Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Петушков, Предельные состояния повреждаемой нелинейно деформируемой среды при высокоскоростном столкновении с преградой, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 1(), 47–60

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu659>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:33:34

Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.374

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ ПОВРЕЖДАЕМОЙ НЕЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЫ ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ СТОЛКНОВЕНИИ С ПРЕГРАДОЙ

В. А. Петушков

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН,
101990, г. Москва, М. Харитоньевский пер., 4.

E-mail: pva_imash@bk.ru

Представлена обобщенная модель нелинейного взаимосвязанного деформирования и разрушения повреждаемых поликристаллических сред при высокоскоростных ударных воздействиях. Учитываются геометрическая нелинейность, обусловленная конечными деформациями, и нелинейное, зависящее от скорости деформирования, поведение материалов с изменяемой микроструктурой, анизотропным упрочнением и эффектом Баушингера. Особое внимание при этом уделено проблеме локализации повреждений. Выполнено обоснование предлагаемой модели и изучены нелинейные волновые процессы в оболочке при высокоскоростном столкновении с препятствием.

Ключевые слова: нелинейно деформируемая среда, повреждаемость, оболочки, ударное нагружение, разрушение, математическое моделирование.

Введение. Основной проблемой в механике деформируемых сред является установление связи между внешними воздействиями, изменением исходной структуры среды и возникающими вследствие этого физическими полями. Для конструкций, подвергаемых ударным воздействиям, потеря несущей способности и переход в запредельные состояния происходят, как правило, вследствие нелинейного деформирования и деградации свойств материала, конечных деформаций, связанных с потерей устойчивости самих конструкций и процессами их деформирования, образования и распространения трещин.

Анализ взаимного влияния указанных процессов с учётом изменения структуры реальных конструкционных материалов представляет в связи с этим особый интерес.

В теоретическом изучении сред с переменной структурой сложились в основном два направления — с позиций механики гетерогенных сред и различных методов гомогенизации [1, 2] и обобщённой механики (или микромеханики) сплошных сред с учётом второго (мезо) уровня их структуры [3, 4] и др.

В первом случае используется понятие представительного элементарного объёма среды, размер которого определяется возможностью статистическо-

Петушков Владимир Алексеевич — лаборатория математического моделирования; д.ф.-м.н., профессор.

го осреднения. Во втором — разрабатываются подходы, включающие в себя в той или иной форме масштаб длины и основанные, например, на дискретной дислокационной или нелокальной пластичности, вязкопластичности или объединении механизмов диффузии и деформации [4]. При этом в классические модели механики вводятся как различные меры повреждаемости, так и нелокальное описание полевых функции, при котором напряжения в заданной материальной точке зависят от состояния среды в окрестности этой точки. Другой причиной разработки указанных подходов явилась необходимость обеспечения корректности соответствующих краевых задач механики с математической точки зрения [5].

В статье предлагается обобщенная модель высокоскоростного нелинейного деформирования повреждаемых поликристаллических сред. Она является развитием известных идей Афанасьева—Бессилинга на учет конечных деформаций, вязкости и сжимаемости деформируемой среды с повреждениями, гистерезисных потерь и эффекта Баушингера при ударных воздействиях и позволяет рассматривать оболочки как многослойную трехмерную среду с плотноупакованными по толщине однородными или композиционными слоями.

В описание модели включены процессы зарождения и роста микроповреждений, а в качестве регулятора корректности соответствующих краевых задач используется вязкость среды, учитывающая неявным образом ее характерный размер. Выполнено численное моделирование предельных состояний, возникающих в сферической оболочке-капсуле при её высокоскоростном соударении с преградой.

Постановка задачи. Описание математической модели. Пусть нелинейно деформируемая поликристаллическая среда (конструкция, элемент конструкции) объема V занимает в начальный момент времени t_r область $D \subset \mathbb{R}^3$, ограниченную поверхностью S . Соответствующую этому времени исходную конфигурацию области обозначим $k^0(D)$ и отнесём к декартовой системе координат X^i .

С каждой точкой деформируемой среды свяжем конвективную криволинейную систему координат η^k таким образом, что $X^i = X^i(\eta^k)$, и введём риманову метрику $a_{ij}(\eta^k, t) = a_i a_j$, где a_i — векторы, касательные к координатной кривой η^k . В отношении индексов и операций над ними будем использовать соглашения, общепринятые в тензорном исчислении.

Движение (деформирование) среды относительно $k^0(D)$ в любой произвольный момент времени $t > t_r$ определяется следующим C^1 погружением:

$$\begin{aligned} x^i &= \phi(X^i, t), \\ X^i &\in k^0(D), \quad k^0 : D \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ t &\in D_t = (t_r, \tau), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x^i = x^i(\eta^k, t)$ — лагранжевы координаты рассматриваемой точки в деформированной среде. Мету деформации — градиент F представим в виде

$$F = \frac{\partial \phi}{\partial X}(X, t), \quad F^T = \frac{\partial X}{\partial x}(x, t),$$

и поскольку для каждого $X \in k^0$ существует ортогональное преобразование

$R(X)$, называемое вращением, справедливо соотношение $F = RU = VR$, где U и V — правый и левый тензоры растяжения соответственно.

Тензор объективных конечных деформаций Грина и их скоростей определим как

$$\begin{aligned} 2E &= 2\varepsilon_{ij}a^ia^j = (F^T F - a) = (a_{ij} - A_{ij})a^ia^j, \\ 2\dot{E} &= 2\dot{\varepsilon}_{ij}a^ia^j = R\dot{D}R, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\dot{D}$ — тензор скорости растяжения с компонентами $\dot{D}_{ij} = \frac{1}{2}(L_{ij} + L_{ji})$; $L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \dot{F}_{ik}F_{kj}^{-1}$ — градиент скорости деформаций $v_i = \dot{x}_i(X^k, t)$.

Поле деформаций среды задается вектором смещений $u^i = u^i(X^k, t)$:

$$u^i = x^i - X^i,$$

следовательно, тензор конечных деформаций (2) может быть записан также в следующем виде:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{ij} &= (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u_r \nabla_j u^r); \\ \nabla_i u_j &= \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \Gamma_{ji}^p u_p, \quad \Gamma_{ji}^p = \frac{1}{2}a^{ps} \left(\frac{\partial a_{sj}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{si}}{\partial x^j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^s} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Локальные напряжения, возникающие при деформировании среды, определяются симметричным тензором Пиола—Кирхгоффа

$$T_{ij} = JF^{-1}\tau_{ij}F^{-1}, \quad (4)$$

где якобиан $J = \det(F)$, τ_{ij} — истинные напряжения Коши.

Материальные производные по времени от истинных напряжений не являются объективными или инвариантными относительно смещения среды как жесткого целого, поэтому под скоростями напряжений обычно понимается скорость Яумана—Нолла [6]:

$$\dot{\sigma}_{jk} = \dot{T}_{jk} - T_{jr}W_{rk} - T_{kr}W_{rj},$$

где $\dot{T}_{jk}$ — полная производная напряжений (4) по времени, $\dot{W}_{ij} = \frac{1}{2}(L_{ij} - L_{ji})$ — компоненты тензора вихря скорости.

Уравнения, описывающие вязкопластическое деформирование среды, являются следствиями законов сохранения массы, количества движения и баланса энтропии и могут быть соответственно представлены в виде

$$\begin{aligned} \rho(x^i, t)J &= \rho_0(X^i), \\ \dot{\sigma}_k^{jk} + \rho b_j &= \rho \dot{v}_j, \\ \rho c \dot{\theta} &= \kappa \sigma_{jk} \dot{\varepsilon}_{jk} + \rho h - \nabla_i q_i, \end{aligned} \quad (5)$$

где ρ — плотность среды, θ — температура, c_v — удельная теплоёмкость, h — плотность внутренних источников тепла, q_i — вектор теплопередачи, κ — числовой коэффициент порядка единицы.

Уравнения состояния. Уравнения (5) должны быть дополнены определяющими соотношениями для нелинейных, зависящих от скорости деформирования сред с переменной структурой. В этом случае в качестве структурных параметров обычно принимаются или тензор повреждения материала и плотность дислокаций или, например, объёмная доля одной из фаз в случае гетерогенных сред [2, 4, 7].

Рис. 1. Схема формирования пор

Для металлов, вязких по своей природе или из-за существенного повышения температуры в процессе распространения ударных волн, образование микродефектов совпадает главным образом с образованием микронесплошностей (микропор). На формирование пор большое влияние оказывает наличие вторых фаз и включений. Схема формирования пор представлена на рис. 1, где приведены реальная структура поликристаллической среды — а и её представление в модели — б.

Относительный объём микропор $\xi = \frac{v_d}{v}$, где v — элементарный объём материала, а v_d — часть его, заполненная микропорами, обычно и принимается в качестве меры повреждаемости. При этом полагается, что все микропоры без относительно их формы, размеров и ориентаций однородно и изотропно с макроскопической статистической точки зрения распределены по объёму с плотностью порядка 10^6 см^{-3} .

Такой подход к гомогенизации (осреднению) структуры в рамках представительного объёма v реального поликристаллического материала хотя и является большим упрощением, однако достаточно хорошо учитывает во времени деградацию свойств и конечную стадию разрушения [2, 8, 9].

Уровни накапливаемых во времени повреждений определяются скоростью повреждаемости ξ , которая складывается из скоростей зарождения микроповреждений и их развития. Полагая, что зарождение микроповреждений носит случайный характер, накопленные за время Δt повреждения в сжимаемой деформируемой среде можно определить как [8]

$$\xi(t + \Delta t) = 8\pi N^t R_n^3 \Delta t + \xi(t) \exp\left(\frac{3\Delta t(P - P_g)}{4\lambda}\right),$$

$$N^t \Big|_{P > P_n} = N_0^t \exp\left(\frac{P - P_n}{P_1}\right), \quad N^t \Big|_{P \leq P_n} = 0, \quad (6)$$

где P — давление в среде; P_n , P_g — пороговые давления зарождения и роста микропор соответственно; R_n — параметр распределения размеров вновь образованных микропор; λ — вязкость материала; P_1 и N_0^t — параметры деформируемой среды; N^t — скоростная функция числа зарождающихся микропор. При этом начальный уровень повреждённости конструкционных металлов обычно не превышает 3–4 %.

Скорость деформации E в (2) представим как результат локальной де-

композиции на упругие E^e , вязкопластические E^p и повреждаемые E^d составляющие:

$$E = E^e + E^p + E^d, \quad (7)$$

где $E^d = E^{ed} + E^{pd}$; E^{ed} и E^{pd} — соответственно упруго-повреждаемые (обратимые) и вязко-повреждаемые (или пластически-повреждаемые, необратимые) составляющие тензора скоростей деформации.

Деформационный градиент F между конфигурациями k^0 и k^t в этом случае будет равен $F = F_e F_p F_d$.

Суммарный Якобиан деформации J , характеризующий объёмную деформацию, с учётом допущения того, что сжимаемость приходится только на долю повреждаемости, будет равен $J = J^d = \det(F)$. Деформации за счёт повреждаемости определяются как $\varepsilon^d = \frac{1}{J-1}$.

Уравнения состояния сжимаемой при ударе деформируемой среды определяются известными соотношениями Ренкина—Гюгонио на фронте распространяющейся ударной волны и уравнениями Ми—Грюнейзена в общем случае:

$$P = \rho_0 \Gamma_0 c_v \theta_m (1 + \varepsilon^d)^{\Gamma_0+1}, \quad \theta_m = \theta_{m0} \exp\left(2a \frac{\varepsilon^d}{1 + \varepsilon^d}\right) (1 + \varepsilon^d)^{2(\Gamma_0 - a - \frac{1}{3})}, \quad (8)$$

где P — давление, Γ — коэффициент Грюнейзена, θ_m — температура плавления (θ_{m0} — при нормальном давлении), a — постоянная материала. Эти соотношения устанавливаются из опытов на ударное сжатие [9, 10].

Вместе с тем для сравнительно невысоких скоростей нагружения, обычно реализуемых на практике, можно ограничиться так называемым квазиакустическим приближением, когда ударная адиабата полагается совпадающей с изоэнтропой расширения, а давление является только функцией объёма:

$$P = a_1(v^{-1} - 1) + a_2(v^{-1} - 1)^2 + a_3(v^{-1} - 1)^3. \quad (8, a)$$

Здесь a_1, a_2, a_3 — константы материала, определяемые по ударной адиабате.

Такое приближение имеет опытное обоснование для достаточно широкого диапазона изменения давлений на фронтах ударных волн порядка 10–15 ГПа. В этом диапазоне необратимость процессов деформирования обусловлена в основном вязкостью и пластическими деформациями сдвига.

Основываясь на гипотезе представлении деформируемой среды при конечных деформациях, связь между составляющими скоростей напряжений и деформаций запишем в виде обобщенного закона Гука:

$$\dot{\sigma} = C : (\dot{E} - \dot{E}^p) - \alpha \dot{\theta} I, \quad (9)$$

где тензор упругости $C = 2\mu I + (K - \frac{2}{3}\mu)I \otimes I = C(\xi, \theta)$ является функцией температуры и накопленных повреждений, α — коэффициент температурного расширения, I — единичный тензор. Соответствующие выражения для объёмного модуля K и модуля сдвига μ при больших изменениях объёма, температуры и разупрочнения вследствие повреждаемости деформируемой среды приведены в [9, 10].

Определяющие соотношения для нелинейных составляющих деформации $\dot{E}^p$ с компонентами $\dot{\varepsilon}_{jk}^p$ в (9) сформулируем с учётом структурной неоднородности реальных конструкционных материалов. Любой бесконечно малый

элемент деформируемой среды может быть представлен в виде совокупности N связанных между собой первично изотропных структурных частиц — подэлементов, свойства которых с учётом их статистической природы позволяют определить поведение среды в целом [11–13].

Полную скорость деформации $\dot{E}$ в (7) будем считать неизменной при переходе от подэлемента к подэлементу, каждый из которых полагается упруго-пластическим с пределом текучести, зависящим от температуры и скорости нагружения

$$\sigma_{yd}^{(k)} = \sigma_{ys}^{(k)} \left(1 + |C \dot{\epsilon}_i^p|^n \right) (1 - \theta^*) \quad \forall k \in (1, N), \quad (10)$$

где $\sigma_{ys}^{(k)}$ — статический предел текучести k -того подэлемента; $\dot{\epsilon}_i^p = \left(\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{jk}^p \dot{\epsilon}_{jk}^p \right)^{\frac{1}{2}}$; C и n — коэффициенты, определяемые по кривым однократного деформирования, полученным для различных скоростей нагружения и температур; $\theta_* = (\theta - \theta_0)/(\theta_m - \theta_0)$ — гомологическая температура, а θ_0 и θ_m — температуры комнатная и плавления соответственно.

Вязкопластические составляющие деформации $\dot{E}^p$ для каждого k -того подэлемента могут быть определены с использованием известных соотношений теории течения деформируемых сред:

$$\begin{aligned} f^k(\sigma_{jk}, \theta, \xi) &= \frac{1}{2} S : S + n_1 \xi J_1^2 - \mathbb{k}^2(\epsilon_i^p, \theta, \xi) = 0, \\ \mathbb{k}(\epsilon_i^p, \theta, \xi) &= \sigma_{yd}^k(\epsilon_i^p, \theta) \phi(\xi, \xi_F), \\ \dot{E}_k^p &= \dot{\lambda}^k \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad \forall k \in (1, N), \end{aligned} \quad (11)$$

где $S = \sigma + PI$ — девиатор напряжений; $P = -\frac{1}{3} \text{tr}(\sigma)I$ — гидростатическое давление, определяемое с учётом (8); $J_1 = \text{tr}(\sigma_{jk})$; n_1 — параметр материала; $\epsilon_i^p = \int_0^t \dot{\epsilon}_i^p dt$; $\phi(\xi, \xi_F) = (\xi_F - \xi)/(\xi_F - \xi_0)$ — функция повреждённости среды; ξ_F — разрушающий уровень повреждения; $\dot{\lambda}$ — параметр пластичности, определяемый из условия $df = 0$.

Таким образом, входящие в уравнения (5) деформации и напряжения определяются в любой точке — элементарном объёме деформируемой среды с учётом (8)–(11) и весовых коэффициентов l_k , определяющих вклад каждого подэлемента:

$$\epsilon_{ij} = \sum_{k=1}^N l_k \epsilon_{ij}^k, \quad \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^N l_k \sigma_{ij}^k. \quad (12)$$

Весовые коэффициенты вычисляются на основе полилинейной аппроксимации указанных выше кривых деформирования $l_k = \frac{1}{E}(E_k - E_{k-1})$, где $E_k = (\sigma_i^k - \sigma_i^{k-1})/(\epsilon_i^k - \epsilon_i^{k-1})$, причём $\sum_{k=1}^N l_k = 1$.

Оптимальное число структурных элементов может быть установлено на основе гистограммы статистического распределения пределов текучести путем измерения микротвердости рассматриваемого материала, и обычно ока-

зывается достаточным от 4 до 6 элементов [13]. При этом учитывается реальная исходная повреждённость материала, начиная с любого момента t_r времени эксплуатации, предшествующего ударному воздействию.

Для задач с высокоскоростным соударением тел, когда высокие скорости деформирования сопровождаются большими деформациями, очень важен учет адиабатического нагрева, связанного с локальным повышением температуры. В этом случае большая часть энергии диссипирует в тепло, влияющее на поведение материала. Оно может быть определено на основе первого закона термодинамики (5₃)¹

$$\rho c_v \dot{\theta} = \kappa \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij},$$

поскольку тепловыделение происходит в основном за счёт механической работы.

Для поликристаллических металлов доля κ механической работы, обусловленной нелинейным деформированием и переходящей в тепло, составляет примерно 0,85. Оставшаяся часть работы, очевидно, связана со структурными изменениями.

Определяемая в каждой точке деформируемой среды скорость изменения абсолютной температуры $\dot{\theta}$ вместе с величиной локального повреждения ξ используются в качестве внутренних параметров в приведённых уравнениях состояния и пересчете характеристик поликристаллического материала.

Фактом разрушения деформируемой среды является достижение параметром повреждаемости ξ предельного значения ξ_F . В этом случае функция k в (11₂), описывающая упрочнение (или разупрочнение) поликристаллического материала, должна удовлетворять условию, при котором материал конструкции теряет несущую способность:

$$k = k^*(\varepsilon_i^p, \theta, \xi) \Big|_{\xi=\xi_F} = 0. \quad (13)$$

Для большинства поликристаллических металлов значения ξ_F находятся в диапазоне от 18 до 30 %.

В качестве приложения теории будем рассматривать тонкостенные оболочечные конструкции, которые широко используются на практике и наиболее часто подвергаются разнообразным ударным воздействиям.

Уравнения нелинейной динамики оболочек. Оболочку будем считать тонкостенной при соблюдении следующих ограничений:

$$\lambda = \max \left\{ \frac{h}{l}, \frac{h}{l_w}, \sqrt{\frac{h}{R}} \right\} \ll 1.$$

Здесь l — наименьший размер длины, l_w — наименьшая длина волны деформирования, R — наименьший радиус кривизны поверхности Ω . Наличие вырожденного размера — толщины h сильно влияет на точность и устойчивость решения трехмерных уравнений (5). Поэтому приходится вводить дополнительную аппроксимацию решения вдоль вырожденного размера с учётом асимптотики при $h \rightarrow 0$.

¹(5₃) означает использование третьей формулы из (5).

Поля перемещений $u_i(X^k, t)$ и деформаций $\varepsilon_{ij}(X^k, t)$, возникающие в оболочке при её деформировании как трехмерной среды, определяются в соответствии с (2), (3) относительно специально выбранной базовой поверхности оболочки Ω с криволинейной системой координат η^k на ней. Координатные линии η^1, η^2 полагаются совпадающими с линиями кривизны оболочки, а координатная прямая η^3 — направленной вдоль вырожденного размера по нормали к её поверхности.

В этом случае начальная конфигурация оболочки, соответствующая погружению (1), для момента времени t_r определяется выражением

$$k^0(\Omega) = \left\{ \eta^\alpha \in \Omega, \eta^3 = \pm \frac{h}{2} \right\}; \quad k^0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad t \subset D_t = (t_r, \tau),$$

где $h = h(\eta^\alpha, t_r)$ — исходная толщина оболочки.

Движение рассматриваемой оболочки как трёхмерного тела под действием внешних сил связывается, таким образом, с движением её срединной поверхности Ω , которую можно рассматривать в виде поверхности Коссера, наделённой жёсткостными и инерционными свойствами.

Если при переходе из конфигурации k^t в $k^{t+\Delta t}$ происходит деформирование оболочки, приращения компонент тензора деформаций Грина (3) в произвольной точке по её толщине можно разложить в тензорный ряд по вырожденной координате η^3 .

Удерживая два первых члена этого ряда для точки с координатой z на η^3 , можно записать:

$$\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^z = \frac{1}{2} (G_{\alpha\beta}(t + \Delta t) - G_{\alpha\beta}(t)) \cong \frac{1}{2} \Delta a_{\alpha\beta} + z \Delta b_{\alpha\beta} + \dots, \quad (14)$$

где $G_{\alpha\beta}$ — изменение метрического тензора по толщине оболочки вдоль нормали к её срединной поверхности в текущей конфигурации k^t ,

$$\Delta a_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^i}{\partial \eta^\alpha} \frac{\partial \Delta u^i}{\partial \eta^\beta} + \frac{\partial X^i}{\partial \eta^\beta} \frac{\partial \Delta u^i}{\partial \eta^\alpha} - \frac{\partial \Delta u^i}{\partial \eta^\alpha} \frac{\partial \Delta u^i}{\partial \eta^\beta}$$

— компоненты тензора изменения метрики для деформации на срединной поверхности и

$$\Delta b_{\alpha\beta} = \tilde{n}^i \frac{\partial^2 \Delta u^i}{\partial \eta^\alpha \partial \eta^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \Delta n_\gamma + b_{\alpha\beta} \Delta n$$

— компоненты тензора изменения кривизны для деформаций по толщине оболочки вдоль нормали n . При этом $\Delta n = a^{\alpha\beta} \Delta n_\alpha \Delta n_\beta / (1 + n^i \tilde{n}^i)$; $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ — определяемый (3), символ Кристоффеля; $\Delta n_\gamma = -\tilde{n}^i \frac{\partial \Delta u^i}{\partial \eta^\gamma}$; $a_{\alpha\beta}$ — метрическое поле на Ω_0 ; $a^{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} / A$, $A = \det |a_{\alpha\beta}|$, $\tilde{n}^i = e^{ijk} \frac{\partial X^j}{\partial \eta^1} \frac{\partial X^k}{\partial \eta^2} / A$ — компоненты вектора нормали к срединной поверхности оболочки в точке относительно декартовой системы координат X^i для момента времени t ; e^{ijk} — символ Леви—Чевита.

Компоненты тензора полной деформации в любой точке оболочки определяются следующим интегралом по времени:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^z = \int_t \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^z dt.$$

Относительные удлинения волокон оболочки вдоль координатных линий $0\eta^1, 0\eta^2$ могут быть найдены из выражения

$$E_\alpha = (1 + 2\varepsilon_\alpha)^{\frac{1}{2}} - 1, \quad (15)$$

где $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\alpha\alpha}/G_{\alpha\alpha}$.

Текущее значение толщины оболочки в момент времени t определяется соотношением

$$h^t = \int_{-1}^1 \left(1 - \left(\frac{\partial u_i^t}{\partial \eta^3} \right)^2 + 2E_{33}^t \right)^{\frac{1}{2}} \frac{h_0}{2} d\eta^3. \quad (16)$$

Статические переменные оболочки — возникающие в ней мембранные и изгибные усилия и моменты вычисляются интегрированием напряжений по её объёму в соответствии с (14) и следующим представлением:

$$\int_V (\cdot) dv = \int_S \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\cdot) \hat{\mu} d\eta^3 dS.$$

Здесь S — площадь срединной поверхности Ω , $\frac{dv}{d\Omega} = A^{\frac{1}{2}} d\eta^3$. В текущей конфигурации k^t имеем $d\Omega_t = J d\Omega_0$, где $J = \left(\frac{A}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Нелинейное деформирование повреждаемой оболочки под действием ударных нагрузок описывается теми же уравнениями (5)–(12). Однако вместо уравнения сохранения количества движения в форме (5₂) принимается эквивалентное ему

$$A^{\frac{1}{2}} \rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (M^{jk} n^i)}{\partial \eta^j \partial \eta^k} + \frac{\partial N^{ik}}{\partial \eta^k} - p^* n^i, \quad (17)$$

выраженное через результирующие внутренние моменты M^{jk} и усилия N^{ik} [14, 15]; $p^* = A^{\frac{1}{2}} p$ — приведённые усилия, распределённые на текущей поверхности Ω_t деформируемой оболочки, например давление $p(x^i, t)$ ($x^i \in \Omega_t$), причём $\Omega_t = \mathbb{R}^3 \setminus D$ и D — область, занимаемая оболочкой в $\mathbb{R}^3$ в момент времени $t \in D_t = (t_r, \tau)$.

Поскольку рассматриваются адиабатические процессы деформирования, уравнение термодинамики (5₃) используется ниже только для контроля устойчивости численного решения краевой задачи.

В качестве начальных условий краевой задачи принимаются деформированная конфигурация основной поверхности Ω_r и распределение скоростей $v_i(X^i, t)$ и (или) усилий $p^*(X^i, t)$ на ней в начальный момент времени $t_r = t_0 = 0$:

$$u_i(X^i, t_0) = \hat{u}_i(X^i), \quad \dot{u}_i(X^i, t_0) = v_i(X^i), \quad X^i \in \Omega_r, \quad (18)$$

и аналогично для усилий.

Граничные условия на краях оболочки вдоль координатных линий $\eta^\alpha = \text{const}$ ($\alpha = 1, 2$) определяются конкретной задачей и могут включать в себя как силовые относительно моментов и усилий, так и кинематические условия. При наличии границы раздела взаимодействующих сред (контактного разрыва) условия на ней могут быть заданы в форме [14].

Решение нелинейной краевой задачи динамики оболочек строится на основе метода конечных разностей и последовательной линеаризации, на каждом шаге которой решается задача упругости для упругих «пробных» напряжений. Пробное напряжение затем погружается на выпуклую поверхность течения (11₁).

Для устранения сильных разрывов и осцилляций в решении и, если необходимо, реализации известного метода установления к гидростатическому давлению в (8) добавляется искусственная вязкость как линейная или квадратичная функция скорости изменения объёма $\dot{v}$, а в левую часть уравнения (17) вводится дополнительный член с искусственным демпфированием в следующей форме, записанной для произвольного узла конечно-разностной сетки Ω_Δ :

$$A^{\frac{1}{2}} \rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = A^{\frac{1}{2}} \rho h \left[\frac{\Delta u'_i - \Delta u_i}{\Delta t^2} + \frac{\Delta u_i + \Delta u_i}{2\Delta t} \Theta \right],$$

где $\Delta u'_i = \Delta u_i(t + \Delta t)$, Θ — коэффициент искусственного демпфирования.

В соответствии с используемой моделью каждый элементарный объём деформируемой среды в окрестности узлов расчётной сетки Ω_Δ оболочки предполагается состоящим из N подэлементов. Физически это эквивалентно представлению рассматриваемой оболочки в виде многослойной, состоящей из N плотноупакованных, равных по толщине слоев. Все переменные физического поля будут в этом случае функцией номера слоя $k \in (1, N)$. Величина шага по времени Δt устанавливается на основе известного критерия устойчивости Куранта

$$c_a \frac{\Delta t}{\rho_0 V \Delta \eta} \leq \frac{1}{3},$$

где c_a — адиабатическая скорость звука, $V = \frac{1}{\rho}$ — удельный объём, $\Delta \eta$ — характерный размер конечно-разностной сетки.

Преимуществом многослойного представления деформируемой среды в рамках предлагаемой модели является возможность ограничиться C^0 -аппроксимацией перемещений $u_i(x^k, t)$ по толщине отдельного слоя оболочки, в то время как в обычном приближении необходима, по крайней мере, C^1 -аппроксимация трёхмерного решения вдоль её вырожденного размера.

При этом, очевидно, расширяются границы применения модели на широкий класс композиционных составленных из разных материалов многослойных тонкостенных оболочечных конструкций.

Результаты решения прикладных задач. Для демонстрации возможностей предлагаемого подхода вначале приведём результаты моделирования цилиндрической панели, подверженной действию локального взрыва, представленные на рис. 2. Характеристики ударного воздействия, механические свойства и зависящие от скорости нагружения диаграммы деформирования стальной оболочки заимствованы из эксперимента [15].

Расчётная схема оболочки и её деформированное состояние, соответствующее моменту времени $t = 200$ мкс от начала взрыва, также приведены на рис. 2. Вычисления проводились на конечно-разностной сетке $\Omega_\Delta = 20 \times 20$ с шагом интегрирования по времени $\Delta t = 0,16 \cdot 10^{-5}$ с как по схеме типа «крест» (кривая 3), так и с использованием интегро-интерполяционного метода (ИИМ) на девятиточечном шаблоне [14] (кривая 4). Здесь же под номе-

ром 2 приведено решение, полученное МКЭ.

Из сравнения с экспериментом — точки 5 на рис. 2 следует хорошее соответствие полученных максимальных по времени смещений оболочки в центральной точке B под зарядом. При этом решение на основе конечно-разностной схемы «крест» оказалось ближе к результатам, наблюдаемым в эксперименте, чем полученное интегро-интерполяционным методом. Большие отклонения от линейного решения (кривая 1) не только по величине максимальных смещений, но и в самом характере изменения во времени свидетельствуют о сильном влиянии физической и геометрической нелинейностей на результаты моделирования.

Предельные состояния, связанные с потерей устойчивости и разрушением повреждаемых оболочек, изучим на примере сферической оболочки при её высокоскоростном соударении с жёсткой преградой. Оболочка — капсула с отношением $\frac{h}{R} = 0,025$ и диаметром 1230 мм, представлена на рис. 3 вместе с диаграммами деформирования материала, полученными для различных скоростей нагружения.

Материал оболочки — сталь плотностью $\rho = 7,55 \cdot 10^3$ кг/м³, модулем упру-

Рис. 2. Результаты моделирования цилиндрической панели, подверженной ударному воздействию

Рис. 3. К построению расчётной схемы для сферической оболочки

гости $E = 210$ ГПа, пределом текучести $\sigma_{ys} = 240$ МПа. Реономные свойства этого материала определяются (10) с константами $C = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $n = 8,9$. Константы, входящие в уравнения (6), (8), заимствованы из [8–10].

Принимается, что в начальный момент времени микроповреждения в материале оболочки распределены равномерно с концентрацией $\xi = 0,04$. Столкновение оболочки с преградой происходит на скорости $V_Y = 120 \text{ м/с}$.

Расчётная область оболочки Ω , выбранная с учётом симметрии задачи, представлена на том же рис. 3. Она аппроксимировалась конечно-разностной сеткой 20×30 ячеек. Использовались четыре структурных подэлемента (слоя оболочки). Вычисления проводились с использованием схемы типа «крест» с шагом интегрирования по времени $\Delta t = 10 \text{ мкс}$.

При высокоскоростном столкновении с жёсткой преградой оболочка теряет несущую способность — возникает предельное состояние, связанное с потерей её устойчивости в зоне контакта и последующим смятием (рис. 4), где показано изменение (деформирование) геометрии самой оболочки в процессе соударения и соответствующие положения её центральной точки B в зоне контакта. Стенка оболочки в этой точке подвергается конечным смещениям, более чем на порядок превышающим её толщину (см. рис. 5 а), где 1, 2 — соответственно вертикальные смещения без учёта и с учётом повреждений, 3 — горизонтальные смещения.

Рис. 4. Деформирование сферической оболочки в процессе соударения

Сохранение консервативности энергии, следовательно, и вычислительной устойчивости следует из рис. 5 б, где цифрами 1, 2, 3 обозначены изменение во времени кинетической, потенциальной с энергией демпфирования и полной энергий соответственно.

Рис. 5. Изменение по времени максимальных смещений (а) и энергий (б) в сферической оболочке

Рис. 6. Локализация повреждений в зоне контакта

На границе зоны контакта происходит интенсивное образование и развитие повреждений, максимальный уровень которых достигается в момент времени $t = 1485$ мкс и составляет более 17 %, причём наиболее поврежденным оказывается внешний слой. Из анализа возникающих в оболочке напряженных и деформированных состояний, полученных с учётом и без учёта повреждаемости материала, следует заметное влияние накапливаемых микроповреждений на величину и характер протекания упругой составляющей деформирования и особенно релаксацию напряжений.

В результате высокоскоростного деформирования повреждения от разрозненных скоплений в начале соударения локализуются в виде узкой зоны вдоль образовавшейся границы зоны контакта (рис. 6). Здесь происходит разупрочнение материала из-за накопленных повреждений и в меньшей мере — из-за возникновения повышенных температур с образованием полос сдвига и разрушение оболочки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 07-01-00555-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Zohdi T. Homogenization Methods and Multiscale Modeling / In: *Encyclopedia of Computational Mechanics. Vol. 2: Solids and Structures*, E. Stein, R de Borst, T. J. R. Hughes (eds.). — Chichester: John Wiley & Sons, 2004. — P. 407–430.
2. Gosh S., Lee K., Moorthy S. Two-Scale Analysis of Heterogeneous Elastic-Plastic Materials with Asymptotic Homogenization and Voronoi Cell Finite Elements // *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1996. — Vol. 132. — P. 63–116.
3. Hutchinson J. W. Plasticity at the micron scale // *Int. J. Solids Struct.*, 2000. — Vol. 37. — P. 225–238.
4. Needleman A. Computational mechanics at the mesoscale // *Acta Mater.*, 2000. — Vol. 48. — P. 105–124.
5. Кужуджанов В. Н. О структуре полос локализации деформирования и нелокальной пластичности при динамическом нагружении // *Изв. РАН. МТТ*, 1998. — № 6. — С. 104–115.
6. Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics / In: *Handbuch der Physik*. — N.Y.: Springer, 1965. — Vol. III/3. — 602 p.
7. Петушков В. А. Локальные течения повреждаемой деформируемой среды при ударных взаимодействиях с кавитирующей жидкостью // *Изв. РАН. МЖГ*, 2007. — № 3. — С. 121–133.

8. Shockey D. A., Seaman L., Curran D. R. The microstatistical fracture mechanics approach to dynamic fracture problem // *Int. J. Fract.*, 1985. — Vol. 27, No. 1. — P. 145–157.
9. Nemes J. A., Eftis J., Randles P. W. Viscoplastic constitutive modeling of high strain-rate deformation, material damage and spall fracture // *J. Appl. Mech.*, 1990. — Vol. 57, No. 2. — P. 282–291.
10. Amar G., Dufailly J. Identification and validation of visco plastic damage constitutive equations // *Eur. J. Mech.*, 1993. — No. A 2. — P. 197–218.
11. Бессилинг Дж. Ф. Теория пластического течения начально-изотропного материала, который анизотропно упрочняется при пластических деформациях / В сб.: *Механика*: Период. сб.; Пер. с иностр. яз. — М.: Мир, 1961. — Т. 2. — С. 124–168.
12. Петушков В. А., Каценко В. А. Структурное моделирование нелинейных процессов деформирования конструкций с трещинами при циклических воздействиях // *Машиноведение*, 1988. — № 1. — С. 3–11.
13. Петушков В. А. Статистические факторы в анализе процессов деформирования и оценке ресурса / В сб.: *Статистические закономерности малоциклового разрушения*. — М.: Наука, 1989. — С. 236–245.
14. Петушков В. А., Фролов К. В. Динамика гидроупругих систем при импульсном возбуждении / В сб.: *Динамика конструкций гидроаэроупругих систем*. — М.: Наука, 2002. — С. 162–202.
15. Петушков В. А., Скороходова Н. В. Распространение ударных волн в нелинейно деформируемых оболочках сложной формы // *Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки*, 2008. — № 3. — С. 81–93.

Поступила в редакцию 02/I/2009;
в окончательном варианте — 16/II/2009.

MSC: 74K25, 74S20, 37M05

CRITICAL STATES OF A DAMAGED NON-LINEARLY DEFORMED MEDIUM DURING HIGH-SPEED COLLISION WITH AN OBSTACLE

V. A. Petushkov

A. A. Blagonravov Mechanical Engineering Institute RAS,
4, M. Khariton'evskii per., Moscow, 101990.

E-mail: pva_imash@bk.ru

Generalized model of the nonlinear interconnected deformation and fracture of a damaged polycrystalline media is presented at high-speed shock influence conditions. Geometrical non-linearity caused by finite non-linear deformations depending on speed, behavior of materials with variable micro structure, anisotropic hardening and Baushinger-effect are considered. Particular attention is paid to problems of damage localization, progression and final fracture of non-linearity deformed bodies. Justification of the proposed model is implemented and nonlinear wave processes in a thin-walled shell are studied at high-speed collision condition with an obstacle.

Key words: *nonlinear deformable medium, damaging, shells, shock loading, fracture, mathematical simulation.*

Original article submitted 02/I/2009;
revision submitted 16/II/2009.

Petushkov Vladimir Alexeevich, Dr. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Laboratory of Mathematical Simulation.