Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Стружанов, Е. Ю. Просвиряков, Растяжение с кручением. Сообщение 3. Итерационный метод расчета параметров равновесия и устойчивость процесса деформирования механической системы при ее смешанном нагружении, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 1(), 66–74

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu662>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 18:37:39

УДК 539.3

**РАСТЯЖЕНИЕ С КРУЧЕНИЕМ. СООБЩЕНИЕ 3.
ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ
РАВНОВЕСИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОЦЕССА
ДЕФОРМИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
ПРИ ЕЁ СМЕШАННОМ НАГРУЖЕНИИ**

В. В. Стружанов¹, Е. Ю. Просвиряков²

¹ Институт машиноведения УрО РАН,
620219, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

² Уральский государственный университет им. А. М. Горького,
620083, г. Екатеринбург, пр-т Ленина, 51.

E-mails: stru@imach.uran.ru, evgen_pros@mail.ru

Продолжено исследование рассмотренной в предыдущих сообщениях механической системы для реализации растяжения с кручением образца при смешанном нагружении конструкции. Предложена итерационная процедура решения нелинейных уравнений равновесия в предположении об упругопластическом характере деформирования образца. Установлена связь между началом расхождения итерационного процесса и потерей устойчивости процесса деформирования.

Ключевые слова: растяжение с кручением, итерационная процедура, устойчивость, потеря устойчивости.

Введение. В сообщениях [1, 2] основное внимание было уделено свойствам материала образца специальных размеров при активном деформировании растяжением с кручением и исследованию устойчивости этого процесса в механической системе, его реализующей при мягком и смешанном нагружении. В данной работе рассматривается методика решения нелинейных уравнений равновесия этой механической системы. Итерационная схема, изложенная в работах [3, 4] и применённая для решения одномерных задач при учёте деформационного разупрочнения упругопластического материала, распространяется на неоднородную задачу определения параметров равновесия изучаемой системы (материал образца — упругопластический, нагружение системы — смешанное). Также установлена связь начала расходимости итерационного процесса с потерей устойчивости процесса деформирования.

1. Конструктивный элемент и свойства образца. Рассмотрим конструктивный элемент (см. рис.), состоящий из двух упругих стержней 1 и 2, предназначенных для реализации процесса растяжения с кручением образца 3 [2]. Стержень 1 передаёт на образец растягивающее усилие (в сечении $B-B$ заблокировано кручение), а стержень 2 — крутящий момент (горизонтальное перемещение сечения $C-C$ заблокировано). Геометрия образца такова, что сила, растягивающая образец, по величине равна напряжению σ , удлинение образца — деформации растяжения ε , крутящий момент, действующий на образец, — касательному напряжению τ , а угол закручивания — деформации сдвига γ [1]. Система нагружена смешанным способом, а именно, точкам сечения $A-A$

Стружанов Валерий Владимирович — главный научный сотрудник отдела механики машин и технологий; д.ф.-м.н., профессор.

Просвиряков Евгений Юрьевич — магистрант кафедры теоретической механики.

Конструктивный элемент

первого стержня задано монотонно возрастающее перемещение u , а в сечении $D-D$ второго стержня задан монотонно возрастающий крутящий момент M . Жёсткость стержня 1 при растяжении равна λ_1 , жёсткость стержня 2 при кручении — λ_2 . Следуя работе [1], полагаем, что свойства материала образца заданы скалярным потенциалом $\Pi(\varepsilon, \gamma)$, т. е. $\sigma = \Pi_{,\varepsilon}$, $\tau = \Pi_{,\gamma}$. В общем случае зависимости $\sigma(\varepsilon, \gamma)$ и $\tau(\varepsilon, \gamma)$ представляют собой поверхности с падающим участком. Следовательно, описывается не только упрочнение материала, но и его разупрочнение. Здесь и ниже запятая, стоящая после знака функции, обозначает частные производные по переменным, обозначенным после запятой.

Инкрементальные определяющие соотношения, связывающие приращения напряжений и деформаций, записанные в векторно-матричной форме, имеют вид [5]

$$d\mathbf{p} = H(\Pi)d\mathbf{e}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{p}$ — вектор напряжений с компонентами (σ, τ) , а $\mathbf{e}$ — вектор деформаций с компонентами (ε, γ) ,

$$H(\Pi) = \begin{pmatrix} \Pi_{,\varepsilon\varepsilon} & \Pi_{,\varepsilon\gamma} \\ \Pi_{,\varepsilon\gamma} & \Pi_{,\gamma\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

— матрица Гессе потенциальной функции Π . Обозначим матрицу $H(\Pi)$ символом C^p , отражая тот факт, что это матрица инкрементальных (мгновенных) модулей материала. Отметим, что матрица C^p является симметричной, т. е. $c_{12} = c_{21}$.

Материал образца считаем упругопластическим. В этом случае справедливы представление полных деформаций суммой $\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p$ и определяющее соотношение $\mathbf{p} = C\mathbf{e}^e = C(\mathbf{e} - \mathbf{e}^p)$. Здесь $\mathbf{e}^e$, $\mathbf{e}^p$ — соответственно векторы упругих и пластических составляющих полной деформации, матрица $C = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$, где E — модуль Юнга, G — модуль сдвига материала образца в состоянии упругости. Тогда выполняется равенство

$$d\mathbf{p} = C(d\mathbf{e} - d\mathbf{e}^p). \quad (2)$$

Приравнявая правые части выражений (1) и (2), находим, что

$$d\mathbf{e}^p = (I - SC^p)d\mathbf{e}, \quad (3)$$

где I — единичная матрица второго порядка, а $S = C^{-1}$. Уравнение (3) определяет так называемый инкрементальный закон пластичности [6], поскольку в его выражение входят инкрементальные модули материала.

В силу сделанных выше предположений величины составляющих полной деформации не зависят от вида пути деформирования. Отсюда, интегрируя равенство (3), получаем значения компонент вектора $\mathbf{e}^p$ в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon^p &= \int_0^\varepsilon \left(1 - \frac{c_{11}}{E}\right) d\varepsilon - \int_0^\gamma \frac{c_{12}}{E} d\gamma, \\ \gamma^p &= \int_0^\varepsilon \left(-\frac{c_{21}}{G}\right) d\varepsilon + \int_0^\gamma \left(1 - \frac{c_{22}}{G}\right) d\gamma,\end{aligned}$$

следовательно, приращения пластических деформаций на участке $[\varepsilon^* + \Delta\varepsilon, \gamma^* + \Delta\gamma]$

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon^p &= \int_{\varepsilon^*}^{\varepsilon^* + \Delta\varepsilon} \left(1 - \frac{c_{11}}{E}\right) d\varepsilon - \int_{\gamma^*}^{\gamma^* + \Delta\gamma} \frac{c_{12}}{E} d\gamma, \\ \Delta\gamma^p &= \int_{\varepsilon^*}^{\varepsilon^* + \Delta\varepsilon} \left(-\frac{c_{21}}{G}\right) d\varepsilon + \int_{\gamma^*}^{\gamma^* + \Delta\gamma} \left(1 - \frac{c_{22}}{G}\right) d\gamma.\end{aligned}$$

Разлагая интегралы в этих выражениях в ряды в окрестности точки $(\varepsilon^*, \gamma^*)$ и оставляя только первый (линейный) член, находим

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon^p &= \left(1 - \frac{c_{11}(\varepsilon^*, \gamma^*)}{E}\right) \Delta\varepsilon - \frac{c_{12}(\varepsilon^*, \gamma^*)}{E} \Delta\gamma, \\ \Delta\gamma^p &= \left(-\frac{c_{21}(\varepsilon^*, \gamma^*)}{G}\right) \Delta\varepsilon + \left(1 - \frac{c_{22}(\varepsilon^*, \gamma^*)}{G}\right) \Delta\gamma,\end{aligned}$$

или в векторно-матричном виде:

$$\Delta\mathbf{e}^p = (I - SC^p(\varepsilon^*, \gamma^*))\Delta\mathbf{e}, \quad (4)$$

2. Потенциальная функция и уравнения равновесия системы. Рассматриваемая механическая система (конструктивный элемент) при квазистатическом активном нагружении является градиентной. Поэтому её поведение описывается потенциальной функцией, которая имеет вид

$$W = \frac{\lambda_1(u - \varepsilon)^2}{2} + \frac{\lambda_2(\psi - \gamma)^2}{2} + \Pi(\varepsilon, \gamma) - \int_0^\psi M d\psi,$$

где первые два слагаемых — потенциальная энергия упругих деформаций стержней 1 и 2 соответственно; третье слагаемое — энергия деформаций детали; последнее слагаемое — работа крутящего момента, взятая с противоположным знаком. Величины λ_1 , λ_2 , u , M играют роль параметров управления системой, а величины ε , γ , ψ — параметров состояния системы, которые

принимают свои значения в положениях равновесия, отвечающих заданным параметрам управления.

Положения равновесия конструктивного элемента определяют критические точки функции W [5], которые являются решениями системы уравнений:

$$\begin{aligned} W_{,\varepsilon} &= \sigma(\varepsilon, \gamma) - \lambda_1(u - \varepsilon) = 0, W_{,\gamma} = \tau(\varepsilon, \gamma) - \lambda_2(\psi - \gamma) = 0, \\ W_{,\psi} &= \lambda_2(\psi - \gamma) - M = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Упростим задачу, введя модельную потенциальную функцию, зависящую только от существенных переменных состояния и управляющих параметров [7]. Представим функцию W в виде

$$W = V + \frac{\lambda_2(\psi - \gamma)^2}{2} - \int_0^{\psi - \gamma} M d\varphi,$$

где $V = \frac{\lambda_1(u - \varepsilon)^2}{2} + \Pi(\varepsilon, \gamma) - \int_0^\gamma M d\varphi$. Заметим, что V является потенциальной функцией механической системы, в которой отсутствует стержень 2. Таким образом, исключены параметры состояния ψ и параметр управления λ_2 . Критические точки функции V определяются из решения следующей системы уравнений:

$$V_{,\varepsilon} = \sigma(\varepsilon, \gamma) - \lambda_1(u - \varepsilon) = 0, V_{,\gamma} = \tau(\varepsilon, \gamma) - M = 0. \quad (6)$$

Отметим, что уравнения (6) — это два первых уравнения системы (5), в которых выражение $\lambda_2(\psi - \gamma)$ заменено, на основании третьего уравнения из системы (5), величиной M .

Сравнивая системы уравнений (5) и (6), находим, что число решений у них одинаково и зависит только от значений управляющих параметров u и M . Кроме того, в положениях равновесия основной и упрощённой механических систем они определяют одни и те же параметры состояния ε и γ . После решения системы (6) параметр ψ независимо находится из третьего уравнения системы (5) при заданном параметре λ_2 . Следовательно, параметры ψ , λ_2 являются несущественными для расчёта параметров равновесия конструктивного элемента.

Запишем уравнения (6) в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{p} - \Lambda_1 \mathbf{t} + \Lambda_2 \mathbf{e} = 0, \quad (7)$$

где вектор $\mathbf{t}$ имеет компоненты (u, M) , а $\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Lambda_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Используя равенство $\mathbf{p} = C\mathbf{e}^e = C(\mathbf{e} - \mathbf{e}^p)$, перепишем это уравнение в виде

$$C(\mathbf{e} - \mathbf{e}^p) - \Lambda_1 \mathbf{t} + \Lambda_2 \mathbf{e} = 0. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) можно представить как сумму решений двух задач, а именно основной и корректирующей. Основная задача определяется равенством

$$C\boldsymbol{\theta} - \Lambda_1 \mathbf{t} + \Lambda_2 \boldsymbol{\theta} = 0$$

и является задачей о вычислении параметров равновесия конструктивного элемента в предположении упругости материала образца, которая сохраняется при любых величинах внешних воздействий M и u . Её решение задаёт выражение

$$\theta = P_1 \Lambda_1 t,$$

где матрица $P_1 = (C + \Lambda_2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 + E} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix}$. Корректирующая задача имеет вид

$$C(\xi - e^p) + \Lambda_2 \xi = 0$$

и является задачей об определении параметров равновесия также полностью упругого конструктивного элемента, у которого сечение $B-B$ закреплено ($u = 0$), сечение $C-C$ свободно от нагрузки ($M = 0$), образец обладает начальной деформацией, равной по величине компонентам вектора e^p . Решение корректирующей задачи есть вектор

$$\xi = P_1 C e^p.$$

Очевидно, что решение исходной задачи (8) при заданных векторах t и e^p определяет сумма решений основной и корректирующей задач ($e = \theta + \xi$).

3. Итерационный метод решения уравнений равновесия. Пусть теперь конструктивный элемент находится в положении равновесия при $M = M_0$, $u = u_0$ (вектор управляющих параметров равен t_0). В этом положении в образце имеют место полные и пластические деформации — компоненты векторов e_0 и e_0^p , напряжения — компоненты вектора p_0 , а свойства материала характеризуют инкрементальные модули — компоненты матрицы C_0^p .

Возмутим данное положение равновесия, увеличив вектор управляющих параметров на малую величину t_Δ . Параметры нового положения равновесия для $t = t_0 + t_\Delta$ определяются выражениями:

$$p = p_0 + p_\Delta, \quad e = e_0 + e_\Delta, \quad e^p = e_0^p + e_\Delta^p. \quad (9)$$

Векторы p_Δ , e_Δ , e_Δ^p являются решениями так называемой возмущённой исходной задачи, т. е. удовлетворяют уравнению

$$p_\Delta - \Lambda_1 t_\Delta + \Lambda_2 e_\Delta = 0.$$

Для их определения воспользуемся следующей итерационной процедурой. Сначала для t_Δ находим решение основной задачи: $\theta_\Delta = P_1 \Lambda_1 t_\Delta$. Так как здесь не выделена пластическая составляющая деформаций, то вектор θ_Δ можно рассматривать только как первое приближение к искомому решению. Следовательно, необходима корректировка данного приближения. По формуле (4) находим приращение пластических деформаций $e_{\Delta 1}^p = (I - SC_0^p) \theta_\Delta$ и решение корректирующей задачи $\xi_{\Delta 1} = P_1 C e_{\Delta 1}^p$. Тогда второе приближение равно $e_{\Delta 1} = \theta_\Delta + \xi_{\Delta 1}$. Так как полные деформации изменились (увеличились), то происходит и увеличение и их пластических составляющих. Вычисление вновь возникших приращений пластических деформаций начинаем с определения значений инкрементальных модулей, которые они принимают при полных деформациях, заданных компонентами вектора $e_0 + \theta_\Delta$. Эти

модули есть компоненты матрицы C_1^p , которые вычисляются после подстановки компонент вектора полной деформации в выражения для компонент матрицы C^p . Теперь находим $e_{\Delta 2}^p = (I - SC_1^p) \xi_{\Delta 1}$, определяем решение корректирующей задачи $\xi_{\Delta 2} = P_1 C e_{\Delta 2}^p$ и третье приближение — $e_{\Delta 2} = e_{\Delta 1} + \xi_{\Delta 2}$. Затем для полных деформаций $e_0 + \theta_{\Delta} + \xi_{\Delta 1}$ вычисляем матрицу C_2^p и осуществляем корректировку и т. д. Данный итерационный процесс представим в виде матричного ряда

$$e_{\Delta n} = \sum_{k=1}^n B^{n-1} \theta_{\Delta}. \quad (10)$$

Здесь $B^0 = I$, $B^k = \prod_{i=1}^k A_{k-i}$ ($k \in \mathbb{N}$), где $A_j = P_1 C (I - SC_j^p)$ ($j = \{0\} \cup \mathbb{N}$) — это матрицы, получающиеся из матрицы

$$A = P_1 C (I - SC^p) = \begin{pmatrix} \frac{E-c_{11}}{\lambda_1+E} & \frac{-c_{12}}{\lambda_1+E} \\ \frac{-c_{21}}{G} & \frac{G-c_{22}}{G} \end{pmatrix}$$

после вычисления инкрементальных модулей c_{11} , c_{22} , c_{12} для соответствующих значений деформаций. Если ряд (10) сходится, то в результате получаем компоненты векторов e_{Δ} и e_{Δ}^p и, следовательно, вектора $p_{\Delta} = C(e_{\Delta} - e_{\Delta}^p)$. Тогда формулы (9) дают параметры равновесия системы для $t = t_0 + t_{\Delta}$. Затем производим следующее догружение и т. д.

Исследование сходимости ряда (10) требует оценки спектрального радиуса $\rho(A)$ матрицы A , который определяется её собственными значениями. Запишем характеристическое уравнение матрицы A :

$$k^2 - ak + b = 0, \quad (11)$$

где $a = \text{Sp } A = \frac{E-c_{11}}{\lambda_1+E} + \frac{G-c_{22}}{G}$, $b = \det A = \frac{(E-c_{11})(G-c_{22})-c_{12}^2}{(\lambda_1+E)G}$ — след и определитель матрицы A соответственно. Отметим, что матрица A не имеет комплексных собственных значений. Действительно, вычисляя дискриминант квадратного (характеристического) уравнения (11), находим, что он всегда неотрицателен. Причём равенство нулю дискриминанта возможно только тогда, когда $c_{11} = E$, $c_{22} = G$, $c_{12} = c_{21} = 0$ (состояние упругости материала образца). В этом случае собственные числа матрицы A равны нулю.

Найдём теперь ограничения, накладываемые на коэффициенты уравнения (11), такие, чтобы все собственные значения матрицы A по модулю были меньше единицы. В этом случае спектр $\rho(A) < 1$. Сделаем замену переменной $k = \frac{1+t}{1-t}$. Подставляя эту величину в уравнение (11), получаем

$$(a+b+1)t^2 + (2-2b)t + (1-a+b) = 0. \quad (12)$$

Если корни уравнения (11) расположены в интервале $(-1, 1)$, то корни уравнения (12) находятся в интервале $(-\infty, 0)$. Согласно теореме Стодолы [8] корни уравнения (12) лежат на числовой оси слева от нуля тогда и только тогда, когда выполняются следующие неравенства:

$$\begin{cases} a+b+1 > 0, \\ 1-b > 0, \\ 1-a+b > 0. \end{cases} \quad (13)$$

Нетрудно показать, что при выполнении первого и третьего неравенств из системы (13) с учётом положительности дискриминанта уравнения (11) неравенство $1 - b > 0$ всегда справедливо. Теперь, используя неравенства $c_{11} < E$, $c_{22} < G$, которые следуют из выпуклости вверх поверхностей $\sigma = \sigma(\varepsilon, \gamma)$, $\tau = \tau(\varepsilon, \gamma)$ [1], находим, что $(a + b + 1) - (1 - a + b) = 2a > 0$. Таким образом, в данной задаче при выполнении третьего неравенства в системе (13) следует выполнение двух остальных неравенств, и неравенство $1 - a - b > 0$ является определяющим.

Далее

$$1 - a + b = \frac{\det H(V)}{(\lambda_1 + E)G},$$

где $H(V) = \begin{pmatrix} V_{,\varepsilon\varepsilon} & V_{,\varepsilon\gamma} \\ V_{,\gamma\varepsilon} & V_{,\gamma\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ — матрица Гессе потенциальной функции V , причём $H(V) = \Lambda_2 + H(\Pi) = \Lambda_2 + C^p$. Теперь, если $\det H(V) > 0$ (собственные значения матрицы Гессе одного знака), то $\rho(A) < 1$. Отметим, что собственные значения матрицы $H(V)$ в упругости оба положительны и сохраняют свой знак до тех пор, пока одно из них не станет равным нулю, когда $\det H(V) = 0$. В этом случае $1 - a + b = 0$ и $\rho(A) = 1$. Если $\det H(V) < 0$ (собственные значения разных знаков), то условия (13) нарушаются и $\rho(A) > 1$.

Известно [9], что матрица представляет сжимающий оператор, если её спектр меньше единицы. Поэтому в матричном ряде (10) каждый последующий член получается сжатием предыдущего до тех пор, пока $\rho(A_j) < 1$. Если же существует такой номер N , что при $j > N$ выполняется неравенство $\rho(A_j) > 1$, то сжатие сменяется растяжением и ряд начинает расходиться. Отсюда условием начала расходимости ряда (10) является выполнение равенства $\det H(V) = 0$ ($\rho(A) = 1$).

4. Сходимость итераций и устойчивость процесса деформирования. Установим связь между устойчивостью процесса деформирования и сходимостью приведённой выше итерационной процедуры. Для исследования устойчивости применим методику, изложенную в работе [10]. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}_H^3 = \{X, Y, Z\}$, где $X = \lambda_1 + c_{11}^*$, $Y = c_{22}^*$, $Z = c_{12}^*$, и величины c_{11}^* , c_{22}^* , $c_{12}^* \in \mathbb{R}$. Тогда множество $\Phi = \{\lambda_1 + c_{11}(\varepsilon, \gamma), c_{22}(\varepsilon, \gamma), c_{12}(\varepsilon, \gamma)\}$, которое определяется компонентами матрицы Гессе потенциальной функции V в положениях равновесия системы, является параметрическим представлением двумерного многообразия в $\mathbb{R}_H^3$. Множество точек из Φ , в которых матрица Гессе особенная ($\det H(V) = 0$), состоит из двух подмножеств L_1 и L_2 . Подмножество L_1 состоит из точек, где матрица Гессе имеет одно нулевое собственное значение. Его размерность равна двум. Подмножество L_2 — это точки, где матрица Гессе имеет два нулевых собственных значения. Его размерность равна нулю. Точки из L_1 образуют поверхность второго порядка в $\mathbb{R}_H^3$, которая является дискриминантным конусом матрицы Гессе [10]. Подмножество L_2 состоит из одной точки, а именно вершины конуса, расположенной в начале координат. Внутри конуса матрица Гессе положительно определена (оба собственных значения положительны), вне конуса её собственные значения имеют разные знаки или оба отрицательны. Если образ отображения Φ (точка в пространстве $\mathbb{R}_H^3$) располагается внутри конуса, то положение равновесия системы устойчиво, если вне конуса — то неустойчиво. Следовательно, пере-

ход от устойчивости к неустойчивости определяется равенством $\det H(V) = 0$. Сравнивая это условие с условием начала расходимости итерационного процесса, заключаем, что момент начала расходимости итераций соответствует моменту потери устойчивости процесса деформирования конструктивного элемента.

В заключение отметим, что смешанное нагружение можно осуществить и другим способом, а именно задавая в сечениях $D-D$ и $A-A$ (см. рис.) соответственно угол закручивания ψ и растягивающую силу P . И в этом случае рассуждения, аналогичные приведённым выше, приводят к подобным результатам.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 07-08-00125).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Стружанов В. В., Просвиряков Е. Ю. Растяжение с кручением. Сообщение 1: Свойства материала // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. — № 1(16). — С. 36–44.
2. Стружанов В. В., Просвиряков Е. Ю. Растяжение с кручением. Сообщение 2: Устойчивость процесса деформирования образца в механической системе. Жёсткое и мягкое нагружения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. — № 2(17). — С. 77–86.
3. Стружанов В. В., Жижерин С. В. Модель повреждающегося материала и итерационные методы расчёта напряжённого состояния при кручении // *Вычислительные технологии*, 2000. — Т. 5, № 2. — С. 92–104.
4. Жижерин С. В., Стружанов В. В. Итерационные методы и устойчивость в задаче о равномерном деформировании шара с центральной зоной из повреждающегося материала // *Изв. РАН. МТТ*, 2004. — № 2. — С. 114–125.
5. Стружанов В. В., Миронов В. И. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. — Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1995. — 192 с.
6. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и её приложения. — М.: Мир, 1980. — 608 с.
7. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф: В 2-х книгах. Кн. 1. — М.: Мир, 1984. — 350 с.
8. Постников М. М. Устойчивые многочлены. — М.: Наука, 1981. — 176 с.
9. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1984. — 655 с.
10. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф: В 2-х книгах. Кн. 2. — М.: Мир, 1984. — 285 с.

Поступила в редакцию 15/I/2009;
в окончательном варианте — 10/II/2009.

MSC: 74H55

**TENSION WITH TORSION. MESSAGE 3. ITERATIVE METHOD OF
EQUILIBRIUM PARAMETERS CALCULATION AND STABILITY OF
DEFORMATION PROCESS IN MECHANICAL SYSTEM AT MIXED
LOADING CONDITIONS**

V. V. Struzhanov¹, E. Yu. Prosviryakov²

¹ Institute of Engineering Science, Urals Branch, Russian Academy of Sciences,
91, Pervomajskaya st., Ekaterinburg, 620219.

² Ural State University,
51, prosp. Lenina, Ekaterinburg, 620083.

E-mails: stru@imach.uran.ru, evgen_pros@mail.ru

Research of a mechanical system that was started in the previous articles is continued here; in order realize the tension of a sample with torsion under mixed loading conditions. Iteration procedure is proposed for solving of non-linear equilibrium equations proposing elastic-plastic sample behavior. Correlation between iteration procedure divergence start and loss of deformation process stability is established.

Key words: *tension with torsion, iteration procedure, stability, stability loss.*

Original article submitted 15/I/2009;
revision submitted 10/II/2009.

*Struzhanov Valeriy Vladimirovich, Dr. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Division of Machines
Mechanics and Technology.*

Prosviryakov Eugeny Yurievich, Graduate Student, Dept. of Theoretical Mechanics.