.
7. Бровко Г. Л. Свойства и интегрирование некоторых производных от тензорных процессов в механике сплошной среды // *Извест. АН СССР. МТТ*, 1990. — № 1. — С. 54–60.
8. Montheillet F., Cohen M., Jonas J. J. Axial stresses and texture development during the torsion testing of Al, Cu, α -Fe // *Acta Metallurgica*, 1984. — Vol. 32, No. 11. — P. 2077–2089.
9. Иванов Б. Ф., Кадашев Ю. И., Помыткин С. П. Эндохронная теория неупругости, учитывающая течение, затвердевание и микроразрушение материала / В сб.: *Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения. Т. 1.*: Тр. международ. кон-ции RELMAS-2008 (17–20 июня 2008 г., Санкт-Петербург). — СПб: СПбГТУ, 2008. — С. 143–146.

Поступила в редакцию 29/XII/2008;
в окончательном варианте — 19/I/2009.

MSC: 74C20

DESCRIPTION OF CREEP AND STRESS RELAXATION PROCESSES IN MATERIALS WITHIN ENDOCHRONIC THEORY OF NON-ELASTICITY FOR LARGE DEFORMATIONS

Yu. I. Kadashevich, S. P. Pomytkin

Saint-Petersburg State Technological University of Plant Polymers,
198095, Saint-Petersburg, ul. Ivana Chernykh, 4.

E-mails: sppom@yandex.ru

Endochronic constitutive equations in viscoplastic theory for large strain domain are studied. For some deformation gradients equations solving non-elastic problem are analyzed. Theoretical behavior of materials is demonstrated at creep and stress relaxation conditions. Obtained results are compared to experimental data and results obtained by other researchers.

Key words: non-elasticity, creep, relaxation, large strains, endochronic theory, constitutive equations.

Original article submitted 29/XII/2008;
revision submitted 19/I/2009.

*Kadashevich Yulij Isaakovich, Dr. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Dept. of Mathematics.
Pomytkin Sergei Pavlovich, Dr. Sci. (Phys. & Math.), Ass. Prof., Dept. of Mathematics.*