Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Гурьева, Построение общего решения вырожденной системы Полмейера–Лунда–Редже, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 1(), 271–275

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu663>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:18:00

УДК 517.956.3, 517.957

ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННОЙ СИСТЕМЫ ПОЛМЕЙЕРА—ЛУНДА—РЕДЖЕ

А. М. Гурьева

Уфимский государственный авиационный технический университет,
450000, Уфа, ул. Карла Маркса, 12.

E-mails: adel-guryeva@mail.ru

Показано, что вырожденная система Полмейера—Лунда—Редже является системой лиувилевского типа, получены формулы для x - и y -интегралов в первом и во втором порядке. Показано, как с их помощью построить общее решение этой системы уравнений.

Ключевые слова: инварианты Лапласа, уравнение лиувилевского типа, интегралы.

Введение. В настоящее время в научной литературе имеется огромное количество работ, посвященных гиперболическим интегрируемым уравнениям, что и указывает на важность данных исследований (см., например, [1, 2]).

Определение точно интегрируемых гиперболических уравнений

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \quad (1)$$

было дано Ж. Г. Дарбу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравнение (1) называется *интегрируемым по Дарбу*, если у него существуют нетривиальные x - и y -интегралы.

Будем называть функцию $w(x, y, u, u_x, u_{xx}, \dots)$, не зависящую от y на всех решениях уравнения (1), его x -интегралом. Аналогично определяется y -интеграл.

Данная работа посвящена построению общего решения вырожденной системы Полмейера—Лунда—Редже

$$\begin{cases} u_{xy} = \frac{vu_xu_y}{uv+c}, \\ v_{xy} = \frac{uv_xv_y}{uv+c} \end{cases} \quad (2)$$

(c — ненулевая постоянная) с использованием x - и y -интегралов.

Общее решение системы уравнений (2). Известно, что система уравнений (2) является системой лиувилевского типа, для которой обобщенные инварианты Лапласа первого порядка есть вырожденные матрицы, а обобщенные инварианты Лапласа второго порядка равны нулю (см. [1, 3]).

Далее для удобства изложения материала введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_x, \quad u_2 = u_{xx}, \quad \dots, \quad v_1 = v_x, \quad v_2 = v_{xx}, \quad \dots, \\ \bar{u}_1 &= u_y, \quad \bar{u}_2 = u_{yy}, \quad \dots, \quad \bar{v}_1 = v_y, \quad \bar{v}_2 = v_{yy}, \quad \dots \end{aligned}$$

Построение интегралов — задача не из лёгких, так как порядок интеграла заранее неизвестен. Решением этой проблемы может служить гипотеза, высказанная А. В. Жибером: порядки интегралов и индексы, при которых происходит падение ранга обобщенных инвариантов Лапласа для систем уравнений, совпадают.

Гурьева Адель Минивасимовна — доцент кафедры математики; к.ф.-м.н.

Таким образом, система уравнений (2) имеет интегралы в первом порядке:

$$w(x) = \frac{u_1 v_1}{uv + c}, \quad \bar{w}(y) = \frac{\bar{u}_1 \bar{v}_1}{uv + c}; \quad (3)$$

и во втором порядке:

$$W(x) = \frac{u_2}{u_1} - \frac{uv_1}{uv + c}, \quad \bar{W}(y) = \frac{\bar{u}_2}{\bar{u}_1} - \frac{u\bar{v}_1}{uv + c}. \quad (4)$$

С учётом (3) соотношения (4) могут быть переписаны в виде

$$\begin{cases} lu_2 - uw(x) = u_1 W(x), \\ \bar{u}_2 - u\bar{w}(y) = \bar{u}_1 \bar{W}(y). \end{cases} \quad (5)$$

Относительно замены переменных $x = X(x')$, $y = Y(y')$ система уравнений (2) инвариантна, поэтому в новых переменных x' и y' система уравнений (5) принимает такой вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} \frac{1}{X'^2} - \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{X''}{X'^3} - uw(X) = \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{1}{X'} W(X), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} \frac{1}{Y'^2} - \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{Y''}{Y'^3} - u\bar{w}(Y) = \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{1}{Y'} \bar{W}(Y). \end{cases}$$

В дальнейшем у переменных x' и y' штрихи опустим, тогда последняя система примет вид

$$\begin{cases} u_2 - u_1 \left[\frac{X''}{X'} + W(X)X' \right] - uX'^2 w(X) = 0, \\ \bar{u}_2 - \bar{u}_1 \left[\frac{Y''}{Y'} + \bar{W}(Y)Y' \right] - uY'^2 \bar{w}(Y) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Выберем функции $X(x)$ и $Y(y)$ такими, что

$$X'^2 w(X) = \frac{d}{dx} \left[\frac{X''}{X'} + W(X)X' \right], \quad Y'^2 \bar{w}(Y) = \frac{d}{dy} \left[\frac{Y''}{Y'} + \bar{W}(Y)Y' \right].$$

Тогда система уравнений (6) переписывается так:

$$\begin{cases} u_1 - \left[\frac{X''}{X'} + W(X)X' \right] u = \bar{A}(y), \\ \bar{u}_1 - \left[\frac{Y''}{Y'} + \bar{W}(Y)Y' \right] u = A(x). \end{cases} \quad (7)$$

Условие совместности системы (7) в виде двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\bar{A}'(y) - \left[\frac{Y''}{Y'} + \bar{W}(Y)Y' \right] \bar{A}(y) = c_1, \quad A'(x) - \left[\frac{X''}{X'} + W(X)X' \right] A(x) = c_1$$

позволяет определить функции $A(x)$ и $\bar{A}(y)$:

$$\begin{aligned} A(x) &= c_1 X' \Psi(X) \int \frac{dx}{X' \Psi(X)} + c_2 X' \Psi(X), \\ \bar{A}(y) &= c_1 Y' \bar{\Psi}(Y) \int \frac{dy}{Y' \bar{\Psi}(Y)} + c_3 Y' \bar{\Psi}(Y), \end{aligned}$$

где $c_i = \text{const}$, $i = 1, 2, 3$, а $\Psi(X)$ и $\bar{\Psi}(Y)$ — функции, которые удовлетворяют таким соотношениям:

$$\Upsilon'(X) = W(X), \quad \Psi(X) = e^{\Upsilon(X)}, \quad \bar{\Upsilon}'(Y) = \bar{W}(Y), \quad \bar{\Psi}(Y) = e^{\bar{\Upsilon}(Y)}.$$

Решая последовательно обыкновенные дифференциальные уравнения в системе (7), определим u :

$$\begin{cases} u = \bar{A}(y)X'\Psi(X) \int \frac{dx}{X'\Psi(X)} + \bar{B}(y)X'\Psi(X), \\ u = A(x)Y'\bar{\Psi}(Y) \int \frac{dy}{Y'\bar{\Psi}(Y)} + B(y)Y'\bar{\Psi}(Y). \end{cases}$$

Полученные формулы для u должны совпадать. Приравнявая их, определим функции $B(x)$ и $\bar{B}(y)$:

$$\begin{aligned} B(x) &= c_3 X' \Psi(X) \int \frac{dx}{X' \Psi(X)} + c_4 X' \Psi(X), \\ \bar{B}(y) &= c_2 Y' \bar{\Psi}(Y) \int \frac{dy}{Y' \bar{\Psi}(Y)} + c_4 Y' \bar{\Psi}(Y), \end{aligned}$$

где $c_4 = \text{const}$. Таким образом, можно выписать формулу для нахождения функции u :

$$u = X' \Psi(X) Y' \bar{\Psi}(Y) \left[c_1 \int \frac{dx}{X' \Psi(X)} \int \frac{dy}{Y' \bar{\Psi}(Y)} + c_2 \int \frac{dy}{Y' \bar{\Psi}(Y)} + c_3 \int \frac{dx}{X' \Psi(X)} + c_4 \right]. \quad (8)$$

Введём в рассмотрение функции $\Phi(x)$ и $\bar{\Phi}(y)$, удовлетворяющие условиям

$$\Phi'(x) = \frac{1}{X' \Psi(X)}, \quad \bar{\Phi}'(y) = \frac{1}{Y' \bar{\Psi}(Y)},$$

тогда соотношение (8) запишется в компактной форме:

$$u = \frac{1}{\Phi'(x) \bar{\Phi}'(y)} [c_1 \Phi(x) \bar{\Phi}(y) + c_2 \bar{\Phi}(y) + c_3 \Phi(x) + c_4]. \quad (9)$$

Подставляя найденное значение u в первое уравнение (2), определяем функцию v :

$$\begin{aligned} v &= \frac{c}{c_2 c_3 - c_1 c_4} \left[\frac{\Phi''(x) \bar{\Phi}''(y)}{\Phi'(x) \bar{\Phi}'(y)} (c_1 \Phi(x) \bar{\Phi}(y) + c_2 \bar{\Phi}(y) + c_3 \Phi(x) + c_4) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Phi''(x) \bar{\Phi}'(y)}{\Phi'(x)} (c_2 + c_1 \Phi(x)) - \frac{\bar{\Phi}''(y) \Phi'(x)}{\bar{\Phi}'(y)} (c_3 + c_1 \bar{\Phi}(y)) + c_1 \Phi'(x) \bar{\Phi}'(y) \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

Подстановка (9) и (10) в последнее уравнение системы (2) даёт тождество. Поэтому (9) и (10) составляют частное решение системы уравнений (2), где $\Phi(x)$ и $\bar{\Phi}(y)$ являются произвольными функциями.

Замена

$$u \rightarrow \alpha u, \quad v \rightarrow \frac{v}{\alpha}, \quad \Phi(x) \rightarrow \varepsilon \Phi(x) + \beta, \quad \bar{\Phi}(y) \rightarrow \lambda \bar{\Phi}(y) + \delta,$$

где $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon, \lambda$ — ненулевые постоянные, позволяет считать, что

$$\begin{aligned} c_1 = c_4 = 1 \quad \text{и} \quad c_2 = c_3 = 0, \quad \text{когда} \quad c_1 \neq 0; \\ c_2 = c_3 = 1 \quad \text{и} \quad c_1 = c_4 = 0, \quad \text{когда} \quad c_1 = 0. \end{aligned}$$

Тогда формулы (9) и (10) при $c_1 \neq 0$ примут вид

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\Phi'(x)\overline{\Phi}'(y)} [\Phi(x)\overline{\Phi}(y) + 1], \\ v &= -c \left[\frac{\Phi''(x)\overline{\Phi}''(y)}{\Phi'(x)\overline{\Phi}'(y)} (\Phi(x)\overline{\Phi}(y) + 1) - \frac{\Phi''(x)\overline{\Phi}'(y)}{\Phi'(x)} \Phi(x) + \right. \\ &\quad \left. + \Phi'(x)\overline{\Phi}'(y) - \frac{\overline{\Phi}''(y)\Phi'(x)}{\overline{\Phi}'(y)} \overline{\Phi}(y) \right], \end{aligned} \quad (11)$$

а при $c_1 = 0$ —

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\Phi'(x)\overline{\Phi}'(y)} [\overline{\Phi}(y) + \Phi(x)], \\ v &= c \left[\frac{\Phi''(x)\overline{\Phi}''(y)}{\Phi'(x)\overline{\Phi}'(y)} (\overline{\Phi}(y) + \Phi(x)) - \frac{\Phi''(x)\overline{\Phi}'(y)}{\Phi'(x)} - \frac{\overline{\Phi}''(y)\Phi'(x)}{\overline{\Phi}'(y)} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

После преобразования $x \rightarrow F(x)$ и $y \rightarrow \overline{F}(y)$ соотношения (11) и (12) переписываются в виде

$$\begin{aligned} u &= \frac{F'(x)\overline{F}'(y)}{\Phi'(x)\overline{\Phi}'(y)} [\Phi(x)\overline{\Phi}(y) + 1], \\ v &= -c \left\{ \frac{F'(x)\overline{F}'(y)}{\Phi'(x)\overline{\Phi}'(y)} \left[\Phi''(x) \frac{1}{F'^2(x)} - \Phi'(x) \frac{F''(x)}{F'^3(x)} \right] \times \right. \\ &\quad \times \left[\overline{\Phi}''(y) \frac{1}{\overline{F}'^2(y)} - \overline{\Phi}'(y) \frac{\overline{F}''(y)}{\overline{F}'^3(y)} \right] (\Phi(x)\overline{\Phi}(y) + 1) - \\ &\quad - \left[\Phi''(x) \frac{1}{F'^2(x)} - \Phi'(x) \frac{F''(x)}{F'^3(x)} \right] \frac{F'(x)\overline{\Phi}'(y)}{\Phi'(x)\overline{F}'(y)} \Phi(x) + \\ &\quad \left. + \frac{\Phi'(x)\overline{\Phi}'(y)}{F'(x)\overline{F}'(y)} - \left[\overline{\Phi}''(y) \frac{1}{\overline{F}'^2(y)} - \overline{\Phi}'(y) \frac{\overline{F}''(y)}{\overline{F}'^3(y)} \right] \frac{\Phi'(x)\overline{F}'(y)}{\overline{\Phi}'(y)F'(x)} \overline{\Phi}(y) \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

при $c_1 \neq 0$;

$$\begin{aligned} u &= \frac{F'(x)\overline{F}'(y)}{\Phi'(x)\overline{\Phi}'(y)} [\overline{\Phi}(y) + \Phi(x)], \\ v &= c \left\{ \frac{F'(x)\overline{F}'(y)}{\Phi'(x)\overline{\Phi}'(y)} \left[\Phi''(x) \frac{1}{F'^2(x)} - \Phi'(x) \frac{F''(x)}{F'^3(x)} \right] \left[\overline{\Phi}''(y) \frac{1}{\overline{F}'^2(y)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \overline{\Phi}'(y) \frac{\overline{F}''(y)}{\overline{F}'^3(y)} \right] (\overline{\Phi}(y) + \Phi(x)) - \left[\Phi''(x) \frac{1}{F'^2(x)} - \Phi'(x) \frac{F''(x)}{F'^3(x)} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{F'(x)\overline{\Phi}'(y)}{\Phi'(x)\overline{F}'(y)} - \left[\overline{\Phi}''(y) \frac{1}{\overline{F}'^2(y)} - \overline{\Phi}'(y) \frac{\overline{F}''(y)}{\overline{F}'^3(y)} \right] \frac{\Phi'(x)\overline{F}'(y)}{\overline{\Phi}'(y)F'(x)} \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

при $c_1 = 0$, соответственно.

Таким образом, общее решение системы уравнений (2) может быть описано как формулой (13), так и формулой (14), поскольку они сводятся друг к другу заменой функции $\Phi(x)$ на $\frac{1}{T(x)}$ и выбором функции $F(x)$ такой, чтобы $F'(x) = -\frac{S'(x)}{T(x)}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Жибер А. В., Соколов В. В. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувилевского типа // *Успехи математ. наук*, 2001. — Т. 56, № 1(337). — С. 63–106.
2. Жибер А. В., Соколов В. В., Старцев С. Я. О нелинейных гиперболических уравнениях, интегрируемых по Дарбу // *Докл. РАН*, 1995. — Т. 343, № 6. — С. 746–748.
3. Гурьева А. М. Системы уравнений $u_{xy} = \varphi(u, v, u_x, u_y)$, $v_{xy} = \phi(u, v, v_x, v_y)$ с нулевыми обобщёнными инвариантами Лапласа второго порядка / В сб.: *Международн. Уфимская зимняя шк.-конф. по математ. и физике для студент., аспирант. и молодых учёных*. Т. 1: Математика. — Уфа: БашГУ, 2005. — С. 195–205.

Поступила в редакцию 14/I/2009;
в окончательном варианте — 20/II/2009.

MSC: 35L70, 35C15

CONSTRUCTION OF GENERAL SOLUTION OF DEGENERATING POLMEIRE–LUNDA–REDGE SYSTEM

A. M. Guryeva

Ufa State Aviation Technical University,
12, Karla Marksa st., Ufa, 450000.

E-mails: adel-guryeva@mail.ru

It is demonstrated that degenerating Polmeire–Lunda–Redge system is a Liouville-type system, formulas were obtained for x - and y -integrals at the first and the second orders. It was demonstrated how they can be used in order to construct a general solution on this equation system.

Key words: invariants of Laplace, equation of Liouville type, integrals.

Original article submitted 14/I/2009;
revision submitted 20/II/2009.

Guryeva Adel Minivasimovna, Ph. D. (Phys. & Math.), Dept. of Mathematics.