Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Федотов, М. А. Ермоленко, Конечно-элементная модель процесса осесимметричного пластического деформирования при СВС-прессовании, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2001, выпуск 12, 94–103

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu67>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:51:54

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРИ СВС-ПРЕССОВАНИИ

Поставлена и методом конечных элементов решена краевая задача осесимметричного пластического деформирования пористой нелинейно-вязкой заготовки в оболочке из сыпучего материала (песок). Установлено, что различие реологических свойств приводит к возмущению поля скоростей на границе заготовки и оболочки и к неоднородному деформированию и уплотнению прилегающих к границе объемов.

Традиционно в порошковой металлургии переработке и компактированию подвергаются химически инертные порошковые материалы. Компактные изделия из инертных порошков получают путем высокотемпературного спекания, горячего прессования, горячего изостатического прессования и т. д. Эти методы являются энергоемкими и требуют дорогостоящего специализированного оборудования с защитной атмосферой. В течении последних 30 лет в России и за рубежом активно разрабатывается технология получения и переработки порошковых материалов методом самораспространяющегося высокотемпературного синтеза (СВС) [1]. В основе метода лежат реакции экзотермического взаимодействия двух или нескольких химических элементов (или соединений), протекающих в режиме направленного горения. Процесс идет за счет тепла химических реакций и не требует внешней энергии для нагрева. Совмещение в одной технологической стадии процесса СВС и силового уплотнения горячих продуктов синтеза (метод СВС-прессования) позволяет получать беспористые изделия. Время синтеза одного изделия вместе с операциями формования шихтовой заготовки, сборки и разборки инструмента составляет 15-20 минут. Изготовление аналогичного изделия спеканием инертных порошков под давлением длится несколько часов. Разогрев обрабатываемого материала при СВС-прессовании происходит за счет реакции горения и приходится предусматривать теплоизоляцию продуктов синтеза от холодного деформирующего инструмента. При СВС-прессовании эта задача решается за счет размещения горячих продуктов горения в теплоизолирующей оболочке, выполненной из сыпучего материала (песок) и уплотнение целевого продукта осуществляется совместно с оболочкой.

Для расчета и оптимизации технологических параметров необходимо разработать математическую модель процесса совместного деформирования и уплотнения горячих продуктов синтеза и оболочки в замкнутом объеме конечных размеров. Это сложная макрокинетическая задача, поскольку объект состоит из тел с разными реологическими свойствами и следует ожидать неоднородность процесса деформирования и уплотнения. Кроме того, процесс характеризуется нестационарностью и неоднородностью температурного поля [2] и связанных с ним фазовым составом и реологическими свойствами продуктов синтеза. Поэтому в известных работах рассматриваются упрощенные модели. В [3] используется схема одноосного прессования пористой заготовки в жесткой пресс-форме без учета оболочки и внешнего трения. В [4] рассматривается процесс совместного деформирования продуктов синтеза и сыпучей оболочки. Однако используемый при моделировании энергетический метод и блочная модель не позволяют учесть неоднородность температурного режима и процесса деформирования. Эта задача может быть решена более точными методами, в частности методом конечных элементов (МКЭ). Цель настоящей работы - постановка и решение методом конечных элементов краевой задачи пластического деформирования при СВС-прессовании в сыпучей оболочке.

СВС-прессованием получают заготовки, имеющие форму квадратных или круглых пластин. Деформирование осуществляется в цилиндрической закрытой матрице. При прессовании квадратных пластин напряженно-деформированное состояние является трехмерным, при прессовании круглых пластин - осесимметричным. В работе рассматривается прессование круглых пластин и осесимметричное пластическое течение.

Для СВС-прессованных заготовок характерно искажение геометрической формы: высота боковой поверхности получается больше, чем высота центральной части и опорные поверхности имеют форму кратера с плоским дном [5]. Одной из причин такого искажения является неоднородное температурное поле, которое формируется при непрерывном охлаждении самора-

зогревающейся заготовки конечных размеров. Наиболее холодными и прочными являются объемы, расположенные по периметру заготовки вблизи границ контактного теплообмена с оболочкой [2]. При прессовании холодные зоны деформируются и уплотняются в меньшей степени, чем горячие, и происходит искажение формы заготовок. Кроме температурного фактора неоднородное деформирование при СВС-прессовании может быть вызвано различием реологических свойств заготовки и оболочки. Ответ на этот вопрос может быть получен при рассмотрении модели с однородным распределением реологических свойств деформируемых тел. Поэтому будем рассматривать процесс прессования равномерно нагретой заготовки в песчаной оболочке, имеющей нормальную температуру.

Система уравнений, описывающая процесс пластического деформирования, включает уравнение неразрывности, уравнение движения и определяющие соотношения. Эти уравнения дополняются начальными и граничными условиями. Уравнения неразрывности и движения инвариантны к физическому состоянию и реологическим свойствам материала. Поэтому более подробно рассмотрим особенности физического состояния и реологии материалов, деформируемых при СВС-прессовании, а также начальные и граничные условия.

Для описания механического поведения пористых и порошковых материалов используются представления и понятия континуума, а также рабочий аппарат механики сжимаемой сплошной среды [6-8]. Теплоизолирующая оболочка (песок) является сыпучей средой. Продукты СВС представляют собой разогретую пористую массу, состоящую из частиц тугоплавкой твердой фазы и расплава легкоплавких компонентов. В теории горячего прессования тугоплавкие соединения считаются нелинейно-вязким телом [8]. Общим физическим свойством продуктов СВС и песчаной оболочки является дисперсное состояние твердой фазы. Деформирование дисперсных сред происходит путем скольжения частиц или за счет их пластической деформации. Причем деформация частиц является неоднородной и пластически деформируется не весь объем твердой фазы, а лишь его часть - пластический кластер [9]. В сыпучих материалах с пластическими или хрупкими частицами возможны оба механизма деформации. При квазистатическом течении вязкая среда прилипает к граничным поверхностям. Поэтому в дисперсно-вязких телах скольжения частиц нет и деформирование связано только с вязким течением твердой фазы. Рассмотренные особенности физического состояния и механизма деформации учтены в реологических моделях дисперсно-вязких и сыпучих материалов, которые подробно рассмотрены в [4].

Определяющая зависимость между тензором напряжений σ_{ij} и тензором скоростей деформаций e_{ij} для пористого тела с произвольным законом течения твердой фазы имеет вид [7]:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma(w)}{w} \left[\left(\psi - \frac{1}{3} \phi \right) e \delta_{ij} + \phi e_{ij} \right], \quad (1)$$

где w - эквивалентная скорость деформации твердой фазы; $\sigma(w)$ - эквивалентное напряжение; e - скорость изменения объема; δ_{ij} - символ Кронекера; ψ , ϕ - функции относительной плотности ρ :

$$\psi = \frac{2}{3} \frac{\rho^3}{1 - \rho}; \quad \phi = \rho^2. \quad (2)$$

Эквивалентная скорость деформации твердой фазы w выражается через инварианты макроскопического тензора скоростей деформаций:

$$w = \frac{1}{\sqrt{\alpha \rho}} \sqrt{2\psi e^2 + \phi H^2}, \quad (3)$$

где α - объемная доля пластически деформируемой твердой фазы; H - интенсивность скоростей деформации сдвига. Параметр α отражает неоднородный характер деформации частиц твердой фазы дисперсного тела и для нелинейно-вязких частиц принимается равным [4]:

$$\alpha = \rho^2 \frac{\rho - \rho_0}{1 - \rho_0}, \quad (4)$$

где ρ_0 - насыпная плотность дисперсного материала.

Для песка в [10] получено соотношение для эффективного объема пластического кластера, которое интегрально учитывает диссипацию энергии внутренним трением и неоднородный характер деформации частиц:

$$\alpha = 1 - \exp \left[-1,3 \left(\ln \frac{0,91 - \rho_0}{0,91 - \rho} \right)^{1,4} \right]. \quad (5)$$

Информация о механизме течения твердой фазы содержится в зависимости между скоростью деформации w и напряжением $\sigma(w)$. Для нелинейно-вязкого тела со степенным законом течения эта зависимость имеет вид

$$w = \frac{1}{2} A \sigma^n(w), \quad (6)$$

где n - показатель нелинейности течения. Температурная зависимость процесса течения определяется коэффициентом A :

$$A = \frac{C}{kT} \exp \left(-\frac{U}{kT} \right), \quad (7)$$

где T - термодинамическая температура; U - энергия активации; k - постоянная Больцмана; C - константа. Определяющие соотношения (1) для пористого нелинейно-вязкого тела (продукты СВС) с учетом (3) и (6) запишутся следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{2}{A} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{2\psi e^2 + \phi H^2}{\alpha \rho} \right)^{\frac{1-n}{2n}} \left[\left(\psi - \frac{1}{3} \phi \right) e \delta_{ij} + \phi e_{ij} \right]. \quad (8)$$

Материал оболочки (несвязанный грунт) будем считать жесткопластическим телом. Для жесткопластического тела напряжение $\sigma(w)$ соответствует удвоенному пределу текучести при сдвиге τ_s пластичных или пределу прочности τ_b хрупких частиц. В нашем случае частицы песка являются хрупкими и

$$\sigma(w) = 2\tau_b. \quad (9)$$

Для сыпучей оболочки после подстановки соотношений (3) и (9) в (1) получим:

$$\sigma_{ij} = \frac{2\tau_b \sqrt{\alpha \rho}}{\sqrt{2\psi e^2 + \phi H^2}} \left[\left(\psi - \frac{1}{3} \phi \right) e \delta_{ij} + \phi e_{ij} \right]. \quad (10)$$

При температуре деформирования в продуктах СВС часто присутствует жидкая фаза - расплав легкоплавких компонентов. Сопротивление сдвигу в жидкой фазе на несколько порядков ниже, чем в твердой фазе. В приближении идеальной жидкости сопротивление вязкому течению оказывает только твердая фаза, а жидкую фазу можно рассматривать как несжимаемую пору [11]. Тогда для пористого твердожидкого тела сопротивление деформации будет обусловлено количеством твердой фазы. Соответственно в определяющих уравнениях (8) при температуре компактирования используется относительная плотность твердой фазы ρ_s , которая связана с относительной плотностью материала ρ соотношением

$$\rho_s = \rho(1 - m_L), \quad (11)$$

где m_L - объемная доля жидкой фазы в компактном материале. Плотность ρ продуктов синтеза при нормальной температуре после кристаллизации жидкой фазы находится по обратной зависимости (11).

При постановке и решении краевой задачи пластичности сжимаемых сред важную роль имеют начальные условия, которые описывают распределение плотности в материале до начала деформирования. Начальная плотность оболочки равна насыпной плотности ее материала. Для уплотняемых продуктов синтеза известны начальная плотность и размеры шихтовой заготовки. Макроструктурное состояние и начальная плотность собственно продуктов синтеза формируются в результате протекания следующих процессов:

- 1) изменение плотности и объема конденсированной фазы при химических реакциях;
- 2) изменение агрегатного состояния при температуре синтеза и появление жидкой фазы;
- 3) выделение значительного количества газов, которые были адсорбированы или растворены в исходных компонентах;
- 4) твердо- и жидкофазное спекание продуктов СВС.

Для оценки начальной плотности продуктов синтеза используется следующая модель [4]. Принимается, что при горении, которое протекает при незначительном давлении подпрессовки, за счет внутреннего давления примесных газов сохраняются размеры шихтовой заготовки. Процессом спекания вследствие быстротечности синтеза можно пренебречь. Тогда заготовка из продуктов синтеза будет наследовать размеры шихтовой заготовки и ее плотность определя-

ется изменением объема конденсированной фазы при химических реакциях. Эта модель и вытекающие из нее начальные условия хорошо согласуются при моделировании энергетическим методом с экспериментальными данными [4].

Граничные условия выражают взаимодействие обрабатываемого материала с инструментом. При СВС-прессовании происходит скольжение песчаной оболочки относительно заготовки и внутренней поверхности инструмента. Температура горения, как правило, выше температуры плавления песка и при контакте с горячими продуктами синтеза он расплавляется. Расплавленный песок служит смазкой и трение на границе заготовка-оболочка можно не учитывать. Рассмотрим закон трения песчаной оболочки о внутреннюю поверхность инструмента.

При малых нормальных давлениях действует закон трения Кулона: удельная сила трения скольжения $\tau_{ск}$ пропорциональна нормальному давлению σ_n :

$$\tau_{ск} = f|\sigma_n|, \quad (12)$$

где f - коэффициент трения Кулона. Величина $\tau_{ск}$ не может превышать максимального значения τ_{max} , допускаемого условием текучести. Следуя работе [6] положим, что τ_{max} равно пределу текучести дисперсной среды на сдвиг: $\tau_{max} = \tau_{сд}$. Это условие соответствует закону трения Прандтля. Тогда при скольжении песчаной оболочки по внутренней поверхности инструмента будем иметь:

$$\tau_{ск} = \begin{cases} f|\sigma_n| & \text{при } f|\sigma_n| < \tau_{сд} \\ \tau_{сд} & \text{при } f|\sigma_n| \geq \tau_{сд} \end{cases}. \quad (13)$$

С увеличением плотности коэффициент трения Кулона возрастает. Для песка эта зависимость имеет вид [10]:

$$f = 0,63\rho^{0,73}. \quad (14)$$

Удельная сила трения $\tau_{сд}$ принимается пропорциональной площади живого сечения [6]:

$$\tau_{сд} = \tau_s \rho^{2/3}, \quad (15)$$

где τ_s - предел текучести на сдвиг дисперсной среды. При чистом сдвиге средние напряжения $\sigma = 0$ и из условия пластичности для песка [10] следует:

$$\tau_s^2 = T^2 = \alpha \phi \tau_b^2. \quad (16)$$

С учетом выражения (2) для ϕ получим величину удельной силы трения Прандтля $\tau_{сд}$:

$$\tau_{сд} = \tau_b \rho^{13/6} \sqrt{\alpha}. \quad (17)$$

Объемная доля активной фазы α в (17) определяется выражением (5).

Краевая задача пластического деформирования при СВС-прессовании состоит в следующем. Горячая пористая нелинейно-вязкая заготовка, имеющая форму круглой пластины, помещена в оболочку из сыпучего материала и в жесткую закрытую цилиндрическую матрицу. Заданы температура и начальная относительная плотность заготовки и оболочки. Заготовку вместе с оболочкой сжимают жестким пуансоном, который перемещается с заданной скоростью v_0 и развивает максимальное усилие прессования Q_k . Скорость v_0 мала и поле напряжений удовлетворяет условию квазистатичности. Реологические свойства материала заготовки и оболочки известны. На границе оболочки с инструментом действуют силы трения. Скольжение оболочки относительно заготовки происходит без трения. Требуется определить конечные размеры и распределение плотности в материале заготовки при усилии прессования Q_k .

Решение сформулированной задачи состоит в нахождении в каждый момент времени t вектора скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ и плотности $\rho(\mathbf{x}, t)$ точек деформируемой среды, положение которых в пространстве определяется радиус-вектором $\mathbf{x}$. При осесимметричном деформировании положение точек однозначно определяется двумя цилиндрическими координатами: r и z ; поле скоростей - двумя компонентами вектора $\mathbf{v}$: осевой скоростью $v_z(r, z, t)$ и радиальной скоростью $v_r(r, z, t)$. В связи с осевой симметрией рассматривается только меридиональное сечение (рис.1).

Р и с. 1. Расчетная схема СВС - прессования:
1 - заготовка; 2 - оболочка; 3 - пуансон; 4 - матрица.

Математическая постановка задачи включает:

1) кинематические соотношения Коши

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial x_i} \right); \quad (18)$$

2) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0; \quad (19)$$

3) уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0; \quad (20)$$

4) определяющие соотношения

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma(w)}{w} \left[\left(\psi - \frac{1}{3} \varphi \right) e \delta_{ij} + \varphi e_{ij} \right]. \quad (21)$$

В (21) связь между эквивалентными деформациями w и напряжениями $\sigma(w)$ для нелинейно-вязкой заготовки принимается в виде (8), а для сыпучей оболочки - в виде (10).

Уравнения (18) - (21) образуют замкнутую систему уравнений с тремя неизвестными: плотностью $\rho(\mathbf{x}, t)$ и двумя компонентами поля скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$: $\mathbf{v}_z(r, z, t)$ и $\mathbf{v}_r(r, z, t)$. Система уравнений (18) - (21) дополняется начальными и граничными условиями.

Начальные условия задают начальное распределение плотности в заготовке 1 и оболочке 2:

$$\rho_1(\mathbf{x}, 0) = \rho_{10}(\mathbf{x}, 0); \quad \rho_2(\mathbf{x}, 0) = \rho_{20}(\mathbf{x}, 0). \quad (22)$$

Кинематические граничные условия отражают условие непроницаемости на внешней границе оболочки (рис. 1):

$$\mathbf{v}_r(0, z, t) = 0; \quad \mathbf{v}_z(r, 0, t) = 0; \quad \mathbf{v}_z(r, h, t) = -\mathbf{v}_0; \quad \mathbf{v}_r(R_M, z, t) = 0. \quad (23)$$

На границе заготовки и оболочки в отсутствии сил трения условие контактного взаимодействия представляет собой равенство нормальных компонент скоростей на всей поверхности контакта

$$\mathbf{v}_{n1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_{n2}(\mathbf{x}, t). \quad (24)$$

На границе оболочки и инструмента векторы скоростей $\mathbf{v}$ и напряжений σ представим в виде суммы нормальных и касательных составляющих, зависящих от вектора координат $\mathbf{x}$ и времени t :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_t; \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}_n + \mathbf{t}. \quad (25)$$

В соответствии с законом трения Кулона касательные напряжения трения не превосходят по абсолютному значению величину $f|\mathbf{s}_n|$, причем при $|\mathbf{t}| < f|\mathbf{s}_n|$ скольжение отсутствует, а при $|\mathbf{t}| = f|\mathbf{s}_n|$ происходит скольжение и векторы $\mathbf{v}_t$ и $\mathbf{t}$ имеют противоположные знаки. Так как в направлении скольжения инструмент неподвижен, то разность касательных компонент скоростей оболочки и инструмента будет равна скорости скольжения точек оболочки $\mathbf{v}_t$. Тогда условие контактного взаимодействия оболочки и инструмента при полном контакте имеет вид [12]:

$$\begin{aligned} |\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)| &\leq f|\mathbf{s}_n(\mathbf{x}, t)|; \\ \mathbf{v}_t(\mathbf{x}, t) &= 0 \text{ при } |\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)| < f|\mathbf{s}_n(\mathbf{x}, t)|; \\ \tau &= -|\tau| \frac{\mathbf{v}_t}{|\mathbf{v}_t|} \text{ при } |\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)| = f|\mathbf{s}_n(\mathbf{x}, t)|. \end{aligned} \quad (26)$$

Решение задач МКЭ заключается в минимизации некоторого вариационного функционала. Вариационная формулировка краевой задачи пластического деформирования в форме Лагранжа запишется в виде:

$$\int_V \sigma_{ij} (e_{ij}^* - e_{ij}) dV - \int_{S_F} \sigma_{ij} n_j (\mathbf{v}_i^* - \mathbf{v}_i) dS \geq 0, \quad (27)$$

где V - объем тела; n_j - направляющие косинусы единичного вектора нормали $\mathbf{n}$ к поверхности S_F , на которой задана нагрузка. Индексом (*) отмечены кинематически возможные скорости и соответствующий им тензор скоростей деформаций. Знак равенства в (27) соответствует полю действительных скоростей. При численном решении МКЭ вместо вариационного неравенства (27) используется эквивалентная экстремальная формулировка. В этом случае рассматривается вариационный функционал:

$$J(\mathbf{v}_i^*) = \int_V \sigma_{ij} e_{ij}^* dV - \int_{S_F} \sigma_{ij} n_j \mathbf{v}_i^* dS. \quad (28)$$

Действительное поле скоростей соответствует минимуму функционала (28).

Поставленная задача с трением на контактной поверхности инструмента S_c приводит к вариационному неравенству [12]:

$$\int_V \sigma_{ij} (e_{ij}^* - e_{ij}) dV + \int_{S_c} f |\sigma_n| \cdot (|\mathbf{v}_\tau^*| - |\mathbf{v}_\tau|) dS \geq 0. \quad (29)$$

В интеграл по S_c входит напряжение $|\sigma_n|$, которое является неизвестной величиной, и его нельзя представить в виде разности интегралов, один из которых определяется полем допустимых скоростей, а второй - полем действительных скоростей. Неравенство (29) является квазивариационным и не допускает экстремальную формулировку. В этом случае используется итерационный процесс замены квазивариационного неравенства последовательностью вариационных неравенств, для которых существует эквивалентная экстремальная формулировка. На первом шаге принимается $\sigma_n^{(0)} = 0$ и рассматривается задача без учета трения. Из решения этой задачи определяется нормальное напряжение на S_c , которое принимается в качестве первого приближения $\sigma_n^{(1)}$. Затем при $\sigma_n = \sigma_n^{(1)}$ решается неравенство (29) и т. д. На k -ом шаге итерационного процесса рассматривается решение вариационного неравенства

$$\int_V \sigma_{ij} (e_{ij}^* - e_{ij}) dV + \int_{S_c} f |\sigma_n^{(k-1)}| \cdot (|\mathbf{v}_\tau^*| - |\mathbf{v}_\tau|) dS \geq 0. \quad (30)$$

Тогда вариационный функционал экстремальной задачи запишется в виде:

$$J(\mathbf{v}_i^*) = \int_V \sigma_{ij} e_{ij}^* dV + \int_{S_c} f |\sigma_n^{(k-1)}| \cdot |\mathbf{v}_i^*| dS. \quad (31)$$

Минимуму функционала (31) соответствует действительное поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Так как сила трения Прандтля зависит от плотности ρ материала оболочки, которая является неизвестной величиной, то описанный итерационный процесс применяется и в случае действия закона трения Прандтля.

Конечно-элементная аппроксимация функционала (31) для сред с различной реологией достаточно подробно рассмотрена в обширной литературе по теории и практическому применению МКЭ [13, 14]. В результате аппроксимации интегрирование заменяется суммированием по КЭ и минимизация функционала (31) приводит к системе алгебраических уравнений

$$[K] \cdot \{\mathbf{v}\} = \{F\}, \quad (32)$$

где $[K]$ - глобальная матрица жесткости; $\{\mathbf{v}\}$ - вектор-столбец узловых скоростей; $\{F\}$ - вектор-столбец узловых усилий.

Вследствие нестационарности уравнения неразрывности (19) для уплотняемых тел имеет место неустановившееся течение. Краевая задача неустановившегося движения решается методом пошагового нагружения по времени, что эквивалентно решению дифференциального уравнения (19) методом конечных разностей.

Выполнение заданных кинематических граничных условий (23) осуществляется путем модификации глобальной матрицы жесткости $[K]$. При этом диагональный элемент матрицы $[K]$, соответствующий заданной скорости, умножается на заведомо большое число, например 10^8 . Соответствующий компонент вектора $\{F\}$ модифицируется по правилу:

$$F_m = K_{mm} \cdot 10^8 \cdot \mathbf{v}_m, \quad (33)$$

где m - индекс направления, скорость точки в котором равна заданной скорости $\mathbf{v}_m$.

В вектор узловых усилий $\{F\}$ входят поверхностные нагрузки. В рассматриваемой задаче поверхностными нагрузками являются узловые силы внешнего трения оболочки $F_\tau^{N_c}$ в граничных узлах N_c на S_c . Величина узловых сил $F_\tau^{N_c}$ определяется через нормальные силы $F_n^{N_c}$: $F_\tau^{N_c} = f |F_n^{N_c}|$. Так как силы $F_n^{N_c}$ неизвестны, то используется итерационный процесс, рассмотренный выше.

В рамках пошагового метода система уравнений (32) решается для каждого временного шага. Соотношения Коши и определяющие соотношения внутри КЭ выражаются уравнениями:

$$\{e\}^e = [B] \cdot \{\mathbf{v}\}^e; \quad \{\sigma\}^e = [k]^e \cdot \{e\}^e. \quad (34)$$

Матрица дифференцирования $[B]$ определяется видом аппроксимации скоростей по объему V^e конечного элемента. Матрица жесткости конечного элемента $[k]^e$ имеет вид:

$$[k]^e = \int_{V^e} [B]^T \cdot [D] \cdot [B] dV. \quad (35)$$

Р и с.2. Схема разбиения деформируемого объема на конечные элементы

Здесь матрица $[D]$ отражает реологические свойства материала и формируется на основании определяющих соотношений (21).

Для дискретизации использовались осесимметричные КЭ с линейной аппроксимацией поля скоростей внутри элемента. При разбиении на КЭ вся область сначала покрывается прямоугольной сеткой, а затем полученные прямоугольники диагоналями делятся на два треугольника (рис. 2). Всего рассматривалось 220 элементов и 152 узла. Элементы матрицы $[B]$ вычислялись по известным зависимостям для осесимметричных КЭ [14]. Матрица $[D]$ согласно определяющим соотношениям (21) имеет вид:

$$[D] = \frac{\sigma(w)}{w} \begin{vmatrix} \psi + \frac{2}{3}\varphi & \psi - \frac{1}{3}\varphi & \psi - \frac{1}{3}\varphi & 0 \\ \psi - \frac{1}{3}\varphi & \psi + \frac{2}{3}\varphi & \psi - \frac{1}{3}\varphi & 0 \\ \psi - \frac{1}{3}\varphi & \psi - \frac{1}{3}\varphi & \psi + \frac{2}{3}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi \end{vmatrix}. \quad (36)$$

Как отмечалось выше, контактное взаимодействие заготовки и оболочки происходит в отсутствии сил трения. В дискретизированном на КЭ объекте контактное взаимодействие осуществляется через соответствующие узлы. Учитывая, что скорости внутри элемента изменяются линейно, условие совместности нормальных компонент скоростей на верхней опорной плоскости заготовки при осесимметричном течении (рис. 3) запишется в виде

$$\mathbf{v}_{zi} = \mathbf{v}_{zm} + (\mathbf{v}_{zl} - \mathbf{v}_{zm}) \frac{r_i - r_m}{r_l - r_m}. \quad (37)$$

Касательные компоненты скоростей заготовки и оболочки на их границе независимы друг от друга. В МКЭ силы могут быть приложены только в узлах. Поэтому контактная сила, возникающая в узле контакта i заготовки 1 заменятся эквивалентными силами, которые приложены в узлах l и m . Эти эквивалентные силы выражаются через величину контактной силы в i -ом узле оболочки 2 аналогично уравнению (37).

Р и с. 3. Элементы, находящиеся в контакте

Тогда силы контактного взаимодействия оболочки и заготовки будут связаны соотношениями [13]:

$$F_{zl} = -\frac{r_i - r_m}{r_l - r_m} F_{zi}; \quad F_{zm} = -\left(1 - \frac{r_i - r_m}{r_l - r_m}\right) F_{zi}. \quad (38)$$

По аналогии для цилиндрической поверхности будем иметь

$$F_{rl} = -\frac{z_i - z_m}{z_l - z_m} F_{ri}; \quad F_{rm} = -\left(1 - \frac{z_i - z_m}{z_l - z_m}\right) F_{ri}. \quad (39)$$

По отношению к оболочке и заготовке контактные силы являются внешними и величина их неизвестна. В итоге наряду с неизвестными скоростям узлов появляются новые неизвестные – силы контактного взаимодействия оболочки и заготовки. Одновременно к системе (32) добавляется столько уравнений совместности скоростей (37), сколько контактных узлов имеют заготовка и оболочка. При решении в векторе узловых скоростей $\{\mathbf{v}\}$ системы (32) за неизвестные принимались нормальные компоненты скоростей контактных узлов оболочки, а нормальные компоненты скоростей контактных узлов заго-

товки находились по уравнениям совместности (37). Для удовлетворения условиям совместности (37) - (39) производилась вторая модификация глобальной матрицы жесткости $[K]$. В результате этой модификации нарушается симметричность матрицы $[K]$.

Нелинейный характер определяющих соотношений (21) обуславливает физическую нелинейность поставленной краевой задачи и ее дискретного аналога в форме (32). При решении на ЭВМ нелинейную краевую задачу сводят к последовательности линейных краевых задач. Линеаризация уравнений жесткопластического течения (для оболочки) и нелинейно-вязкого течения (продукты синтеза) выполнялась методом гидродинамических приближений (метод переменной вязкости). Определяющие соотношения (21) запишем в виде:

$$\sigma_{ij} = 2\mu_s \left[\left(\psi - \frac{1}{3} \phi \right) e\delta_{ij} + \phi e_{ij} \right], \quad (40)$$

Соотношения (40) по форме совпадают с определяющими соотношениями теории линейно-вязкой сжимаемой жидкости, если под $\mu_s = \sigma(w)/2w$ понимать коэффициент вязкости. В соотношениях (40) μ_s не является постоянной величиной, а зависит от искомых параметров течения: полей плотности $\rho(\mathbf{x}, t)$ и скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Поскольку функция $\mu_s(\rho, \mathbf{v})$ заранее неизвестна, то используется итерационный процесс последовательного уточнения $\mu_s(\rho, \mathbf{v})$. Тем самым метод переменной вязкости аналогичен известному методу переменных параметров упругости. Таким образом, на каждом временном шаге нагружения при решении системы нелинейных алгебраических уравнений (32) реализуются два итерационных процесса. Основным итерационный процесс связан с определением сил контактного трения оболочки. Внутри каждой итерации основного процесса выполняется второй итерационный процесс по решению физически нелинейной задачи пластического течения.

Моделировался процесс СВС-прессования круглых заготовок из сплава TiC - 20% (мас.) Ni при следующих параметрах [4]: радиус заготовки - $R_1 = 39$ мм; радиус матрицы - $R_2 = 62,5$ мм; высота шихтовой заготовки - $h_1 = 14$ мм; начальная относительная плотность продуктов СВС - $\rho_0 = 0,5$; толщина нижнего слоя оболочки - $h_{2н} = 10$ мм; толщина верхнего слоя оболочки - $h_{2в} = 10$ мм; скорость перемещения пуансона пресса $v_0 = 8$ мм/с; температура деформации $T = 2540$ К; объемная доля жидкой фазы $m_L = 0,27$; максимальное усилие прессования $Q_k = 1480$ кН.

Твердой фазой в продуктах синтеза является карбид титана, жидкой - карбидоникелевый расплав. При относительной плотности продуктов синтеза $\rho_0 = 0,5$ и объемной доли жидкой фазы $m_L = 0,27$ относительная плотность твердой фазы согласно (11) составляет $\rho_s = 0,365$. Это меньше величины насыпной плотности моносферических частиц, составляющей $\rho_{SH} = 0,52$, и твердая фаза в начальный момент времени находится в аэродисперсном состоянии.

При расчете для карбида титана принимались следующие значения реологических характеристик [4]: энергия активации $U = 8,42 \cdot 10^{-19}$ Дж; предэкспонент $C = 16 \cdot 10^{-34}$ м⁷·Н²/с; показатель нелинейности $n = 3$. Для песка соответствующие характеристики составляют [10]: предел прочности частиц песка $\tau_b = 115$ МПа, насыпная плотность $\rho_0 = 0,61$.

На рис.4 приведены экспериментальные данные и результаты расчета высоты h_1 центра заготовки в зависимости от давления прессования q , равного отношению усилия прессования Q к площади матрицы. Хорошее соответствие расчетных и экспериментальных данных подтверждает адекватность принятых физических и реологических моделей. Аналогичный результат был получен ранее при использовании энергетического метода и блочной модели процесса, в которой принимается однородность процесса деформирования заготовки [4]. Дискретизация объекта на КЭ дает возможность более точно исследовать закономерности деформирования и формоизменения заготовки. На рис. 5а приведены результаты расчета формы сечения заготовки после прессования при $q = 128$ МПа. Эти данные показывают, что в СВС-прессованной заготовке формируются две зоны: центральная и периферийная. Центральная зона имеет одинаковую высоту и деформируется однородно. Вокруг центральной зоны одно-

Р и с. 4. Изменение высоты центра заготовки при СВС-прессовании сплава TiC - 20%Ni:
• - эксперимент

8

Р и с. 5. Форма сечения заготовки при СВС-прессовании сплава TiC - 20%Ni (а) и карбида титана TiC (б)

заготовка. В силу неразрывности поля скоростей осевая деформация боковой поверхности и прилегающих к ней объемов заготовки будет меньше, чем осевая деформация центральной зоны. Аналогичным образом объясняется и вогнутость боковой поверхности заготовки, формоизменение которой определяется величиной радиальной деформации. Таким образом, различие реологических свойств приводит к возмущению поля скоростей на границе заготовки и оболочки и к неоднородному деформированию и уплотнению прилегающих к границе объемов.

1,0	1,0	0,998	0,994	0,993	1,0	0,898
1,0	1,0	0,999	1,0	1,0	0,973	0,922
1,0	1,0	1,0	1,0	0,993	0,949	0,915
1,0	1,0	0,999	0,999	0,996	0,962	0,903
1,0	1,0	0,999	1,0	0,998	0,999	0,884

Р и с. 6. Распределение относительной плотности ρ по объему заготовки из сплава TiC - 20%Ni

Если сопротивление деформации продуктов СВС будет выше, чем материала оболочки, то в окрестности боковой поверхности должно происходить уменьшение высоты заготовки. Это предположение подтверждают результаты расчета процесса СВС-прессования чистого карбида титана TiC (без никелевой связки). С целью повышения сопротивления деформации принимались следующие параметры: температура прессования $T = 2000$ K, т.е. на 540 градусов ниже, чем для сплава TiC - 20% Ni; начальная плотность твердой фазы $\rho_s = 0,53$, что выше насыпной, и отсутствует жидкая фаза ($m_L = 0$). При таких параметрах сопротивление деформации продуктов СВС выше, чем у песка, и после прессования боковая поверхность имеет меньшую высоту, чем центр заготовки (рис. 5б).

Таким образом, методом конечных элементов получено решение краевой задачи осесимметричного пластического деформирования при прессовании горячих продуктов СВС в сыпучей оболочке. Установлено, что, несмотря на однородное поле температур и свойств, деформирование и уплотнение приграничных объемов заготовки является неоднородным. Эта неоднородность вызвана различием реологических свойств и сопротивления деформации материалов заготовки и оболочки. Разработанная модель позволяет в режиме вычислительного эксперимента провести исследование влияния размеров и свойств материала оболочки на закономерности уплотнения продуктов СВС, рассчитать и оптимизировать технологические параметры процесса.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантом Минобразования Российской Федерации по фундаментальным исследованиям в области технических наук, код проекта - Т00 - 6.4 - 524.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Левашов Е.А. и др.* Физико-химические и технологические основы самораспространяющегося высокотемпературного синтеза. М.: Бином, 1999. 176 с.
2. *Федотов А.Ф.* Моделирование и исследование теплового режима при СВС-прессовании в сыпучей оболочке // Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Серия: технические науки. Самара: СамГТУ. 2000. Вып. 10. С. 84 - 91.
3. *Горовой В.А. и др.* Закономерности силового СВС-компактирования крупногабаритных твердосплавных изделий // Кузнечно-штамповочное производство, 1996. № 1. С. 14-18.
4. *Федотов А.Ф.* Моделирование и исследование процесса деформирования горячих продуктов СВС в оболочке из сыпучего материала. // Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Серия: технические науки. Самара: СамГТУ. 1999. Вып. 7. С. 92-106.
5. *Амосов А.П. и др.* Разработка технологии и материалов для производства режущих пластин // В кн. Машиностроение, приборостроение, энергетика. М.: Изд-во МГУ. 1994. С. 70-75.
6. *Друянов Б.А.* Прикладная теория пластичности пористых тел. М.: Машиностроение, 1989. 168 с.
7. *Скороход В.В., Штерн М.Б., Мартынова И.Ф.* Теория нелинейно-вязкого и пластического поведения пористых материалов // Порошковая металлургия, 1987. № 8. С. 23-30.
8. *Ковальченко М.С.* Теоретические основы горячей обработки пористых материалов. К.: Наукова думка, 1980. 240 с.
9. *Амосов А.П., Федотов А.Ф.* Вариант условия пластичности порошковых материалов // Порошковая металлургия, 2000. № 3-4. С. 4-10.
10. *Федотов А.Ф.* Характеристики пластичности и внешнего трения сыпучих материалов теплоизолирующей оболочки для прессования продуктов СВС // Огнеупоры и техническая керамика, 1997. № 7. С. 14-17.
11. *Федотов А.Ф.* Реологические свойства пористого вязкого тела с жидкой фазой // Изв. вузов. Машиностроение, 1997. № 10-12. С. 8-14.
12. *Кузьменко В.И., Балакин В.Ф.* Решение на ЭВМ задач пластического деформирования: Справочник. Киев: Техника. 1990. 136 с.
13. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542 с.
14. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.