Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Манако, В. А. Путилин, Аналитическое решение задачи нагрева движущимся лучом лазера, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 1(), 206–213

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu664>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 13:20:09

УДК 535.211

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НАГРЕВА ОБРАЗЦА ДВИЖУЩИМСЯ ЛУЧОМ ЛАЗЕРА

*В. В. Манако, В. А. Путилин*Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: physics@samgtu.ru

*Рассмотрено известное решение задачи нагрева полубесконечного образца движущимся лучом лазера в виде интеграла. Приведено его вычисление в аналитическом виде в терминах некоторых специальных функций.***Ключевые слова:** нагрев движущимся лучом лазера, специальные функции.

Постановка задачи. Обработка поверхности движущимся лучом лазера является эффективным методом термической обработки, в результате которой достигается существенная модификация физических свойств поверхности металлических сплавов [1, 2]. Теоретическое решение задачи нагрева полубесконечного образца гауссовым источником тепла, движущимся по поверхности, приводит к выражению для стационарной температуры нагрева в виде следующего интеграла [2–5]:

$$T = \frac{AP}{\lambda\pi} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x+V\tau)^2+y^2}{4a\tau+r^2} - \frac{z^2}{4a\tau}\right)}{\sqrt{\tau}(4a\tau+r^2)} d\tau, \quad (1)$$

где a — температуропроводность, λ — теплопроводность, V — скорость движения гауссова источника (т. е. лазерного луча) радиусом r по поверхности.

Точное аналитическое вычисление интеграла (1) при всех ненулевых параметрах является сложной математической задачей. В настоящей работе рассмотрено одно из его представлений в виде ряда.

Результаты исследований. В работе [6] посредством перехода к безразмерной температуре θ выражение (1) было представлено в виде

$$\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(\nu+\omega\varphi)^2+\eta^2}{\varphi+1} - \frac{\sigma^2}{\varphi}\right)}{\sqrt{\varphi}(\varphi+1)} d\varphi, \quad (2)$$

где

$$\varphi = \frac{4a\tau}{r^2}, \quad \nu = \frac{x}{r}, \quad \eta = \frac{y}{r}, \quad \sigma = \frac{z}{r}, \quad \omega = \frac{Vr}{4a}, \quad \theta = \frac{T}{T_m^0}, \quad (3)$$

$T_m^0 = \frac{AP}{2\lambda r\sqrt{\pi}}$ — установившаяся в стационарном режиме температура нагрева в центре неподвижного гауссова пятна [3–5].

Манако Виктор Владимирович — доцент кафедры общей физики и физики нефтегазового производства; к.ф.-м.н., доцент.

Путилин Владислав Алексеевич — старший преподаватель кафедры общей физики и физики нефтегазового производства.

В работе [6] рассматривался только нагрев поверхности, т. е. в формуле (2) полагалось $\sigma = 0$.

В настоящей работе рассмотрен самый общий случай аналитического представления интеграла (2). В ходе преобразований предполагались вещественными все четыре параметра ω , ν , η и σ ; кроме того, параметры ω и σ считались неотрицательными. Определения и математические свойства используемых специальных функций, а также формулы преобразований степенных рядов были взяты из справочной литературы [7–11].

Обозначив $\delta^2 = (\nu - \omega)^2 + \eta^2$, после простых алгебраических преобразований показателя экспоненты представим (2) в виде

$$\theta = \frac{\exp(\delta^2 - \nu^2 - \eta^2)}{\pi} T(\omega, \delta, \sigma), \quad (4)$$

где

$$T(\omega, \delta, \sigma) = \int_0^\infty \frac{\exp(-\omega^2 \varphi - \frac{\sigma^2}{\varphi} - \frac{\delta^2}{\varphi+1})}{\sqrt{\varphi}(\varphi+1)} d\varphi. \quad (5)$$

Отметим следующее обстоятельство. В процессе дальнейшего вычисления интеграла (5) был использован метод разложения подынтегральной функции в ряд Тейлора. При этом можно раскладывать в ряд либо множитель $\exp(-\omega^2 \varphi)$, либо $\exp(-\frac{\sigma^2}{\varphi})$, либо $\exp(-\frac{\delta^2}{\varphi+1})$. Соответственно, после разложения получаются интегралы следующих трёх видов (n — число целое и положительное):

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-\frac{\sigma^2}{\varphi} - \frac{\delta^2}{\varphi+1})}{\varphi^{\frac{1}{2}-n}(\varphi+1)} d\varphi, \quad (6)$$

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-\omega^2 \varphi - \frac{\delta^2}{\varphi+1})}{\varphi^{\frac{1}{2}+n}(\varphi+1)} d\varphi, \quad (7)$$

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-\omega^2 \varphi - \frac{\sigma^2}{\varphi})}{\varphi^{\frac{1}{2}}(\varphi+1)^{1+n}} d\varphi. \quad (8)$$

Интегралы (6), (7) расходятся. В то же время интеграл вида (8) сходится, что и было использовано в дальнейшем.

Таким образом, идея вычисления интеграла (5) изначально довольно проста, однако её реализация на практике потребовала применения громоздкого математического аппарата специальных функций. Связано это с тем, что значение (8) при целых и положительных n неизвестно [7–11].

Перейдем в (5) к переменной интегрирования $t = \frac{\varphi}{\delta^2}$ и обозначим $\gamma = \frac{1}{\delta^2}$. Тогда получим

$$T(\omega, \delta, \sigma) = \frac{1}{\delta} \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\omega^2 \delta^2 t - \frac{(\frac{\sigma}{\delta})^2}{t} - \frac{1}{t+\gamma}\right)}{\sqrt{t}(t+\gamma)} dt.$$

Раскладывая множитель $\exp(-\frac{1}{t+\gamma})$ в ряд Тейлора и меняя местами порядок суммирования и порядок интегрирования, запишем:

$$T(\omega, \delta, \sigma) = \frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} \frac{\exp\left(-\omega^2 \delta^2 t - \frac{(\frac{\sigma}{\delta})^2}{t}\right)}{\sqrt{t}(t+\gamma)^{1+n}} dt \right].$$

Отсюда получаем формулу следующего вида:

$$T(\omega, \delta, \sigma) = \frac{1}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!n!} \left(\frac{d}{d\gamma} \right)^n \int_0^{\infty} \frac{\exp\left(-\omega^2 \delta^2 t - \frac{(\frac{\sigma}{\delta})^2}{t}\right)}{\sqrt{t}(t+\gamma)} dt. \quad (9)$$

Заметим, что после вычисления в формуле (9) производной порядка n по параметру γ в полученное выражение затем нужно подставить значение $\gamma = \frac{1}{\delta^2}$.

Далее воспользуемся табличным интегралом [8]:

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp\left(-pt - \frac{q}{t}\right)}{\sqrt{t}(t+\gamma)} dt = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}} \exp\left(p\gamma + \frac{q}{\gamma}\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{p\gamma} + \sqrt{\frac{q}{\gamma}}\right),$$

в котором параметры p, q, γ — вещественны и неотрицательны.

Положим $p = \omega^2 \delta^2$, $q = \frac{\sigma^2}{\delta^2}$ в формуле (9) и запишем её в виде

$$T(\omega, \delta, \sigma) = \frac{\pi \exp(-2\omega\sigma)}{\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \times \\ \times \left(\frac{d}{d\gamma} \right)^n \left[\frac{\exp\left(\omega\delta\sqrt{\gamma} + \frac{(\frac{\sigma}{\delta})^2}{\sqrt{\gamma}}\right)^2}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{erfc}\left(\omega\delta\sqrt{\gamma} + \frac{(\frac{\sigma}{\delta})}{\sqrt{\gamma}}\right) \right]. \quad (10)$$

Для дополнительного интеграла вероятности известно разложение в степенной ряд:

$$\exp(\rho^2) \operatorname{erfc}(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho^{2m}}{\Gamma(m+1)} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho^{2m+1}}{\Gamma(m+\frac{3}{2})}, \quad (11)$$

где $\Gamma(\rho)$ — гамма-функция Эйлера. Положим в формуле (11) $\rho = \omega\delta\sqrt{\gamma} + \frac{(\frac{\sigma}{\delta})}{\sqrt{\gamma}}$ и подставим эту величину в ряд (10). Тогда получим

$$T(\omega, \delta, \sigma) = \frac{\pi \exp(-2\omega\sigma)}{\delta} (A^+ - A^-), \quad (12)$$

где

$$A^+ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{d}{d\gamma} \right)^n \left[\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\omega \delta \sqrt{\gamma} + \frac{(\frac{\sigma}{\delta})}{\sqrt{\gamma}} \right)^{2m}}{\Gamma(m+1)} \right], \quad (13)$$

$$A^- = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{d}{d\gamma} \right)^n \left[\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\omega \delta \sqrt{\gamma} + \frac{(\frac{\sigma}{\delta})}{\sqrt{\gamma}} \right)^{2m+1}}{\Gamma(m + \frac{3}{2})} \right]. \quad (14)$$

Вычислим значение двойного ряда (13). Из биномиальной формулы

$$(a+b)^j = \sum_{k=0}^j C_k^j a^k b^{j-k}, \quad j \in \mathbb{N}$$

находим

$$\left(\omega \delta \sqrt{\gamma} + \frac{(\frac{\sigma}{\delta})}{\sqrt{\gamma}} \right)^{2m} = \sum_{k=0}^{2m} C_k^{2m} \sigma^k \omega^{2m-k} \delta^{2m-2k} \gamma^{m-k}. \quad (15)$$

Тогда с учётом (15) вместо (13) запишем:

$$A^+ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2m} C_k^{2m} \frac{\sigma^k \omega^{2m-k} \delta^{2m-2k}}{n!n!m!} \left(\frac{d}{d\gamma} \right)^n \gamma^{m-k-\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

Представим выражение для производной порядка n от степени $\gamma^{m-k-\frac{1}{2}}$ в форме

$$\left(\frac{d}{d\gamma} \right)^n \gamma^{m-k-\frac{1}{2}} = \left(m - k - \frac{1}{2} + 1 - n \right)_n \gamma^{m-k-\frac{1}{2}-n},$$

где $(a)_n = a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1)$ — символ Похгаммера. Тогда выражение (16) примет вид

$$A^+ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2m} C_k^{2m} \frac{\sigma^k \omega^{2m-k} \delta^{2m-2k}}{n!n!m!} \left(m - k + \frac{1}{2} - n \right)_n \gamma^{m-k-\frac{1}{2}-n}. \quad (17)$$

Запишем определение вырожденной гипергеометрической функции первого рода (также называемой [8–11] функцией Куммера):

$$M(a, b, \rho) = 1 + \frac{a}{b} \frac{\rho^1}{1!} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{\rho^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{\rho^n}{n!}. \quad (18)$$

Из (18), а также свойств символа Похгаммера $(1)_n = n!$ и $(\beta - n)_n = (-1)^n (1 - \beta)_n$, вытекает следующее равенство (в нашем случае мы полагаем $\beta = m - k + \frac{1}{2}$):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} C_k^{2m} \frac{\sigma^k \omega^{2m-k} \delta^{2m-2k}}{n!n!m!} \left(m - k + \frac{1}{2} - n \right)_n \gamma^{m-k-\frac{1}{2}-n} = \\ = C_k^{2m} \frac{\omega^{2m-k} \sigma^k \delta^{2m-2k} \gamma^{-\frac{1}{2}+m-k}}{m!} M\left(\frac{1}{2} - m + k, 1, -\frac{1}{\gamma}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, с учётом введенного выше обозначения $\gamma = \frac{1}{\delta^2}$ для (17) получаем:

$$A^+ = \delta \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2m} C_k^{2m} \frac{\omega^{2m-k} \sigma^k}{m!} M\left(\frac{1}{2} - m + k, 1, -\delta^2\right). \quad (19)$$

На этом процедура вычисления значения выражения (13) закончена.

Процедура вычисления двойного ряда (14) была проведена абсолютно аналогично (с использованием биномиальной формулы и определения (18)) и привела к следующему результату:

$$A^- = \delta \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2m+1} C_k^{2m+1} \frac{\omega^{2m-k+1} \sigma^k}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right)} M\left(k - m, 1, -\delta^2\right). \quad (20)$$

Подставляя (19) и (20) в (12), получаем значение интеграла (5) в аналитическом виде:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{\exp\left(-\omega^2 \varphi - \frac{\sigma^2}{\varphi} - \frac{\delta^2}{\varphi+1}\right)}{\sqrt{\varphi}(\varphi+1)} d\varphi = \\ & = \pi \exp(-2\omega\sigma) \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2m} C_k^{2m} \frac{\omega^{2m-k} \sigma^k}{\Gamma(1+m)} M\left(\frac{1}{2} - m + k, 1, -\delta^2\right) - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2m+1} C_k^{2m+1} \frac{\omega^{2m-k+1} \sigma^k}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right)} M\left(k - m, 1, -\delta^2\right) \right] = \\ & = \pi \exp(-2\omega\sigma) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m C_k^m \frac{\omega^{m-k} \sigma^k}{\Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right)} (-1)^m M\left(\frac{1}{2} - \frac{m}{2} + k, 1, -\delta^2\right) = \\ & = \sqrt{\pi} \exp(-2\omega\sigma) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \frac{(2\omega)^{m-k} (2\sigma)^k}{(m-k)!k!} \times \\ & \quad \times (-1)^m \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\right) M\left(\frac{1}{2} - \frac{m}{2} + k, 1, -\delta^2\right) = \\ & = \sqrt{\pi} \exp(-2\omega\sigma) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2\omega)^n (-2\sigma)^k}{n!k!} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2} + \frac{k}{2}\right) M\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{2} - \frac{n}{2}, 1, -\delta^2\right). \end{aligned}$$

При преобразованиях учтено определение биномиального коэффициента $C_k^m = \frac{m!}{(m-k)!k!}$, а также свойство

$$\frac{m!}{\Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right)} = \frac{2^m}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{m}{2}\right).$$

Тогда запишем значение интеграла (2) с учётом (4), (5) и введённого выше обозначения $\delta^2 = (\nu - \omega)^2 + \eta^2$ в виде

$$\theta = \frac{\exp(\omega^2 - 2\omega\nu - 2\omega\sigma)}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2\omega)^n (-2\sigma)^k}{n!k!} \times \\ \times \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2} + \frac{k}{2}\right) M\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{2} - \frac{n}{2}, 1, -(\nu - \omega)^2 - \eta^2\right). \quad (21)$$

Обсуждение результатов. Формула (21) задаёт стационарную температуру нагрева θ непрерывным лучом лазера в любой точке полубесконечного образца. Из неё как частные случаи вытекают абсолютно все известные к настоящему времени строгие теоретические результаты.

Во-первых, если положить $\sigma = 0$ (следовательно, в интеграле (1) глубина $z = 0$, см. (3)), то для безразмерной температуры нагрева из (21) при условии $k = 0$ получим

$$\theta = \frac{\exp(\omega^2 - 2\omega\nu)}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2\omega)^n}{n!} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2}\right) M\left(\frac{1}{2} - \frac{n}{2}, 1, -(\nu - \omega)^2 - \eta^2\right).$$

Данную формулу можно привести к виду (соответствующие преобразования мы здесь не приводим)

$$\theta = \frac{\exp(\omega^2 - 2\omega\nu)}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-(\nu - \omega)^2 - \eta^2)^m}{m!} U\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - m, \omega^2\right), \quad (22)$$

где вырожденная гипергеометрическая функция второго рода (иначе ее называют [8–11] функцией Трикоми) по определению равна

$$U(a, b, \rho) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1-b+a)} M(a, b, \rho) + \rho^{1-b} \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} M(1-b+a, 2-b, \rho).$$

Таким образом, из (21) следует ранее полученное в [6] выражение (22) для температуры нагрева всей поверхности движущимся лучом лазера. В работе [6] также показано, что выражение (22) при дополнительных условиях $\nu = \eta = 0$ приводится к упрощенному виду:

$$\theta = {}_2F_2\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; \frac{1}{2}, 1; 4\omega^2\right) - \frac{2\omega}{\sqrt{\pi}} {}_2F_2\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 4\omega^2\right), \quad (23)$$

где обобщенная гипергеометрическая функция второго порядка по определению [8–11] есть следующий ряд:

$${}_2F_2(a, b; c, d; \rho) = 1 + \frac{ab}{cd} \frac{\rho^1}{1!} + \frac{ab(a+1)(b+1)}{cd(c+1)(d+1)} \frac{\rho^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (d)_n} \frac{\rho^n}{n!}.$$

Формула (23) задаёт температуру в центре движущегося лазерного пятна.

Во-вторых, условие $\omega = 0$ соответствует случаю нагрева неподвижным лучом лазера, так как при этом скорость $V = 0$ (см. (3)). В этом случае из (21), полагая $n = 0$, получим

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2\sigma)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{2}\right) M\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{2}, 1, -\nu^2 - \eta^2\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2k}}{k!} M\left(\frac{1}{2} + k, 1, -\nu^2 - \eta^2\right) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2k+1}}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + k\right)} M(1 + k, 1, -\nu^2 - \eta^2). \quad (24)\end{aligned}$$

С учётом (11), (18) из (24) при дополнительных условиях $\nu = \eta = 0$ вытекает известная [3] формула для температуры нагрева любой точки, лежащей на оси неподвижного лазерного луча:

$$\theta = \exp(\sigma^2) \operatorname{erfc}(\sigma). \quad (25)$$

Кроме того, с учётом свойства

$$M\left(\frac{1}{2}, 1, -\rho\right) = \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right) I_0\left(\frac{\rho}{2}\right)$$

из (24) при дополнительном условии $\sigma = 0$ находим температуру нагрева любой точки поверхности неподвижным лазером:

$$\theta = \exp\left(-\frac{\nu^2 - \eta^2}{2}\right) I_0\left(\frac{\nu^2 + \eta^2}{2}\right), \quad (26)$$

где $I_0(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4^m \Gamma(1+m)} \frac{\rho^{2m}}{m!}$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Формула (26) была найдена ранее в [5].

Таким образом, все ранее теоретически полученные соотношения (23), (25), (26) являются всего лишь частными случаями более общей функции $\theta = \theta(\omega, \nu, \eta, \sigma)$, задаваемой формулой (21) или же интегралом (2).

В заключение исходя из (3), (21) запишем аналитическое выражение для интеграла (1):

$$\begin{aligned}T &= \frac{AP}{2\lambda r \pi} \exp\left(\frac{V^2 r^2}{16a^2} - \frac{Vx}{2a} - \frac{Vz}{2a}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{Vr}{2a}\right)^n \left(-\frac{2z}{r}\right)^k}{n!k!} \times \\ &\times \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2} + \frac{k}{2}\right) M\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{2} - \frac{n}{2}, 1, -\left(\frac{x}{r} - \frac{Vr}{4a}\right)^2 - \frac{y^2}{r^2}\right).\end{aligned}$$

Выводы. В работе получено аналитическое выражение в виде ряда для стационарной температуры нагрева полубесконечного образца движущимся лучом лазера. Показано, что все ранее теоретически найденные формулы являются его частными случаями, включая формулы для термообработки неподвижным лучом лазера.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коваленко В. С., Головкин Л. Ф., Черненко В. С. Упрочнение и легирование деталей машин лучом лазера. — Киев: Техника, 1990. — 192 с.
2. Веденов А. А., Гладуш Г. Г. Физические процессы при лазерной обработке материалов. — М.: Энергоатомиздат, 1985. — 208 с.
3. Рыкалин Н. Н. Расчёты тепловых процессов при сварке. — М.: Машгиз, 1951. — 296 с.
4. Углов А. А., Смуров И. Ю., Андриянов С. С. К расчёту температурных полей от движущихся концентрированных источников энергии // *ФиХОМ*, 1981. — № 1. — С. 35–43.
5. Рыкалин Н. Н., Углов А. А., Смуров И. Ю. и др. Получение простых аналитических выражений, описывающих процесс нагрева металлов концентрированными источниками энергии // *ФиХОМ*, 1979. — № 6. — С. 3–11.
6. Манако В. В., Путилин В. А. О температуре нагрева поверхности движущимся лучом лазера // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2008. — № 2(17). — С. 224–230.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
8. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981. — 800 с.
9. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983. — 752 с.
10. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. — М.: Наука, 1986. — 800 с.
11. Брычков Ю. А. Специальные функции. Производные, интегралы, ряды и другие формулы. — М.: Физматлит, 2006. — 512 с.

Поступила в редакцию 15/I/2009;
в окончательном варианте — 19/II/2009.

MSC: 65Z05, 33C20

ANALYTICAL TASK SOLUTION FOR HEATING BY MOVING LASER BEAM

V. V. Manako, V. A. Putilin

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100.
E-mail: physics@samgtu.ru

The task solution for heating semi-infinity detail by moving laser beam as integral is considered. Its analytical calculation is carried out.

Key words: heating by moving laser beam, special functions.

Original article submitted 15/I/2009;
revision submitted 19/II/2009.

*Manako Viktor Vladimirovich, Ph. D. (Phys. & Math.), Dept. of General Physics.
Putilin Vladislav Alexeevich, Senior Lecturer, Dept. of General Physics.*