Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Васильев, Многополевое моделирование устойчивости дискретной многозвенной и структурной оболочечной систем, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 1(), 289–293

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu660>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 17:39:56

3. Васин Р. А. Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении / В сб.: *Упругость и неупругость. Вып. 1.* — М.: МГУ, 1971. — С. 69–126.

Поступила в редакцию 06/II/2009;
в окончательном варианте — 25/II/2009.

MSC: 74C05

UNIFORM REPRESENTATION OF THE BASIC CONSTRAINTS OF PLASTICITY THEORY

N. N. Stolayrov, N. I. Dedov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100.

E-mail: tpm@samgtu.ru

Matrix presentation of the basic constraints for the problems of plastic deformation numerical analysis in various plasticity theories at simple and complex loading is given. Matrix parameters are obtained for the strain rate hardening and Ilyushin's theories.

Key words: stress, strain, elastic, plastic, deformation, plastic flow, matrix, numerical analysis.

Original article submitted 06/II/2009;
revision submitted 25/II/2009.

*Stolayrov Nikolay Nikolayevich. Dr. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Dep. of Mechanics.
Dedov Nikolay Ivanovich, Ph. D. (Techn.), Ass. Prof., Dep. of Mechanics.*

УДК 539.3

МНОГОПОЛЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНОЙ МНОГОЗВЕННОЙ И СТРУКТУРНОЙ ОБОЛОЧЕЧНОЙ СИСТЕМ

А. А. Васильев

Тверской государственный университет,
170100, Тверь, ул. Желябова, 33.

E-mail: alvasiliev@yandex.ru

На примерах дискретной многозвенной системы и периодически подкрепленной шпангоутами цилиндрической оболочки представлены методика и возможности многополевого подхода для моделирования устойчивости структурных упругих систем.

Ключевые слова: устойчивость, многозвенная система, оболочка, многополевая модель.

Введение. Одним из направлений фундаментальных исследований в механике в настоящее время является разработка обобщённых континуальных моделей. Такие модели развиваются и используются для моделирования структурных систем, в частности, конструкций, композитных материалов, гранулированных сред, наноматериалов и др. Широкое использование обобщённых моделей определяется тем, что они, в частности, позволяют находить обобщённые материальные функции (константы), характеризующие систему, их выражения через структурные параметры,

Васильев Алексей Анатольевич — доцент кафедры математического моделирования; к.ф.-м.н., доцент.

отыскивать решения на базе хорошо развитых аналитических методов математической физики, формировать эффективные вычислительные алгоритмы.

Разработка обобщённых моделей, как правило, основывается на изменении базовых гипотез и понятий классической теории. В представленном в статье многополюсовом подходе иерархические системы моделей структурных периодических систем строятся на основе введения макроячеек и, соответственно, увеличения используемого при моделировании числа функций. Разработка и применение многополюсового подхода в задачах динамики структурных систем представлены в [1–3], многополюсовое моделирование коротковолновых краевых эффектов рассмотрено в [4], в статье [5] многополюсовый подход используется для изучения структурных переходов в кристаллах. В настоящей статье представлены методика и возможности многополюсового подхода для моделирования устойчивости структурных систем.

Рис. 1. Многозвенник на упругих опорах. Обозначения: 1 — ячейка периодичности, 2 — макроячейка

1. Построение многополюсовых моделей дискретной системы. Рассмотрим модельную задачу устойчивости нагруженного сжимающей силой p шарнирно-опертого многозвенника на упругих опорах (см. рис. 1). Решается задача нахождения минимальной из сил, при которых существует нетривиальное решение краевой задачи

$$ca \frac{u_{m+2} - 4u_{m+1} + 6u_m - 4u_{m-1} + u_{m-2}}{a^4} + p \frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{a^2} + \frac{k}{a} u_m, \quad m = 1, 2, \dots, N; \quad (1)$$

$$u_0 = 0, \quad u_{-1} - 2u_0 + u_1 = 0;$$

$$u_{N+1} = 0, \quad u_{N+2} - 2u_{N+1} + u_N = 0,$$

где c и k — жесткости шарниров и опор, a — длины, N — количество звеньев многозвенника.

Из соотношений (1) длинноволновым разложением перемещений в ряд Тейлора с оставлением производных не выше четвертого порядка в уравнениях и низшего второго порядка в краевых условиях получаем соотношения однополюсовой континуальной модели:

$$ca u^{IV} + p \left(u'' + \frac{a^2}{12} u^{IV} \right) + \frac{k}{a} u = 0, \quad 0 < x < L,$$

$$u(0) = 0, \quad u''(0) = 0, \quad u(L) = 0, \quad u''(L) = 0.$$

Это хорошо известные соотношения задачи устойчивости шарнирно-опертой балки на упругом основании. Анализ относительных погрешностей нахождения критических сил $\bar{p} = \frac{p}{\sqrt{kc}}$ при различных значениях параметра системы $\bar{L} = L \sqrt{\frac{k}{a} \frac{1}{ca}}$ показывает, что однополюсовая модель применима только для моделирования систем с длинноволновыми формами потери устойчивости (малые $\bar{L}$) и нуждается в уточнении для моделирования систем с коротковолновыми формами потери устойчивости [6]. Коротковолновые формы представляют интерес, поскольку характерны и реально наблюдаются, например, при поверхностной потере устойчивости при сжатии слоя на достаточно жестком основании и внутренней потере устойчивости прослоев в жесткой среде.

Однополюсовая модель строилась с использованием уравнений для элементарной ячейки. Предполагалось, что смещения узлов многозвенника могут быть описаны одной функцией. Построение систем моделей в многополюсовом подходе базируется на отказе от этой гипотезы. При построении модели используются две функции. Обозначив перемещения чётных шарниров буквой u , нечётных — v , разностные уравне-

ния (1) для узлов макроячейки переписываем в виде

$$\begin{aligned} \frac{ca}{a^4}(u_{i-2} - 4v_{i-1} + 6u_i - 4v_{i+1} + u_{i+2}) + \frac{p}{a^2}(v_{i-1} - 2u_i + v_{i+1}) + \frac{k}{a}u_i &= 0, \\ \frac{ca}{a^4}(v_{i-1} - 4u_i + 6v_{i+1} - 4u_{i+2} + v_{i+3}) + \frac{p}{a^2}(u_i - 2v_{i+1} + u_{i+2}) + \frac{k}{a}v_{i+1} &= 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений длинноволновым переходом получаем соотношения задачи устойчивости двухполевой континуальной модели:

$$\begin{aligned} 4ca\left(\frac{u^{IV}}{3} - \frac{v^{IV}}{12} + \frac{(u-v)''}{a^2} + 2\frac{u-v}{a^4}\right) + p\left(2\frac{v-u}{a^2} + v'' + \frac{a^2}{12}v^{IV}\right) + \frac{k}{a}u &= 0, \\ 4ca\left(\frac{v^{IV}}{3} - \frac{u^{IV}}{12} + \frac{(v-u)''}{a^2} + 2\frac{v-u}{a^4}\right) + p\left(2\frac{u-v}{a^2} + u'' + \frac{a^2}{12}u^{IV}\right) + \frac{k}{a}v &= 0. \end{aligned}$$

Введением новых функций $U = \frac{u+v}{2}$ и $V = \frac{u-v}{2}$ система расщепляется на два несвязанных уравнения:

$$\begin{aligned} caU^{IV} + p\left(U'' + \frac{a^2}{12}U^{IV}\right) + \frac{k}{a}U &= 0, \\ 4ca\left(\frac{5}{12}V^{IV} + \frac{2}{a^2}V'' + \frac{4}{a^4}V\right) - p\left(\frac{4}{a^2}V + V'' + \frac{a^2}{12}V^{IV}\right) + \frac{k}{a}V &= 0. \end{aligned}$$

Первое уравнение совпадает с уравнением однополевой теории. Следовательно, двухполевая модель содержит однополевую, обладает её свойствами при моделировании длинноволновых форм потери устойчивости, для которых, как было отмечено, однополевая модель даёт достаточно точный результат. Анализ показывает, что второе уравнение уточняет классическую модель для коротковолновых форм потери устойчивости. На рис. 2 приведены графики относительной погрешности нахождения критических сил системы на основе однополевой (цифра 1) и двухполевой (цифра 2) моделей при различных значениях параметра $\bar{L}$ для системы из восьми ячеек ($N = 8$). Относительная погрешность определения безразмерных критических сил на основе двухполевой модели мала при моделировании не только систем с длинноволновыми (малые $\bar{L}$), но и с коротковолновыми формами потери устойчивости (большие $\bar{L}$). Отметим, что уточнение имеет место для параметров, при которых однополевая модель давала наибольшую погрешность.

2. Построение многополевых моделей устойчивости континуальной системы. Рассмотрим задачу устойчивости подкрепленной шпангоутами цилиндрической оболочки под внешним давлением (рис. 3).

В качестве исходной принимаем известную постановку задачи, которая включает [7]: уравнения устойчивости полубезмоментной теории для функции перемещений пролетов $\Phi_m(x, \varphi)$, $ma \leq x \leq (m+1)a$:

$$L\Phi_m = 0, \quad L \equiv B_x \partial_x^4 + \frac{D}{R^6} \partial_\varphi^4 (\partial_\varphi^4 + 2\partial_\varphi^2 + 1) + \frac{p}{R^3} \partial_\varphi^4 (\partial_\varphi^2 + 1),$$

Рис. 2. Относительная погрешность нахождения критических сил с использованием однополевой (кривая 1) и двухполевой (кривая 2) моделей

Рис. 3. Нагруженная равномерным внешним давлением p периодически подкрепленная шпангоутами цилиндрическая оболочка: 1 — ячейка периодичности, 2 — микроячейка

уравнение для осевых перемещений шпангоутов $V_m(\varphi)$:

$$EJ\partial_\varphi^2 (\partial_\varphi^4 V_m + 2\partial_\varphi^2 V_m + V_m) = R^4 (S_{m-1}(a) - S_m(0)),$$

где $\partial_\varphi S_m = -B_x R \partial_x^3 \Phi_m$, а также четыре условия стыковки.

Отметим, что в отличие от предыдущего случая дискретной системы, в рассматриваемом случае существенно новым является то, что ячейка периодичности описывается континуальными уравнениями. Поэтому первым шагом в построении моделей является получение путём исключения пролётов точного разностного по продольной координате нелокального уравнения устойчивости

$$L\Phi = 0, \quad L \equiv (\nabla_{-2a}\nabla_{+2a} + 4) + G_\infty - F_\infty(\nabla_{-a}\nabla_{+a} + 2),$$

где введены следующие обозначения для разностного и дифференциальных операторов:

$$\begin{aligned} \nabla_{\pm\xi}\Phi(x, \varphi) &= \pm[\Phi(x \pm \xi, \varphi) - \Phi(x, \varphi)], \\ G_s &= \sum_{r=0}^s (-1)^r \left(\frac{4^{r+1}}{(4r)!} + \frac{4^{r+1}L_c}{(4r+3)!} \right) (\bar{a}\Lambda)^{4r}, \quad L_c = \frac{EJ\bar{a}^3}{B_x R^3} \partial_\varphi^4 (\partial_\varphi^2 + 1)^2, \\ F_s &= \sum_{r=0}^s \left(\frac{4}{(4r)!} + \frac{-L_c}{(4r+3)!} \right) (\bar{a}\Lambda)^{4r}, \quad \Lambda^4 = -\frac{R}{B_x} (\partial_\varphi^6 + \partial_\varphi^4) \left(p + \frac{D_\varphi}{R^3} (\partial_\varphi^2 + 1) \right). \end{aligned}$$

Методика построения приближенных континуальных по продольной координате моделей на основе этих разностных уравнений такая же, как и при построении моделей многосвязника. На базе элементарной ячейки с использованием при моделировании одной функции перемещений строится однополевая модель, а на базе макроячейки с использованием двух функций — двухполевая.

Сравнение моделей проводится на основе сравнения их характеристических уравнений, получаемых для решений вида

$$\Phi(x, \varphi) = \Phi e^{i(kx+n\varphi)}.$$

Анализ показывает, что аналогично случаю дискретной системы двухполевая модель совпадает с однополевой при малых волновых числах k . Однако она точна не только при малых k , но и при k , близких к π/a , т.е. при моделировании оболочек, как с длинноволновыми, так и с коротковолновыми формами потери устойчивости. На рис. 4 для значений $a/R = 1$, $R/h = 500$, $\mu = 0,3$, $D_\varphi = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$, $B_x = Eh$, $\frac{EJ}{a} = 1,5D_\varphi$, $p_a = \frac{4\pi R}{a} \sqrt[4]{\frac{B_x}{R} \left(\frac{D_\varphi}{3R^3} \right)^3}$ представлены построенные на основе точных соотношений оболочки (отмечены цифрой 0), однополевой и двухполевой моделей (цифры 1 и 2) зависимости безразмерной критической силы $\bar{p} = p/p_a$ от волнового числа, получаемые минимизацией $p = p(n, k)$ по n .

Рис. 4. Зависимости критической силы от волнового числа, рассчитанные с использованием структурной (кривая 0), однополевой (кривая 1), двухполевой (кривая 2) моделей

шений оболочки (отмечены цифрой 0), однополевой и двухполевой моделей (цифры 1 и 2) зависимости безразмерной критической силы $\bar{p} = p/p_a$ от волнового числа, получаемые минимизацией $p = p(n, k)$ по n .

Заключение. В настоящем кратком сообщении представлены результаты разработки многополевого подхода для моделирования устойчивости структурных систем. Кратко изложена методика, представлены двухполевые модели, с помощью сравнительного анализа показано, что двухполевые модели уточняют однополевые учетом коротковолновых форм потери устойчивости, у которых длина полуволны сравнима с длиной ячейки периодичности. Последовательное уточнение для моделирования систем со средними значениями числа полуволн дают модели более высоких уровней, получаемые с удвоением числа используемых функций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ильющина Е. А. Одна из моделей сплошной среды с учетом микроструктуры // *Прикладная математика и механика*, 1969. — Т. 33, № 5. — С. 917–923.
2. Vasiliev A. A., Dmitriev S. V., Miroshnichenko A. E. Multi-field continuum theory for medium with microscopic rotations // *Int. J. Solids Struct.*, 2005. — Vol. 42, No. 24–25. — P. 6245–6260.
3. Vasiliev A. A., Miroshnichenko A. E., Ruzzene M. Multi-field model for Cosserat media // *J. Mech. Mater. Struct.*, 2008. — Vol. 3, No. 7. — P. 1365–1382.
4. Васильев А. А. Континуальное моделирование двухрядной конечной дискретной системы с учетом краевых эффектов // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика*, 1996. — № 5. — С. 66–68.
5. Dmitriev S. V., Shigenari T., Vasiliev A. A. et al. Dynamics of domain walls in an incommensurate phase near the lock – in transition: one-dimensional crystal model // *Phys. Rev. B*, 1997. — Vol. 55, No. 13. — P. 8155–8164.
6. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. — М.: Гостехиздат, 1946. — 532 с.
7. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. — М.: Машиностроение, 1978. — 311 с.

Поступила в редакцию 19/I/2009;
в окончательном варианте — 13/II/2009.

MSC: 74K25, 93D15

MULTI-FIELD MODELING OF DISCRETE MULTI-LINK AND STRUCTURAL SHELL SYSTEM STABILITY

A. A. Vasiliev

Tver State University,
170100, Tver, Zhelyabova st., 33.
E-mail: alvasiliev@yandex.ru

Technique and possibilities of a multi-field approach to modeling of stability of structural elastic systems are presented on examples of discrete multi-link system and periodically supported cylindrical shell.

Key words: stability, multi-link system, shell, multi-field model.

Original article submitted 19/I/2009;
revision submitted 13/II/2009.

Vasiliev Aleksey Anatolievich, Ph. D. (Phys. & Math.), Ass. Prof., Dept. of Mathematical Modeling.