Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Стружанов, О построении структурной модели материала по результатам макроэксперимента, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 1(), 283–286

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu669>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 18:22:56

Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.3

О ПОСТРОЕНИИ СТРУКТУРНОЙ МОДЕЛИ МАТЕРИАЛА
ПО РЕЗУЛЬТАТАМ МАКРОЭКСПЕРИМЕНТА*В. В. Стружанов*Институт машиноведения УрО РАН,
620219, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

E-mails: stru@imach.uran.ru

*Рассмотрена методика, позволяющая поставить в соответствие реальному материалу его структурную модель.***Ключевые слова:** макроэксперимент, плотность распределения, структурные подэлементы, упруго-хрупкий материал, диаграмма деформирования.

Введение. В феноменологических теориях при построении определяющих соотношений используются результаты макроэксперимента по деформированию образцов материала. Полученные в эксперименте свойства рассматриваются как интегральное отображение процессов, происходящих на микроуровне, без раскрытия структурных механизмов их формирования. Существуют структурные модели [1–3], позволяющие, по крайней мере, на качественном уровне прогнозировать свойства материала. Возможна и обратная задача о построении структурной модели исходя из результатов макроэксперимента. В этом случае реальному материалу ставится в соответствие его модельное представление.

1. Упруго-хрупкий материал. Макроэксперимент на одноосное растяжение элемента материала в условиях жёсткого нагружения позволяет построить полную диаграмму деформирования $\sigma(\varepsilon)$ [4]. По ней определяется касательный модуль $E^p(\varepsilon) = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ и секущий модуль $E^s(\varepsilon) = \frac{\sigma}{\varepsilon}$, который для упруго-хрупкого материала является и модулем разгрузки. Повреждённость материала, связанная с континуальным разрушением, вычисляется по формуле [5]

$$\omega = 1 - \frac{E^s}{E}, \quad (1)$$

где E — модуль Юнга.

Построим структурную модель упруго-хрупкого материала, взяв за основу модифицированную модель Мазинга [6]. Допустим, что материал состоит из совокупности упруго-хрупких подэлементов (микроэлементов), деформации разрушения (или пределы прочности) которых распределены по некоторому закону с плотностью распределения $f_1(\varepsilon)$, заданному на отрезке $[\varepsilon^t, \varepsilon^z]$. Здесь ε^t , ε^z — деформации соответственно предела пропорциональности и разрушения, полученные в макроэксперименте. Тогда повреждённость определяется относительным содержанием разрушенных подэлементов, т. е.

$$\omega = \int_{\varepsilon^t}^{\varepsilon} f_1(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Стружанов Валерий Владимирович — главный научный сотрудник отдела механики машин и технологий; д.ф.-м.н., профессор.

Отсюда, используя равенство (1), находим, что

$$\begin{aligned} f_1(\varepsilon) &= \frac{d\omega}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \left(1 - \frac{E^s}{E} \right) = -\frac{1}{E} \frac{dE^s}{d\varepsilon} = \\ &= -\frac{1}{E} \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\sigma}{\varepsilon} \right) = -\frac{1}{E} \frac{d\sigma/d\varepsilon \cdot \varepsilon - \sigma}{\varepsilon^2} = \frac{E^s(\varepsilon) - E^p(\varepsilon)}{E\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2)$$

Полученная функция обладает всеми свойствами плотности распределения. Действительно, при $\varepsilon < \varepsilon^t$ касательный и секущий модули равны модулю Юнга и, следовательно, функция $f_1(\varepsilon) = 0$; при $\varepsilon > \varepsilon^z$ имеем $E^s = E^p = 0$ и снова $f_1 = 0$. Итак, вне отрезка $[\varepsilon^t, \varepsilon^z]$ плотность распределения равна нулю. Внутри отрезка функция f_1 положительна, т. к. $E^s > E^p$, и

$$\int_{\varepsilon^t}^{\varepsilon^z} f_1(\varepsilon) d\varepsilon = \int_{\varepsilon^t}^{\varepsilon^z} \left(\frac{d\omega}{d\varepsilon} \right) d\varepsilon = \omega(\varepsilon^z) - \omega(\varepsilon^t) = 1,$$

так как $\omega(\varepsilon^z) = 1$, $\omega(\varepsilon^t) = 0$.

Таким образом, реальному материалу ставится в соответствие модельный материал, состоящий из совокупности хрупких подэлементов. Свойства модельного материала определяет одна функция, а именно плотность распределения предельных деформаций подэлементов [6], вычисленная по формуле (2), в которой используются результаты макроэксперимента.

Плотность распределения предельных деформаций подэлементов модельного материала, отвечающего реальному упруго-хрупкому материалу с кусочно-линейной диаграммой

В качестве примера рассмотрим материал, обладающий кусочно-линейной диаграммой растяжения с линейными восходящей и падающей ветвями:

$$\sigma_a(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon, & \text{при } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^t; \\ \sigma^t + E_h^p(\varepsilon - \varepsilon^t), & \text{при } \varepsilon^t \leq \varepsilon \leq \varepsilon^B; \\ \sigma^B + E_s^p(\varepsilon - \varepsilon^B), & \text{при } \varepsilon^B \leq \varepsilon \leq \varepsilon^z, \end{cases}$$

где $\sigma^B = \gamma\sigma^t$, $\varepsilon^B = \alpha\varepsilon^t$ — соответственно предел прочности и деформация ему соответствующая; $\sigma^t = E\varepsilon^t$ — предел пропорциональности; $\sigma^z = 0$, $\varepsilon^z = z\varepsilon^B = z\alpha\varepsilon^t$; $E_h^p = \frac{\sigma^B - \sigma^t}{\varepsilon^B - \varepsilon^t} = \frac{E(\gamma-1)}{\alpha-1}$ — модуль упрочнения; $E_s^p = -\frac{\sigma^B}{\varepsilon^z - \varepsilon^B} = -\frac{\gamma E}{\alpha(z-1)}$ — модуль разупрочнения; $z, \alpha, \gamma > 1$; $\alpha > \gamma$. Отсюда

$$E^s = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \begin{cases} E, & \text{при } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^t; \\ \frac{E}{\alpha-1} \left[(\gamma-1) + (\alpha-\gamma) \frac{\varepsilon^t}{\varepsilon} \right], & \text{при } \varepsilon^t \leq \varepsilon \leq \varepsilon^B; \\ \frac{\gamma E}{z-1} \left[-\frac{1}{\alpha} + \left(\frac{z\varepsilon^t}{\varepsilon} \right) \right], & \text{при } \varepsilon^B \leq \varepsilon \leq \varepsilon^z. \end{cases}$$

Теперь по формуле (2) находим, что

$$f_1(\varepsilon) = \begin{cases} f_1', & \text{при } \varepsilon^t < \varepsilon < \varepsilon^B; \\ f_1'', & \text{при } \varepsilon^B < \varepsilon < \varepsilon^z, \end{cases}$$

где $f_1' = \frac{(\alpha-\gamma)\varepsilon^t}{(\alpha-1)\varepsilon^2}$, $f_1'' = \frac{z\gamma\varepsilon^t}{(z-1)\varepsilon^2}$. Вне отрезка $[\varepsilon^t, \varepsilon^z]$ функция f_1 равна нулю. Площадь, ограниченная двумя кривыми f_1' и f_1'' , составляет величину

$$\int_{\varepsilon^t}^{\varepsilon^z} f_1(\varepsilon) d\varepsilon = \int_{\varepsilon^t}^{\varepsilon^B} f_1'(\varepsilon) d\varepsilon + \int_{\varepsilon^B}^{\varepsilon^z} f_1''(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{\alpha-\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = 1.$$

Качественный вид функции $f_1(\varepsilon)$ изображён на рисунке, где $a = \frac{\alpha-\gamma}{(\alpha-1)\varepsilon^t}$, $b = \frac{\alpha-\gamma}{\alpha^2(\alpha-1)\varepsilon^t}$, $c + b = \frac{\gamma z}{\alpha^2(z-1)\varepsilon^t}$, $d = \frac{\gamma}{z\alpha^2(z-1)\varepsilon^t}$.

2. Упругопластический материал. Построим структурную модель, отвечающую упругопластическому упрочняющемуся материалу (макродиаграмма деформирования имеет только восходящую ветвь). Полагаем, что материал состоит из упруго-идеально-пластических подэлементов, деформации пределов текучести которых распределены по некоторому закону с плотностью распределения $f_2(\varepsilon)$, заданной на отрезке $[\varepsilon_T, \varepsilon^B]$. Здесь $\varepsilon_T, \varepsilon^B$ — деформации соответственно пределов текучести и прочности, полученные в макроэксперименте. Согласно модели Мазинга [6], макронапряжения в модельном материале на стадии упрочнения определяются формулой

$$\sigma = E \left[\varepsilon \left(1 - \int_{\varepsilon^T}^{\varepsilon} f_2(\varepsilon) d\varepsilon \right) + \int_{\varepsilon^T}^{\varepsilon} \varepsilon f_2(\varepsilon) d\varepsilon \right], \quad \varepsilon_T \leq \varepsilon \leq \varepsilon^B, \quad (3)$$

где $\int_{\varepsilon^T}^{\varepsilon} f_2(\varepsilon) d\varepsilon$ — объёмное содержание подэлементов, перешедших в состояние пластичности. Дважды дифференцируя выражение (3), находим, что

$$f_2(\varepsilon) = -\frac{1}{E} \frac{dE^p}{d\varepsilon}. \quad (4)$$

Здесь E^p — касательный модуль, полученный в макроэксперименте ($0 \leq E^p \leq E$). Таким образом, реальному упругопластическому упрочняющемуся материалу может быть поставлен в соответствие модельный материал, свойства которого определяет одна функция, вычисленная по формуле (4).

В качестве примера рассмотрим упругопластический материал с линейным упрочнением. Модуль упрочнения равен $E_h^p = \text{const}$. В этом случае

$$E^p = \begin{cases} E, & \text{если } \varepsilon_T - \Delta < \varepsilon \leq \varepsilon_T; \\ E_h^p, & \text{если } \varepsilon_T < \varepsilon \leq \varepsilon^B; \\ 0, & \text{если } \varepsilon^B < \varepsilon < \varepsilon^B + \Delta. \end{cases}$$

Здесь Δ — малая величина. Дифференцируя эту ступенчатую функцию с использованием импульсной δ -функции Дирака и подставляя эту производную в формулу (4), находим

$$f_3 = \left(1 - \frac{E_h^p}{E} \right) \delta(\varepsilon - \varepsilon_T) + \frac{E_h^p}{E} \delta(\varepsilon - \varepsilon^B).$$

Отметим, что полученная функция обладает всеми свойствами плотности распределения [7].

Примечание. Если известны соответствующие плотности распределений, то деформационные свойства модельного материала вычисляются по методике, изложенной в работе [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 07-01-96087)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Радченко В. П., Небогина Е. В., Басов М. В. Структурная модель закритического упругопластического деформирования материалов // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.*, 2000. — № 9. — С. 55–65.
2. Новожилков В. В., Кадашев Ю. И. Микронапряжения в конструкционных материалах. — Л.: Машиностроение (Ленингр. отд-е), 1990. — 223 с.
3. Гохфельд Д. А., Садаков О. С. Пластичность и ползучесть элементов конструкций при повторном нагружении. — М.: Машиностроение, 1984. — 256 с.
4. Стружанов В. В. Определение инкрементальных модулей по результатам испытаний на растяжение с построением полной диаграммы // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.*, 2008. — № 1(16). — С. 160–163.

5. Стружанов В. В. Свойства разупрочняющихся материалов и определяющие соотношения при одноосном напряжённом состоянии // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2007. — № 2(15). — С. 69–78.
6. Стружанов В. В., Башуров Вяч. В. Модификационная модель Мазинга // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2007. — № 1(14). — С. 29–39.
7. Пугачёв В. С. Введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, 1968. — 368 с.

Поступила в редакцию 22/I/2009;
в окончательном варианте — 13/II/2009.

MSC: 74H55

ON CONSTRUCTION OF MATERIAL STRUCTURAL MODEL ON THE BASIS OF MACRO EXPERIMENT RESULTS

V. V. Struzhanov

Institute of Engineering Science, Urals Branch, Russian Academy of Science,
34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620219.

E-mails: stru@imach.uran.ru

Procedure allowing providing correspondence of a real material and its structural model is proposed.

Key words: macro experiment, allocation density, structural sub elements, elastic–brittle material, stress–strain diagram.

Original article submitted 22/I/2009;
revision submitted 13/II/2009.

Struzhanov Valeriy Vladimirovich, Dr. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Division of Machines Mechanics and Technology.

УДК 539.374.1

ЕДИНООБРАЗНАЯ ФОРМА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОСНОВНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Н. Н. Столяров, Н. И. Дедов

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: tpm@samgtu.ru

Представлены определяющие соотношения в матричной форме для задач численного исследования пластического деформирования различных теорий пластичности при простом и сложном нагружении. Приведены выражения для коэффициентов матриц для деформационной теории, теории течения, двухзвенных процессов.

Ключевые слова: напряжение, деформация, упругость, пластичность, пластическое течение, матрица, численные методы.

Использование пятимерного девиаторного пространства А. А. Ильюшина [1] позволяет единообразно представить соотношение различных теорий пластичности. Это имеет важное значение для численного исследования неупругого поведения оболочек по разным теориям пластичности.

Столяров Николай Николаевич — профессор каф. механики; д.ф.-м.н., профессор.
Дедов Николай Иванович — профессор каф. механики; к.т.н., профессор.