Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича–Галёркина, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 1(), 149–158

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu658>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 08:17:37

УДК 534.11

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ СВОЙСТВ МЕХАНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ДВИЖУЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА КАНТОРОВИЧА—ГАЛЁРКИНА

В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов

Сызранский филиал Самарского государственного технического университета, 446001, Самарская обл., Сызрань, ул. Советская, 45.

E-mails: anisimov170159@mail.ru, vladlitvinov@rambler.ru

Разработана обобщенная методика использования метода Канторовича в совокупности с методом Галёркина для исследования резонансных свойств механических систем с движущимися границами.

Ключевые слова: резонансные свойства, механические системы с движущимися границами, амплитуда колебаний.

В настоящее время вопросы надежности при проектировании машин и механизмов требуют все более полного учета динамических явлений, имеющих место в проектируемых объектах. Широкое распространение в технике имеют механические объекты с движущимися границами. Это канаты в грузоподъемных установках, ленты в лентопротяжных механизмах, звенья передач с гибкой связью, стержни твердого топлива при сгорании и т. д.

Точные методы решения таких задач ограничены волновым уравнением и сравнительно простыми граничными условиями [1]. Из приближенных методов наиболее эффективен метод Канторовича—Галёркина. Он использовался ранее в работе [2] для решения волнового уравнения и уравнения изгибных колебаний балки при несложных однородных граничных условиях, заданных на одной движущейся и одной неподвижной границах.

В данной работе метод распространен на более широкий класс задач, которые в случае неподвижных границ могут быть решены методом разделения переменных. Особое внимание уделено анализу получаемых решений на резонансные свойства. Произведена оценка точности метода в зависимости от скорости движения границ.

Пусть требуется получить решение дифференциального уравнения в частных производных

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[U(\xi, \tau)] = \phi(\xi, \tau) \quad (1)$$

при граничных условиях

$$Y_{ji}[U(l_j(\varepsilon\tau), \tau)] = F_{ji}(\tau); \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

где L — линейный однородный дифференциальный оператор по переменной ξ порядка $2m$; Y_{ji} — линейные однородные дифференциальные операторы по ξ ; $\phi(\xi, \tau)$, $F_{ji}(\tau)$ — заданные функции; ε — малый параметр (обычно величина ε соизмерима с v/a , v — скорость границы, a — скорость распространения колебаний).

Анисимов Валерий Николаевич — доцент кафедры общетеоретических дисциплин; к.ф.-м.н., доцент.

Литвинов Владислав Львович — преподаватель кафедры общетеоретических дисциплин.

Запись законов движения границ в виде $l_j(\varepsilon\tau)$ соответствует режиму медленного движения. Уравнение (1) и граничные условия (2) — самосопряжённые, и в случае неподвижности границ ($l_j(\varepsilon\tau) = \text{const}$) может быть получено точное решение методом разделения переменных.

Заметим, что метод Канторовича—Галёркина позволяет учесть и начальные условия. Однако цель статьи — анализ резонансных свойств, а начальные условия не влияют на резонансные свойства линейных систем, поэтому в задаче (1), (2) начальные условия опущены.

Для того чтобы избавиться от неоднородностей в граничных условиях, вводится новая функция

$$U(\xi, \tau) = V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau), \quad (3)$$

где

$$H(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau) F_{kr}(\tau),$$

а функция $D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)$ удовлетворяют уравнению

$$L[D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)] = 0 \quad (4)$$

и условиям

$$Y_{ji}[D_{kr}(l_j(\varepsilon\tau), \tau)] = \begin{cases} 1, & k = j \wedge r = i, \\ 0, & k \neq j \vee r \neq i. \end{cases} \quad (5)$$

Решение задачи (4), (5) затруднений, как правило, не вызывает, и поэтому здесь она подробно не рассматривается.

Функция $V(\xi, \tau)$ находится как решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} V_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[V(\xi, \tau)] &= \phi(\xi, \tau) - H_{\tau\tau}(\xi, \tau), \\ Y_{ji}[V(l_j(\varepsilon\tau), \tau)] &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для решения задачи используем метод Канторовича в совокупности с методом Галёркина. Решение задачи будем искать в виде

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau), \quad (7)$$

где $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ — собственные функции следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} L[X_n(\xi, \varepsilon\tau)] &= \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau); \\ Y_{ji}[X_n(l_j(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau)] &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$ — собственные частоты задачи. Оператор L не содержит производной по τ , поэтому величина $\varepsilon\tau$ рассматривается как параметр.

Такой выбор координатных функций X_n обуславливает тот факт, что решение (7) является точным в случае, если границы неподвижны. При увеличении скорости движения границ точность метода будет уменьшаться.

Заметим, что функции $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ удовлетворяют граничным условиям (6) и играют в данном случае роль динамических, т. е. изменяющихся со временем, мод.

Разложим функции $H(\xi, \tau)$ в ряд Фурье:

$$H(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau), \quad (9)$$

где

$$\phi_n(\tau) = \frac{\int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} H(\xi, \tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d\xi}{\int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d\xi}.$$

Здесь $q(\xi)$ — весовая функция.

Тогда, согласно методу Галёркина, с учётом (8), (9), функции $f_n(\tau)$ будут удовлетворять следующей системе:

$$\begin{aligned} & \int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ [f_n(\tau) X_n(\xi, \tau)]_{\tau\tau} + \omega_n^2(\varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) f_n(\tau) + [\phi_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau)]_{\tau\tau} \right\} \times \\ & \times X_m(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d\xi = \int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} \phi(\xi, \tau) X_m(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d\xi, \quad (10) \end{aligned}$$

где $m \in \mathbb{N}$.

Решение системы (10) затруднительно. При резонансных явлениях амплитуды всех динамических мод, за исключением резонансной, малы. Поэтому в каждом уравнении системы членами, не содержащими $X_m(\xi, \varepsilon\tau)$, в связи с их малостью пренебрегают. В этом случае система (10) становится расщепленной и уравнение для нахождения $f_n(\tau)$ принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} \left\{ [f_n(\tau) + \phi_n(\tau)] X_n(\xi, \varepsilon\tau) \right\}_{\tau\tau} + \omega_n^2(\varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) f_n(\tau) \Big\} \times \\ & \times X_n(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d\xi = \int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} \phi(\xi, \tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d\xi. \quad (11) \end{aligned}$$

Введём новую функцию: $\mu_n(\tau) = f_n(\tau) + \phi_n(\tau)$, тогда уравнение (11) примет вид

$$\begin{aligned} & A_{1n}(\varepsilon\tau) \mu_n''(\tau) + 2\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau) \mu_n'(\tau) + \varepsilon^2 A_{3n}(\varepsilon\tau) \mu_n(\tau) + \\ & + A_{1n}(\varepsilon\tau) \omega_n^2(\varepsilon\tau) \mu_n(\tau) = \theta_n(\tau), \quad (12) \end{aligned}$$

$$\text{где } A_{1n}(\varepsilon\tau) = \int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d\xi; \quad \varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau) = \int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} X_{n,\tau}(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d\xi;$$

$$\varepsilon^2 A_{3n}(\varepsilon\tau) = \int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} X_{n,\tau\tau}(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d\xi;$$

$$\theta_n(\tau) = \omega_n^2(\varepsilon\tau) A_{1n}(\varepsilon\tau) \phi_n(\tau) + \int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} \phi(\xi, \tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d\xi.$$

С учётом (7), (9) решение (3) будет иметь вид

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau).$$

Данное решение показывает, что аналогично тому, как колебательные процессы для объектов с неподвижными границами выражаются суммой колебаний, соответствующих собственным функциям, так в случае движения границ появляется суперпозиция колебаний, соответствующих динамическим модам $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$.

В большинстве практических задач границы движутся в медленном режиме и параметр ε мал, поэтому в дальнейшем величины порядка ε^2 учитываться не будут.

Для упрощения введём в уравнение (12) новую функцию

$$\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau) y_n(\tau), \quad (13)$$

где

$$A_{0n}(\varepsilon\tau) = \exp \left[- \int_0^\tau \frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\zeta)}{A_{1n}(\varepsilon\zeta)} d\zeta \right].$$

В этом случае уравнение (12) с точностью до величин порядка ε^2 будет иметь вид

$$y_n''(\tau) + \omega_n^2(\varepsilon\tau) y_n(\tau) = \frac{\theta_n(\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau) A_{1n}(\varepsilon\tau)}. \quad (14)$$

Пусть внешнее воздействие на систему носит гармонический характер, т. е.

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \tau) &= B_0(\xi) \cos W_0(\tau); \\ F_{ji}(\tau) &= B_{ji} \cos W_{ji}(\tau); \quad j = 1, 2; \quad i = 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

где $B_0(\xi)$ — функция, характеризующая интенсивность распределённой нагрузки; $W_0(\tau)$, $W_{ji}(\tau)$ — монотонно возрастающие функции; B_{ji} — постоянные величины.

Ограничимся рассмотрением случая, когда правую часть уравнения (14) можно представить в виде

$$\frac{\theta_n(\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)} = M_n(\varepsilon\tau) \cos W_n(\tau), \quad (15)$$

где $W_n(\tau)$ — монотонно возрастающая функция.

Представление (15) возможно в следующих случаях: 1) все внешние возмущения равны нулю кроме какого-то одного; 2) функции $W_0(\tau)$, $W_{ji}(\tau)$ отличаются на постоянную величину; 3) резонансные области внешних нагрузок не пересекаются, тогда при рассмотрении резонанса от одной нагрузки действием других можно пренебречь.

С учётом изложенного уравнение (14) примет вид

$$y_n''(\tau) + \omega_n^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau) = M_n(\varepsilon\tau) \cos W_n(\tau). \quad (16)$$

Решение данного уравнения при начальных условиях $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ записывается следующим образом [3]:

$$y_n(\tau) = \int_0^\tau \gamma_n(\tau, \zeta) M_n(\varepsilon\zeta) \cos W_n(\zeta) d\zeta, \quad (17)$$

где

$$\gamma_n(\tau, \zeta) = \frac{y_{1n}(\tau)y_{2n}(\zeta) - y_{1n}(\zeta)y_{2n}(\tau)}{y_{1n}(\zeta)y'_{2n}(\zeta) - y'_{1n}(\zeta)y_{2n}(\zeta)},$$

а y_{1n} , y_{2n} — линейно независимые решения однородного уравнения, соответствующего (16).

С помощью метода малого параметра [4] с точностью до величин порядка ε^2 найдём:

$$y_{1n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau) \sin w_n(\tau); \quad y_{2n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau) \cos w_n(\tau), \quad (18)$$

где функции $a_n(\varepsilon\tau)$ и $w_n(\tau)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{dw_n(\tau)}{d\tau} = \omega_n(\varepsilon\tau), \\ \frac{da_n(\varepsilon\tau)}{d\tau} = -\frac{a_n(\varepsilon\tau)}{2\omega_n(\varepsilon\tau)} \frac{d\omega_n(\varepsilon\tau)}{d\tau}, \end{cases}$$

решение которой даёт

$$w_n(\tau) = \int_0^\tau \omega_n(\varepsilon\tau) d\tau; \quad a_n(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{\omega_n(\varepsilon\tau)}}.$$

Возвращаясь к решению (17), с учётом (18) получим:

$$y_n(\tau) = a_n(\varepsilon\tau) \sin w_n(\tau) \int_0^\tau \frac{M_n(\varepsilon\zeta) \cos W_n(\zeta) \cos w_n(\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta) w_n'(\zeta)} d\zeta - \\ - a_n(\varepsilon\tau) \cos w_n(\tau) \int_0^\tau \frac{M_n(\varepsilon\zeta) \cos W_n(\zeta) \sin w_n(\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta) w_n'(\zeta)} d\zeta.$$

Разлагая произведение тригонометрических функций в сумму и учитывая замену (13), можно получить следующее выражение для полной амплитуды колебаний, соответствующих n -ной динамической моде:

$$A_n^2(\tau) = \frac{1}{4} A_{0n}^2(\varepsilon\tau) a_n^2(\varepsilon\tau) \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta + \int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_{n2}(\zeta) d\zeta \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta + \int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_{n2}(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\},$$

где $F_n(\varepsilon\zeta) = \frac{M_n(\varepsilon\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta) w_n'(\zeta)}$; $\Phi_{n1}(\zeta) = w_n(\zeta) - W_n(\zeta)$; $\Phi_{n2}(\zeta) = w_n(\zeta) + W_n(\zeta)$.

Здесь функция $F_n(\varepsilon\zeta)$ знакопостоянна, так как функции $M_n(\varepsilon\zeta)$ положительны, а произведение $a_n(\varepsilon\zeta) w_n'(\zeta)$ знакопостоянно (оно равно якобиану двух линейно независимых функций y_{1n} и y_{2n}). Функции $w_n(\zeta)$ и $W_n(\zeta)$ монотонно возрастают, поэтому фаза $\Phi_{n2}(\zeta)$ изменяется быстрее фазы свободных колебаний, которая определяется функцией $w_n(\zeta)$. Следовательно, участок знакопостоянства функций $\sin \Phi_{n2}(\zeta)$, $\cos \Phi_{n2}(\zeta)$ меньше половины периода свободных колебаний, т. е. период возрастания соответствующих интегралов невелик. Интегралы же, содержащие $\sin \Phi_{n1}(\zeta)$, $\cos \Phi_{n1}(\zeta)$, возрастают в течение всего периода, пока наблюдается резонансное явление, и вносят основной вклад в амплитуду. Пренебрегая членами, содержащими $\Phi_{n2}(\zeta)$, получим следующее выражение для амплитуды колебаний:

$$A_n^2(\tau) = \frac{1}{4} A_{0n}^2(\varepsilon\tau) a_n^2(\varepsilon\tau) \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (19)$$

Полученное выражение удобно для анализа резонансных свойств систем с движущимися границами. В таких системах различают два вида резонансных явлений: установившийся резонанс и прохождение через резонанс.

Установившийся резонанс — это явление резкого увеличения амплитуды колебаний в случае, когда изменение частоты внешней силы и одной из собственных частот согласованы таким образом, что создаются наилучшие условия для возрастания амплитуды.

Прохождение через резонанс — это явление резкого увеличения амплитуды в течение конечного промежутка времени, когда мгновенная частота одного из собственных колебаний проходит через значение возмущающей частоты.

Заметим, что при стремлении скорости движения границ к нулю явление установившегося резонанса и явление прохождения через резонанс вырождаются в явления обычного резонанса для системы с неподвижными границами.

Из выражения (19) следует, что установившийся резонанс будет наблюдаться, если $\Phi_{n1}(\zeta) = \gamma = \text{const}$.

Явление прохождения через резонанс наблюдается во временной области, содержащей точку τ_0 , где $\Phi'_{n1}(\tau_0) = 0$. В этой точке мгновенная частота n -ного собственного колебания проходит через значение возмущающей частоты. Прохождение через резонанс начинается не доходя до точки τ_0 и заканчивается за этой точкой. Если принять амплитуду в начале резонансной области (точка τ_1) равной нулю, то амплитуда в конце резонансной области (точка τ_2) будет определяться следующим выражением:

$$A_n^2(\tau_1; \tau_2) = E_n^2(\tau_2) \left\{ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (20)$$

Исследование прохождения через резонанс заключается в определении границ резонансной области τ_1 и τ_2 , соответствующих максимуму выражения (20), причём $\tau_1 < \tau_0$, а $\tau_2 > \tau_0$.

В качестве примера рассмотрим вынужденные колебания струны с равномерно движущейся границей. Зависимость силы сопротивления движению струны примем пропорциональной её скорости. Тогда дифференциальное уравнение, описывающее колебания струны, будет иметь вид

$$\rho Z_{tt}(x, t) - T Z_{xx}(x, t) + \lambda Z_t(x, t) = 0, \quad (21)$$

где ρ — линейная плотность массы струны; T — сила натяжения струны; λ — сила сопротивления среды, действующая на единицу длины струны при единичной скорости поперечного движения; $Z(x, t)$ — поперечное смещение точки струны с координатой x в момент времени t .

Рассмотрим граничное условие следующего вида:

$$Z(0, t) = 0; \quad Z(l_0(t), t) = B \cos W_0(\omega_0 t), \quad (22)$$

где $l_0(t) = L_0 + v_0 t$ — закон движения границы; $W_0(\omega_0 t)$ — монотонно возрастающая функция; B , ω_0 — постоянные величины (в случае действия гармонического возмущения ω_0 является частотой возмущения).

Введём в задачу (21), (22) безразмерные переменные:

$$\xi = \omega_0 \frac{x}{a}, \quad \tau = \omega_0 t + \frac{\omega_0 L_0 - a}{v_0}, \quad Z(x, t) = Bz(\xi, \tau)$$

и новую функцию $z(\xi, \tau) = \exp(-\alpha\tau)U(\xi, \tau)$, где $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$; $\alpha = \frac{\lambda}{2\omega_0\rho}$.

Тогда после преобразований получим:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \alpha^2 U(\xi, \tau) = 0; \quad (23)$$

$$U(0, \tau) = 0; \quad U(l(\varepsilon, \tau), \tau) = \exp(\alpha\tau) \cos W(\tau). \quad (24)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$l(\varepsilon, \tau) = 1 + \varepsilon\tau, \quad \varepsilon = \frac{V_0}{a}, \quad W(\tau) = W_0(\tau + \gamma_0), \quad \gamma_0 = \frac{a - \omega_0 L_0}{v_0}.$$

Заметим, что величина $\exp(-2\pi\alpha)$ характеризует относительное изменение амплитуды свободных колебаний за одно собственное колебание, и α в большинстве случаев является величиной того же порядка малости, что и ε .

Для решения задачи используем описанную выше методику.

В результате получим следующее выражение для амплитуды колебаний, соответствующих n -ной динамической моде:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\tau) \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (25)$$

где

$$\omega_n(\varepsilon\tau) = \frac{\pi^2 n^2}{l(\varepsilon\tau)} - \alpha^2; \quad w_n(\tau) = \frac{\pi n}{\varepsilon} \left[S(\varepsilon\tau) - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + S(\varepsilon\tau)}{1 - S(\varepsilon\tau)} \right];$$

$$S(\varepsilon\tau) = \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha(1 + \varepsilon\tau)}{\pi n} \right)^2}; \quad E_n^2(\tau) = \frac{\exp(-2\alpha\tau)}{4l(\varepsilon\tau)\omega_n(\varepsilon\tau)};$$

$$\Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W(\zeta); \quad F_n(\zeta) = \frac{(-1)^{n+1} 2\pi n \exp(\alpha\zeta)}{\sqrt{\omega_n(\varepsilon\zeta) l^3(\varepsilon\zeta)}}.$$

Установившийся резонанс в рассматриваемой системе наблюдается, если

$$W(\zeta) = w_n(\zeta) + \gamma,$$

где γ — постоянная величина. Амплитуда при этом имеет вид

$$A_n(\tau) = \exp(-\alpha\tau) \int_0^\tau \frac{\exp(\alpha\zeta)}{1 + \varepsilon\zeta} d\zeta.$$

Численное исследование этого выражения показывает, что при уменьшении длины струны ($\varepsilon < 0$) амплитуда колебаний непрерывно возрастает. При увеличении длины ($\varepsilon > 0$) амплитуда сначала возрастает, достигая некоторого максимального значения, а потом начинает убывать. Убывание амплитуды связано с тем, что демпфирующие силы, начиная с некоторого момента времени, начинают преобладать над возмущающими, так как длина колеблющейся части увеличивается.

Зависимость максимальной амплитуды от α и ε (от номера n она не зависит) приведена в таблице.

α	ε				
	0,001	0,005	0,010	0,100	0,200
0,00	1000	201	101	10,1	5,1
0,05	51,3	27,1	20,1	5,4	3,3
0,10	31,5	17,3	13,4	4,2	2,7

Исследуем явление прохождения через резонанс, возникающее в струне под действием силы постоянной частоты, т.е. $W(\tau) = \tau$, что в исходной системе соответствует действию силы с частотой ω_0 .

Максимально возможная амплитуда колебаний совпадает с максимумом выражения

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\tau_2) \left\{ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}.$$

Прохождение через резонанс начинается не доходя до точки τ_0 ($\tau_1 < \tau_0$) и заканчивается за этой точкой ($\tau_2 > \tau_0$). Сама точка τ_0 определяется по следующей формуле:

$$\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\pi n}{\sqrt{1 + \alpha^2}} - 1 \right).$$

В результате исследования прохождения через резонанс получена зависимость максимальной амплитуды колебаний, возникающих при прохождении через резонанс на первой динамической моде, от α и ε . Данная зависимость приведена на рисунке.

Анализ графика показывает, что амплитуда при $\alpha = 0$ является оценкой сверху для амплитуды колебаний, возникающих при прохождении через резонанс, когда $\alpha > 0$. Когда действие демпфирующих сил не учитывается ($\alpha = 0$), задача (23), (24) может быть решена точным методом. Это сделано в работе [5]. Сравнение результатов показывает, что метод Канторовича—Галёркина даёт в рассматриваемом случае ($\varepsilon < 0,1$) удовлетворительные по точности результаты (погрешность лежит в пределах 5%).

Зависимость амплитуды колебаний струны от α и ε при прохождении через резонанс на первой динамической моде

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Весницкий А. И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. — М.: Физматлит, 2001. — 320 с.
2. Лежнева А. А. Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. МТТ, 1970. — С. 73–81.

3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976. — 576 с.
4. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. — М.: Наука, 1964. — 432 с.
5. Анисимов В. Н. Исследование резонансных свойств одномерных механических систем с движущимися границами. — Куйбышев: КПИИ, 1985. — 18 с. — Деп. в ВИНТИ 03.07.85, № 807–85.

Поступила в редакцию 15/I/2009;
в окончательном варианте — 16/II/2009.

MSC: 74H45, 74K05

INVESTIGATION OF RESONANCE CHARACTERISTICS OF MECHANICAL OBJECTS WITH MOVING BORDERS BY APPLICATION OF THE KANTOROVICH-GALYORKIN METHOD

V. N. Anisimov, V. L. Litvinov

Syzran' Branch of Samara State Technical University
45, Sovetskaya st., Syzran', Samara region, 446001.

E-mails: anisimov170159@mail.ru, vladlitvinov@rambler.ru

Generalized procedure of the Kantorovich-Galyorkin method application for studying of resonance characteristics of mechanical systems with moving borders was developed.

Key words: *resonance characteristics, mechanical systems with moving borders, amplitude vibrations.*

Original article submitted 15/I/2009;
revision submitted 16/II/2009.

Anisimov Valeriy Nikolayevich, Ph. D. (Phys. & Math.), Ass. Prof., Dept. of general-theoretical disciplines.

Litvinov Vladislav Lvovich, Teacher, Dept. of general-theoretical disciplines.