Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Долгополов, И. Н. Родионова, Видоизмененная задача Коши для одного гиперболического уравнения третьего порядка в трехмерном пространстве, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 1(), 41–46

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu666>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 08:51:19

УДК 811.93:004.912

ВИДОИЗМЕНЕННАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА
В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ*В. М. Долгополов, И. Н. Родионова*Самарский государственный университет,
443011 Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

E-mail: mvdolg@ssu.samara.ru

*Методом Римана доказано существование и единственность решения видоизменённой задачи Коши с данными на плоскости сингулярности коэффициентов гиперболического уравнения третьего порядка в трёхмерном пространстве.***Ключевые слова:** интегральные выражения, гиперболические уравнения.

Уравнение

$$L(u) \equiv u_{xyz} - \frac{\alpha}{x-y-z} u_{xz} + \frac{\alpha}{x-y-z} u_{yz} - \lambda u_z = 0 \quad (1)$$

$(\alpha, \lambda = \text{const}, 0 < \alpha < \frac{1}{2})$ рассмотрим в области $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 < z < x - y, 0 < y < x < +\infty\}$ трёхмерного евклидова пространства.

Отметим, что для рассматриваемого уравнения при $\lambda = 0$ в работах [1, 2] были поставлены задача Коши и видоизменённая задача Коши, соответственно, решение которых получено из общего решения уравнения Эйлера—Дарбу с параметром. Следует также отметить монографию В. Ф. Волкодавова с соавторами [3], где определены и построены функции Римана, Римана—Адамара для ряда уравнений третьего порядка в трёхмерном пространстве и обоснован метод Римана, результатами которой воспользовались авторы настоящей работы.

Задача С. В области Ω найти решение уравнения (1), непрерывное в $\bar{\Omega}$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(x, y, x - y) = \tau(x, y), \quad 0 \leq y \leq x < +\infty; \quad (2)$$

$$\lim_{z \rightarrow x-y-0} \frac{\partial u}{\partial z} = \nu(x, y), \quad 0 < y < x < +\infty; \quad (3)$$

$$\lim_{z \rightarrow x-y-0} (x - y - z)^{2\alpha} (u_{xz} - u_{yz}) = \mu(x, y), \quad 0 < y < x < +\infty. \quad (4)$$

Для решения задачи С применим метод Римана. Функция Римана для

Долгополов Вячеслав Михайлович — доцент кафедры математики, информатики и математических методов в экономике; к.ф.-м.н., доцент.
Родионова Ирина Николаевна — доцент кафедры математики, информатики и математических методов в экономике; к.ф.-м.н., доцент.

уравнения (1) построена в работе [3]. Представим её в виде

$$V(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{(x - y - z)^{2\alpha}}{(x - y_0 - z)^\alpha (x_0 - y - z)^\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\lambda(x_0 - x)(y_0 - y)]^m}{(1)_m m!} \times \\ \times F\left(\alpha, \alpha + m; 1 + m; \frac{(x - x_0)(y_0 - y)}{(x - y_0 - z)(x_0 - y - z)}\right), \quad (5)$$

где $F(a, b, c; z) = \sum_{n=c}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n$ — гипергеометрическая функция Гаусса [4].

В области Ω возьмём произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и, поскольку коэффициенты уравнения (1)

$$a = \frac{-\alpha}{x - y - z} \quad \text{и} \quad b = \frac{\alpha}{x - y - z} \quad (6)$$

обращаются в бесконечность на плоскости $z = x - y$, рассмотрим область H_ε , ограниченную плоскостями $x = x_0, y = y_0, z = z_0, z = x - y - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$).

В предположении, что решение задачи С существует, проинтегрируем тождество Грина [3]

$$VL(u) - uL^*(V) = \frac{1}{3} \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right] \quad (7)$$

по области H_ε , где L^* — сопряжённый оператор. Для уравнения (1) имеем

$$P = Vu_{yz} + uV_{gz} - V_y u_z + 3u_z aV, \quad (8)$$

$$Q = V(u_{xy} - 3ub_z) + uV_{xz} - V_z u_x - 3buV_z, \quad (9)$$

$$H = V(u_{xy} - 3a_x u + 3bu_y) - V_x u_y - 3auV_x + V_{xy} u - 3\lambda u, \quad (10)$$

где V — функция Римана (5); $u(x, y, z)$ — решение уравнения (1), коэффициенты a и b определяются формулой (6).

Далее, применяя к полученному интегральному тождеству формулу Гаусса—Остроградского, представим результат в виде суммы четырёх интегралов

$$\sum_{i=0}^3 \iint_{D_i} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + H \cos \gamma) ds = \sum_{k=1}^4 J_k = 0, \quad (11)$$

D_i ($i = 0, 1, 2, 3$) — грани пирамиды H_ε , лежащие соответственно в плоскостях $x = x_0, y = y_0, z = z_0, z = x - y - \varepsilon$. Рассмотрим каждое слагаемое формулы (11). Для J_1 имеем:

$$J_1 = \iint_{D_0} P|_{x=x_0} dy dz = \int_{z_0}^{x_0-y_0-\varepsilon} dz \int_{y_0}^{x_0-z-\varepsilon} (Vu_{yz} + uV_{yz} - V_y u_z + 3u_z aV)|_{x=x_0} dy = \\ = \sum_{k=1}^4 i_k, \quad (12)$$

где i_k — интегралы от соответствующих слагаемых в формуле (12). В первом слагаемом i_1 формулы (12) выполним интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} i_1 = & \int_{z_0}^{x_0-y_0-\varepsilon} dz \int_{y_0}^{x_0-z-\varepsilon} V(u_z)_y dy = \int_{z_0}^{x_0-y_0-\varepsilon} (u_z V) \Big|_{y_0}^{x_0-z-\varepsilon} dz - \\ & - \int_{z_0}^{x_0-y_0-\varepsilon} dz \int_{y_0}^{x_0-z-\varepsilon} V_y u_z dz = u(x_0, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, x_0 - y_0 - \varepsilon) + \\ & + \int_{z_0}^{x_0-y_0-\varepsilon} u_z(x_0, x_0 - z - \varepsilon, z) V dz - \int_{z_0}^{x_0-y_0-\varepsilon} dz \int_{y_0}^{x_0-z-\varepsilon} V_y u_z \Big|_{x=x_0} dy. \quad (13) \end{aligned}$$

В слагаемом i_2 также произведём интегрирование по частям, предварительно поменяв порядок интегрирования, и преобразуем с учётом соотношения

$$(V_y - aV) \Big|_{x=x_0} = 0, \quad (14)$$

справедливого для функции Римана. Результат вычислений, а также выражение для i_1 из формулы (13) подставляем в формулу (12). После приведения подобных слагаемых получаем

$$\begin{aligned} J_1 = & u(x_0, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, x_0 - y_0 - \varepsilon) + \int_{z_0}^{x_0-z_0-\varepsilon} u_z(x_0, x_0 - z - \varepsilon, z) V dz + \\ & + \int_{y_0}^{x_0-z_0-\varepsilon} u(x_0, y, x_0 - y - \varepsilon) V_y dy - \int_{y_0}^{x_0-z_0-\varepsilon} u(x_0, y, z_0) V_y dy. \quad (15) \end{aligned}$$

Аналогичными рассуждениями, применяя интегрирование по частям, а также соотношения

$$(V_{xz} - b_z V - bV_z) \Big|_{y=y_0} = 0, \quad (16)$$

$$aV_x + a_x V + (bV - V_x)_y + \lambda V = 0, \quad (17)$$

доказанные непосредственным вычислением, приходим к следующим результатам:

$$\begin{aligned} J_2 = & - \int_{z_0}^{x_0-y_0-\varepsilon} dz \int_{z+y_0+\varepsilon}^{x_0} Q(x, y_0, z) dx = - \int_{z_0+y+\varepsilon}^{x_0} u_x(x, y_0, x - y_0 - \varepsilon) V dx + \\ & + \int_{z_0+y_0+\varepsilon}^{x_0} u_x(x, y_0, z_0) V dx - 2 \int_{z_0}^{x_0-y_0-\varepsilon} u(z + y_0 + \varepsilon, y_0, z) V_z dz, \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_3 = & - \int_{y_0}^{x_0-z_0-\varepsilon} dy \int_{z_0+y+\varepsilon}^{x_0} H(x, y, z_0) dx = - \int_{y_0}^{x_0-z_0-\varepsilon} u_y(x_0, y_0, z_0) V dy + \\
 & + \int_{y_0}^{x_0-z_0-\varepsilon} u_y(z_0 + y + \varepsilon, y, z_0) V dy - \int_{y_0+z_0+\varepsilon}^{x_0} u(x, x - z_0 - \varepsilon, z_0) V_x dx + \\
 & + \int_{y_0+z_0+\varepsilon}^{x_0} u(x, y_0, z_0) V_x dx - 3 \int_{y_0+z_0+\varepsilon}^{x_0} u(x, x - z_0 - \varepsilon, z_0) (bV - V_x) dx. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл $J_4 = \int_{y_0}^{x_0-z_0-\varepsilon} dy \int_{z_0+y+\varepsilon}^{x_0} (-P + Q + H)|_{z=x-y-\varepsilon} dx$. Подставим

вместо P, Q, H их значения соответственно из формул (8)–(10) и проведём ряд преобразований, направленных на то, чтобы под знаком двойного интеграла убрать слагаемые, содержащие $u(x, y, x - y - \varepsilon)$. Это достигается интегрированием по частям с учётом соотношения (17). В результате получаем

$$\begin{aligned}
 J_4 = & \int_{y_0}^{x_0-y_0-\varepsilon} dy \int_{z_0+y+\varepsilon}^{x_0} \left[\frac{3}{2} V(u_{xz} - u_{yz}) + 3(b-a)Vu_z + \frac{3}{2} (V_y - V_x)u_z \right] \Big|_{z=x-y-\varepsilon} dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{y_0}^{x_0-z_0-\varepsilon} dy \int_{z_0+y+\varepsilon}^{x_0} V d_x(u_z) dx + \frac{1}{2} \int_{y_0}^{x_0-z_0-\varepsilon} \int_{z_0+y-\varepsilon}^{x_0} u d_y(u_z) dx + \frac{1}{2} \int_{y_0}^{x_0-z_0-\varepsilon} \int_{z_0+y-\varepsilon}^{x_0} (u_z V_y + V_x u_z) dx + \\
 & + \int_{y_0+z_0+\varepsilon}^{x_0} u(x, y_0, x - y_0 - \varepsilon) V_x dx - \int_{y_0+z_0+\varepsilon}^{x_0} u(x, x - z_0 - \varepsilon, z_0) V_x dx - \\
 & - \int_{y_0}^{x_0-z_0-\varepsilon} u(x_0, y, x_0 - y - \varepsilon) V_y dy + \int_{y_0}^{x_0-z_0-\varepsilon} u(z_0 + y + \varepsilon, y, z_0) V_y dy + \\
 & + 3 \int_{y_0+z_0+\varepsilon}^{x_0} u(x, x - z_0 - \varepsilon, z_0) bV dx - 3 \int_{y_0+z_0+\varepsilon}^{x_0} u(x, y_0, x - y_0 - \varepsilon) bV dx + \\
 & + \int_{y_0+z_0+\varepsilon}^{x_0} u_x(x, x - z_0 - \varepsilon, z_0) V dx - \int_{y_0+z_0+\varepsilon}^{x_0} u_x(x, y_0, x - y_0 - \varepsilon) V dx. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Первое слагаемое формулы (20) оставим без изменения, второе и третье проинтегрируем по частям. В результате все двойные интегралы формулы (20), кроме первого, взаимно уничтожаются. Полученный результат и данные формул (15), (18), (19) подставим в тождество (11), уничтожая интегрированием по частям одномерные интегралы. После этих преобразований

тождество (11) принимает вид

$$\begin{aligned}
 & 3u(x_0, y_0, z_0) - 3u(x_0, y_0, x_0 - y_0 - \varepsilon) + \\
 & + \frac{3}{2} \int_{z_0}^{x_0 - y_0 - \varepsilon} u_z(x_0, x_0 - z - \varepsilon, z) \frac{\varepsilon^\alpha}{(x - y - z)^\alpha} dz + \\
 & + \frac{3}{2} \int_{z_0}^{x_0 - y_0 - \varepsilon} u_z(z + y_0 + \varepsilon, y_0, z) \frac{\varepsilon^\alpha}{(x - y - z)^\alpha} dz + \\
 & + \frac{3}{2} \int_{y_0}^{x_0 - z_0 - \varepsilon} dy \int_{z_0 + y + \varepsilon}^{x_0} V(u_{xz} - u_{yz})|_{z=x-y-\varepsilon} dx + \\
 & + 3 \int_{y_0}^{x_0 - z_0 - \varepsilon} dy \int_{z_0 + y + \varepsilon}^{x_0} \left[(b - a)V + \frac{1}{2}(V_y - V_x) \right] u_z|_{z=x-y-\varepsilon} dx = 0. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Подставляя в выражение (21) вместо V , a , b их значения из формул (5), (6) и осуществляя предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, с учетом условий (2)–(4) получаем

$$\begin{aligned}
 u(x_0, y_0, z_0) &= \tau(x_0, y_0) - \frac{\Gamma(1 - 2\alpha)}{\Gamma^2(1 - \alpha)} \times \\
 &\times \int_{y_0}^{x_0 - z_0} ds \int_{z_0 + s}^{x_0} \mu(t, s) (x_0 - t)^{-\alpha} (s - y_0)^{-\alpha} {}_0F_1(1 - \alpha; \lambda(x_0 - t)(y_0 - s)) dt - \\
 &- \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma^2(\alpha)} \int_{y_0}^{x_0 - z_0} ds \int_{z_0 + s}^{x_0} \nu(t, s) (x_0 - t)^{\alpha-1} (s - y_0)^{\alpha-1} (x_0 - t + s - y_0)^{1-2\alpha} \times \\
 &\times {}_0F_1(\alpha, \lambda(x_0 - t)(y_0 - s)) dt, \quad (22)
 \end{aligned}$$

где ${}_0F_1(\alpha, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(\alpha)_n n!}$ [4].

Обозначим $D = \{(x, y) \mid 0 < y < x < +\infty\}$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что если

$$\tau_{xy} \in C(\overline{D}), \quad \nu \in C^{(2)}(\overline{D}), \quad \mu \in C^{(2)}(\overline{D}), \quad (23)$$

то функция (22) есть решение задачи С для уравнения (1).

ТЕОРЕМА. При выполнении условий (23) задача С для уравнения (1) имеет единственное решение, представимое формулой (22).

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по образованию (проект АВЦП 3341). И. Н. Родионова выражает благодарность Правительству Самарской области за поддержку Губернским грантом в области науки и техники за второе полугодие 2008 года (№ 20).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Волкодав В. Ф., Дорофеев А. В. Задача Коши для одного вырождающегося гиперболического уравнения третьего порядка // *Изв. вузов. Математика*, 1993. — № 11. — С. 6–8.
2. Волкодав В. Ф., Родионова И. Н. Видоизмененная задача Коши для одного вырождающегося уравнения третьего порядка / В сб.: *Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач*. — № 10. — Киев: АН Украины. Ин-т математики, 1995. — С. 19–25.
3. Волкодав В. Ф., Захаров В. Н., Быстрова О. Р., Николаев Н. Я. Функции Римана для некоторых дифференциальных уравнений в n -мерном евклидовом пространстве и их применения. — Самара: Сам. ун-т, 1995. — 75 с.
4. Бейтлин Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. I. — М.: Наука, 1973. — 300 с.

Поступила в редакцию 15/I/2009;
в окончательном варианте — 12/II/2009.

MSC: 35G30, 35Q05, 35L25

**MODIFIED CAUCHY PROBLEM FOR ONE HYPERBOLIC
EQUATION OF THE THIRD ORDER IN THREE-DIMENSIONAL
SPACE**

V. M. Dolgoplov, I. N. Rodionova

Samara State University,
1, Akad. Pavlova st., Samara, 443011.
E-mail: mvdolg@ssu.samara.ru

Existence and uniqueness of the solution for the modified Cauchy problem with data located on the plane of singularity of a hyperbolic equation of the third order coefficients in three-dimensional space is proved by Riemann method.

Key words: *integral equations, hyperbolic differential equations.*

Original article submitted 15/I/2009;
revision submitted 12/II/2009.

Dolgoplov Vyacheslav Mikhailovich, Ph. D. (Phys. & Math.), Ass. Prof., Dept. of Mathematics, Computer Science and Mathematical Methods in Economy.
Rodionova Irina Nikolaevna, Ph. D. (Phys. & Math.), Ass. Prof., Dept. of Mathematics, Computer Science and Mathematical Methods in Economy.