Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Свиридчук, А. А. Баязитова, О прямой и обратной задачах для уравнений Хоффа на графе, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 1(), 6–17

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu670>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 14:17:01

Дифференциальные уравнения

УДК 517.957

О ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ХОФФА НА ГРАФЕ

Г. А. Свиридюк, А. А. Баязитова

Южно-Уральский государственный университет,
454080 Челябинск, пр. Ленина, 76.

E-mails: ridyu@math.susu.ac.ru, alfiya@74.ru

Уравнения Хоффа, определенные на графе, описывают динамику выпучивания конструкции из двутавровых балок. Получено обобщение прямой задачи — задачи Коши. Впервые рассмотрена обратная коэффициентная задача, моделирующая эксперимент, в результате которого при дополнительных измерениях изучается не только динамика выпучивания конструкции, но и свойства материалов балок. Показано существование единственного решения этой задачи.

Ключевые слова: уравнения Хоффа на графе, фазовое пространство, обратная задача.

Введение. Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$ — конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ — множество рёбер, причём каждому ребру E_j поставлены в соответствие два положительных числа $l_j, d_j \in \mathbb{R}_+$, которые в контексте нашей задачи будут иметь физический смысл длины и площади поперечного сечения ребра соответственно. На каждом ребре E_j задается уравнение Хоффа

$$\lambda_j u_{jt} + u_{jxt} = \alpha_j u_j + \beta_j u_j^3, \quad (1)$$

моделирующее выпучивание двутавровой балки, где параметр $\lambda_j \in \mathbb{R}_+$ соответствует нагрузке на балку, а параметры $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ характеризуют свойства материала; переменные $x \in (0, l_j), t \in \mathbb{R}$.

Под прямой задачей понимается поиск вектор-функции $u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots)$, каждая компонента которой $u_j = u_j(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1) на ребре E_j , а в вершинах $\mathfrak{V}$ компоненты удовлетворяют условию непрерывности

$$u_j(0, t) = u_k(0, t) = u_m(l_m, t) = u_n(l_n, t), \quad (2)$$

$$E_j, E_k \in \mathfrak{E}^\alpha(V_i), \quad E_m, E_n \in \mathfrak{E}^\omega(V_i)$$

и условию «баланса потока»

$$\sum_{E_j \in \mathfrak{E}^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0, t) - \sum_{E_k \in \mathfrak{E}^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k, t) = 0, \quad (3)$$

Свиридюк Георгий Анатольевич — зав. кафедрой уравнений математической физики; д.ф.-м.н., профессор.

Баязитова Альфия Адыгамовна — аспирант кафедры уравнений математической физики.

где через $\mathfrak{E}^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество ребер, выходящих из вершины V_i (входящих в вершину V_i). Кроме того, искомые компоненты должны удовлетворять начальным условиям Коши

$$u_j(x, 0) = u_{j0}(x), \quad x \in (0, l_j). \quad (4)$$

При обратной задаче неизвестными являются не только компоненты $u_j = u_j(x, t)$, но и коэффициенты α_j и β_j . Для решения обратной задачи необходимо вводить дополнительные условия, о них речь пойдёт далее.

Условие (2) требует, чтобы вектор-функция $u = u(x, t)$ была непрерывной в вершинах графа. Отметим, что в контексте этого условия выражения «отсутствовать» и «быть равным нулю» имеют различный смысл. Например, если в вершину V_i все ребра входят, то левые два равенства в (2) именно «отсутствуют», а не «равны нулю». Условия (3) — аналог условий Кирхгофа — превращаются в условия Неймана, если граф $\mathbf{G}$ состоит из единственного ребра и двух вершин, причем условия (2) в данном случае «отсутствуют». Если же граф $\mathbf{G}$ состоит из единственного ребра и единственной вершины, то условия (2), (3) превращаются в условия согласования.

Прямая задача представляет собой модель для изучения поведения нагруженной конструкции из двутавровых балок, а обратная задача моделирует эксперимент, в результате которого при дополнительных измерениях изучается не только динамика конструкции, но и свойства материалов балок. Обе модели представлены дифференциальными уравнениями с частными производными, заданными на графе. Дифференциальные уравнения на графах — сравнительно новая область математики, возникшая в конце прошлого века. Первая монография по этой проблематике вышла в 2004 г. [1]. Обратные задачи для неклассических уравнений математической физики рассмотрены в [2]. Уравнение Хоффа относится к уравнениям соболевского типа, исследования которых в настоящее время переживают пору бурного расцвета (см. исторический обзор в [3]). Уравнения соболевского типа на графах впервые рассмотрены в [4]. В [5] впервые поставлена и изучена обратная задача для линейных уравнений соболевского типа. В [6] впервые исследована обратная задача для уравнений Баренблатта—Желтова—Кочинной на графе. Наконец, в [7] изучена задача (2)–(4) для уравнений (1) при более простых предположениях на данные задачи, именно $d_j = 1$, $\alpha_j = \alpha$, $\beta_j = \beta$, $\lambda_j = \lambda$. Обратная задача рассматривается впервые.

1. Прямая задача. Следуя [6], введём в рассмотрение гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots), g_j \in L_2(0, l_j)\}$ со скалярным произведением

$$\langle g, h \rangle = \sum_j d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx$$

и банахово пространство $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots) : u_j \in W_2^1(0, l_j) \text{ и выполнено (2) с нормой}$

$$\|u\|_{\mathfrak{U}}^2 = \sum_j d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2 + u_j^2) dx.$$

Отметим, что условие (2) имеет смысл в силу абсолютной непрерывности компонентов u_j , а пространство $\mathfrak{U}$ плотно и компактно вложено в $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$.

Обозначим через $\mathfrak{F}$ сопряженное к $\mathfrak{U}$ относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$ банахово пространство. Очевидна плотность и компактность вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$.

Далее, выберем произвольные константы $a_j \in \mathbb{R}_+$ и построим оператор $A : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$:

$$\langle Au, v \rangle = \sum_j d_j \int_0^{l_j} (u_{jx} v_{jx} + a_j u_j v_j) dx, \quad u, v \in \mathfrak{U}.$$

Как нетрудно заметить, оператор A самосопряжён, положительно определён и является топологическим изоморфизмом пространств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$. Ввиду компактности вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ спектр $\sigma(A)$ оператора A положителен, дискретен, конечнократно и сгущается только к $+\infty$.

Теперь построим операторы $L, M : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$:

$$\begin{aligned} \langle Lu, v \rangle &= \sum_j d_j (\lambda_j + a_j) \int_0^{l_j} u_j v_j dx - \langle Au, v \rangle, \\ \langle Mu, v \rangle &= \sum_j \alpha_j d_j \int_0^{l_j} u_j v_j dx. \end{aligned}$$

Очевидно, операторы $L, M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т.е. линейны и непрерывны), причём оператор L фредгольмов (т.е. $\text{ind } L = 0$), а оператор M компактен. Напомним (см. [7, гл. 4]), что оператор M называется $(L, 0)$ -ограниченным, если он (L, σ) -ограничен и точка ∞ является устранимой особой точкой L -резольвенты оператора M .

ЛЕММА 1.1. *Оператор M $(L, 0)$ -ограничен, если*

- (i) $\ker L = 0$;
- (ii) $\ker L \neq \{0\}$, $\alpha_j \neq 0$ при любом j и все α_j имеют одинаковый знак.

Доказательство. Утверждение (i) очевидно, т.к. в этом случае существует оператор $L^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (детали см. в замечании 4.1.1 [8]).

Пусть $\ker L \neq \{0\}$ и $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$. Тогда билинейная форма

$$[h, g] = \sum_j \alpha_j d_j \int_0^{l_j} h_j g_j dx$$

задаёт в $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ скалярное произведение, эквивалентное $\langle \cdot, \cdot \rangle$. В силу фредгольмовости оператора L $\text{codim im } L = \dim \ker L$, причём, как нетрудно заметить, ядро $\ker L$ ортогонально образу $\text{im } L$ относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Возьмём вектор $\psi \in \ker L \setminus \{0\}$ и рассмотрим

$$\langle M\psi, \psi \rangle = \sum_j \alpha_j d_j \int_0^{l_j} \psi_j^2 dx = [\psi, \psi] > 0.$$

Отсюда следует, что $M\psi \neq \text{im } L$ при любом векторе $\psi \in \ker L \setminus \{0\}$. Это в свою очередь означает, что ни один вектор $\psi \in \ker L \setminus \{0\}$ не имеет M -присоединённых векторов, что в силу теоремы 4.6.1. [8] завершает доказательство леммы в случае $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$. Если $\alpha_j \in \mathbb{R}_-$, доказательство аналогично. $\square$

Теперь построим оператор

$$\langle N(u), v \rangle = \sum_j \beta_j d_j \int_0^{l_j} u_j^3 v_j dx$$

и убедимся, что он действует из пространства $\mathfrak{U}$ в пространство $\mathfrak{F}$. Для этого построим вспомогательное пространство $\mathbf{L}_4(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_4(0, l_j)\}$. Очевидно, имеют место плотные и непрерывные вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathbf{L}_4(\mathbf{G}) \hookrightarrow \mathbf{L}_2(\mathbf{G})$. Обозначим через $\mathbf{L}_4^*(\mathbf{G})$ сопряженное к $\mathbf{L}_4(\mathbf{G})$ относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ пространство. Пространство $\mathbf{L}_4^*(\mathbf{G})$ топологически изоморфно пространству $\mathbf{L}_{\frac{4}{3}}(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_{\frac{4}{3}}(0, l_j)\}$. Норма в пространствах $\mathbf{L}_p(\mathbf{G})$ задаётся следующим образом:

$$\|u\|_p = \sum_j d_j \left(\int_0^{l_j} |u_j|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Поэтому, в силу неравенства Гёльдера, получим

$$|\langle N(u), v \rangle| \leq \max_j \{|\beta_j|\} \|u\|_4^3 \|v\|_4,$$

т. е. действие оператора $N : \mathbf{L}_4(\mathbf{G}) \rightarrow \mathbf{L}_{\frac{4}{3}}(\mathbf{G})$ имеет место. Действие оператора $N : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ имеет место в силу вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathbf{L}_4(\mathbf{G})$, из которого вытекает вложение $\mathbf{L}_{\frac{4}{3}}(\mathbf{G}) \hookrightarrow \mathfrak{F}$.

ЛЕММА 1.2. При любых $\beta_j \in \mathbb{R}$ оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем точку $u \in \mathfrak{U}$ и рассмотрим производную Фреше N'_u оператора N в точке u :

$$\langle N'_u(v), w \rangle = 3 \sum_j \beta_j d_j \int_0^{l_j} u_j^2 v_j w_j dx.$$

Отсюда аналогично предыдущему имеем

$$|\langle N'_u(v), w \rangle| \leq 3 \max_j \{|\beta_j|\} \|u\|_4^2 \|v\|_4 \|w\|_4,$$

т. е. $N'_u \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ при фиксированном u . Непрерывность второй и третьей производных Фреше доказывается аналогично, остальные производные равны нулю. $\square$

Итак, мы редуцировали задачу (1)–(4) к задаче Коши

$$u(0) = u_0 \tag{5}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u), \tag{6}$$

где операторы $L, M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причём оператор L фредгольмов, а оператор M $(L, 0)$ -ограничен. Вектор-функцию $u \in C^1((-\tau, \tau); \mathfrak{U})$,

удовлетворяющую уравнению (6) при некотором $\tau \in \mathbb{R}_+$, назовём решением этого уравнения, а если решение вдобавок удовлетворяет условию (5), то будем называть его решением задачи (5), (6).

Если $\ker L = \{0\}$, то уравнение (6) тривиально редуцируется к эквивалентному ему уравнению

$$\dot{u} = F(u), \quad (7)$$

где оператор $F = L^{-1}(M + N) \in C^\infty(\mathfrak{U})$ по построению. Существование единственного локального решения $u \in C^1((-\tau, \tau); \mathfrak{U})$ задачи (5), (6) при любом $u_0 \in \mathfrak{U}$ — результат классической теоремы Коши (см., например, [9, гл. IV, §1]). Другое дело, если $\ker L \neq \{0\}$. В этом случае полезным оказывается следующее понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством уравнения (6)*, если:

- (i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (6) лежит в $\mathfrak{P}$ как траектория, т. е. $u(t) \in \mathfrak{P} \quad t \in (\tau, \tau)$;
- (ii) при любом $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (5), (6).

Поскольку решение задачи (5), (7) в случае $\ker L = \{0\}$ является решением задачи (5), (6) (и наоборот), то фазовым пространством уравнения (6) в данном случае служит все пространство $\mathfrak{U}$. Рассмотрим случай $\ker L \neq \{0\}$. В [6] для изучения этого случая была использована теорема о расщеплении (теорема 4.1.1. [8]). Однако для наших целей более подходит другой метод, развитый в [10, 11] и применённый в [12]. Согласно ему отождествим ядро и коядро оператора L , т. е. положим $\text{coker } L = \ker L$, а через $\text{coim } L$ обозначим ортогональное в смысле $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ дополнение к ядру $\ker L$ в пространстве $\mathfrak{U}$, т. е. положим $\text{coim } L = (\ker L)^\perp$. По построению $\text{coim } L$ плотно и непрерывно вложено в $\text{im } L$. Обозначим через $P(Q)$ проектор на $\text{coim } L$ ($\text{im } L$) вдоль $\ker L$ ($\text{coker } L$), а через L_1 сужение оператора L на $\text{coim } L$. В силу теоремы Банаха существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\text{im } L; \text{coim } L)$, поэтому уравнение (6) можно редуцировать к эквивалентной ему системе уравнений

$$0 = (\mathbb{I} - Q)(M + N)(u^0 + u^1), \quad \dot{u}^1 = L^{-1}Q(M + N)(u^0 + u^1), \quad (8)$$

где $u^1 = Pu$, $u^0 = u - u^1$. Заметим, что в [7] уравнение (6) тоже редуцируется к (8), однако проекторы P и Q строятся по операторам L и M однозначно. Тем не менее в [8, п. 4.5] показано, что в случае $(L, 0)$ -ограниченности оператора M оба подхода приводят к одинаковым результатам.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - Q)(Mu + N(u)) = 0\}$. Поскольку любое решение уравнения (6) с необходимостью лежит во множестве $\mathfrak{M}$ как траектория, то это множество является очевидным кандидатом на роль фазового пространства уравнения (6). Приведём достаточные условия того, что $\mathfrak{M}$ является фазовым пространством. Пусть $\mathfrak{M} \neq \emptyset$, т. е. существует точка $u_0 \in \mathfrak{M}$, причём оператор $(\mathbb{I} - Q)(M + N'_{u_0})(\mathbb{I} - P) : \ker L \rightarrow \text{coker } L$ является топлайнным изоморфизмом. Тогда в силу теоремы о неявной функции существуют окрестности $\mathcal{O} \subset \ker L$, $\mathcal{O}^1 \subset \text{coim } L$ точек $u_0^0 = (\mathbb{I} - P)u_0$, $u_0^1 = Pu_0$ соответственное и оператор $\mathcal{B} \in C^\infty(\mathcal{O}^1; \mathcal{O}^0)$ такой, что $u_0^0 = \mathcal{B}(u_0^1)$. Построим оператор $\mathcal{D} = \mathbb{I} + \mathcal{B} : \mathcal{O}^1 \rightarrow \mathfrak{M}$, $\mathcal{D}(u_0^1) = u_0$, который вкупе с множеством $\mathcal{O}^1$ задаёт карту множества $\mathfrak{M}$, причём $\mathcal{D}^{-1}$ равен сужению проектора P на

$\mathcal{D}[\mathcal{O}^1] = \mathcal{O} \subset \mathfrak{M}$. По построению оператор $\mathcal{D} \in C^\infty(\mathcal{O}^1; \mathcal{O})$. Подействуем производной Фреше $\mathcal{D}'_{u^1}$ на нижнее уравнение системы (8), получим уравнение (7), определённое на $\mathcal{O}$, где $F = \mathcal{D}'_{u^1} L_1^{-1} Q(M + N)(u)$, $u = \mathcal{D}(u^1)$. Однозначная локальная разрешимость задачи (5), (7) и в данной ситуации — результат все той же классической теоремы Коши [9, гл. IV, §1].

Итак, поскольку найденное решение $u = u(t)$ задачи (5), (7) является решением задачи (5), (6), то достаточные условия сводятся к следующим. Во-первых, $\mathfrak{M} \neq \emptyset$, а во-вторых, в точке $u_0 \in \mathfrak{M}$ существует карта $(D, \mathcal{O}^1)$ такая, что $\mathcal{D}^{-1}$ есть сужение проектора P на $\mathcal{O} = \mathcal{D}[\mathcal{O}^1]$.

Немного отходя от стандарта (см., например, [9, гл. II]) назовём $\mathfrak{M}$ банаховым C^∞ -многообразием в точке u_0 , моделируемым пространством $\text{coim } L$, если выполнены оба условия. Если множество $\mathfrak{M}$ является банаховым C^∞ -многообразием, моделируемым пространством $\text{coim } L$ в каждой своей точке, то мы назовём его банаховым C^∞ -многообразием. И наконец, банахово C^∞ -многообразие $\mathfrak{M}$ назовём простым многообразием, если сужение проектора P на $\mathfrak{M}$ является биекцией.

ЛЕММА 1.3. Пусть выполнено условие (ii) леммы 1.1 и все ненулевые β_j имеют тот же знак, что и α_j . Тогда множество $\mathfrak{M}$ — простое многообразие.

Доказательство. Выберем в ядре $\ker L$ ортонормированный (в смысле $\langle \cdot, \cdot \rangle$) базис, т.е. $\ker L = \text{span} \{ \chi_k : k = 1, 2, \dots, l \}$, и отождествим его с базисом в $\text{coim } L$. Тогда множество $\mathfrak{M}$ может быть записано в виде $\mathfrak{M} = \{ u \in \mathfrak{U} : \langle Mu + N(u), \chi_k \rangle = 0, k = 1, 2, \dots, l \}$. Фиксируем точку $u^1 \in \text{coim } L$ и рассмотрим оператор $S : \ker L \rightarrow \ker L$, задаваемый формулой

$$S(u^0) = \sum_{k=1}^l \langle (M + N)(u^1 + u^0), \chi_k \rangle \chi_k.$$

По построению оператор $S \in C^\infty(\ker L; \ker L)$.

Пусть $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$. Покажем, что оператор S строго монотонен, то есть $\langle S(u^0) - S(v^0), u^0 - v^0 \rangle > 0$, если $u^0 \neq v^0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \langle S(u^0) - S(v^0), u^0 - v^0 \rangle &= \\ &= \langle (M + N)(u^1 + u^0) - (M + N)(u^1 + v^0), (u^0 + u^1) - (v^0 + u^1) \rangle = \\ &= \sum_j \alpha_j d_j \int_0^{l_j} (u_j^0 - v_j^0)^2 dx + \sum_j \beta_j d_j \int_0^{l_j} (u_j^3 - v_j^3)(u_j - v_j) dx = \\ &= [u^0 - v^0, u^0 - v^0] + \sum_j \beta_j d_j \int_0^{l_j} (u_j - v_j)^2 (u_j^2 + u_j v_j + v_j^2) dx > 0, \text{ если } u^0 \neq v^0. \end{aligned}$$

Здесь $u = u^0 + u^1$, $v = v^0 + u^1$, а $[\cdot, \cdot]$ — скалярное произведение, введённое в рассмотрение при доказательстве леммы 1.1.

Теперь покажем, что оператор S коэрцитивен, т.е.

$$\lim_{\|u^0\|_{\mathfrak{U}} \rightarrow \infty} \frac{\langle S(u^0), u^0 \rangle}{\|u^0\|_{\mathfrak{U}}} = +\infty.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \langle S(u^0), u^0 \rangle &\geq |||u^0|||^2 - |||u^0||| \cdot |||u^1||| + \\ &+ \sum_j \beta_j d_j \int_0^{l_j} [(u_j^0)^4 + 3(u_j^0)^3(u_j^1) + 3(u_j^0)^2(u_j^1)^2 + u^0(u_j^1)^3] dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку все нормы в конечномерном пространстве эквивалентны, то из (9) вытекает коэрцитивность оператора S . Здесь через $||| \cdot |||$ обозначена норма, индуцированная скалярным произведением $[\cdot, \cdot]$.

Итак, гладкий оператор S строго монотонен и коэрцитивен. Следовательно, в силу теоремы Вишика—Минти—Браудера [13, гл. III, §2] существует единственное решение уравнения $S(u^0) = 0$. Это, в свою очередь, означает, что для любого вектора $u^1 \in \text{coim } L$ существует единственный вектор $u^0 \in \ker L$ такой, что $u^0 + u^1 \in \mathfrak{M}$. Другими словами, сужение проектора P на $\mathfrak{M}$ — биекция.

Теперь пусть точка $u_0 \in \mathfrak{M}$. Проверим невырожденность оператора $(\mathbb{I} - Q)(M + N'_{u_0})(\mathbb{I} - P)$. Возьмём вектор $v_0 \in \ker L \setminus \{0\}$, тогда

$$\langle (\mathbb{I} - Q)(M + N'_{u_0})v_0, v_0 \rangle = |||v_0|||^2 + 3 \sum_j \beta_j d_j \int_0^{l_j} u_0^2 v_0^2 dx > 0.$$

Лемма доказана в случае $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$. Если $\alpha_j \in \mathbb{R}_-$, то для доказательства леммы вместо оператора S надо взять оператор $T = -S$. $\square$

Из всех рассуждений вытекает

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть

- (i) $\ker L = \{0\}$. Тогда фазовым пространством уравнения (6) служит все пространство $\mathfrak{U}$;
- (ii) $\ker L \neq \{0\}$, все коэффициенты $\alpha_j \neq \{0\}$ и имеют тот же знак, что и все ненулевые коэффициенты β_j . Тогда фазовым пространством уравнения (6) служит простое многообразие $\mathfrak{M}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Коэффициенты λ_j входят в условия теоремы 1.1 неявным образом, т. к. именно они определяют тривиальность или нетривиальность ядра $\ker L$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Условия на длины α_j и β_j хорошо согласуются с условием $\alpha\beta > 0$ в [6]. Если $\alpha\beta < 0$, то фазовое пространство уже не будет простым многообразием [14].

2. Обратная задача. Для уравнений (1) рассмотрим обратную задачу (2)–(4) с дополнительными условиями

$$\left(\lambda_j + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right) u_{jt}(0, 0) = \varphi_j, \quad (10)$$

$$\left(\lambda_j + \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right) u_{jt}(l_j, 0) = \psi_j, \quad (11)$$

состоящую в определении неизвестных коэффициентов α_j , β_j и решений u_j уравнений (1). Касаясь механического смысла задачи, отметим, что здесь φ_j ,

ψ_j показывают изменение скорости динамики выпучивания в начале и конце балки в начальный промежуток времени.

Задачи подобного рода возникают при проведении различных научных исследований в связи с необходимостью определения характеристик материала, в котором происходит изучаемый процесс, по результатам наблюдений. Несмотря на различие таких обратных коэффициентных задач, их объединяет то, что дополнительная информация в каждой из обратных задач представляет в общем случае функцию, зависящую от пространственных переменных и (или) времени. Такой тип дополнительной информации характерен для многочисленных экспериментов в различных областях науки и техники.

Подставляя правую часть уравнения (1) при $t = 0$ в (10), (11), получаем системы уравнений относительно α_j, β_j :

$$\begin{cases} \alpha_j u_{0j}(0) + \beta_j u_{0j}^3(0) = \varphi_j, \\ \alpha_j u_{0j}(l_j) + \beta_j u_{0j}^3(l_j) = \psi_j. \end{cases} \quad (12)$$

Для систем уравнений (12) воспользуемся правилом Крамера:

- (i) если $\mathfrak{d}_j = u_{0j}(0)u_{0j}^3(l_j) - u_{0j}(l_j)u_{0j}^3(0) \neq 0$, то существует единственное решение α_j, β_j каждой из систем уравнений (12), причем

$$\alpha_j = \frac{\varphi_j u_{0j}^3(l_j) - \psi_j u_{0j}^3(0)}{\mathfrak{d}_j}, \quad \beta_j = \frac{\psi_j u_{0j}(0) - \varphi_j u_{0j}(l_j)}{\mathfrak{d}_j}; \quad (13)$$

- (ii) если $\mathfrak{d}_j = 0$, $\varphi_j = \psi_j = 0$, то существует бесконечно много решений α_j, β_j ; если же φ_j или $\psi_j \neq 0$, то решения не существует.

Нас интересует случай, когда коэффициенты $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, поэтому дополнительно предполагаем условия

$$\varphi_j u_{0j}^3(l_j) \neq \psi_j u_{0j}^3(0) \quad \text{и} \quad \varphi_j u_{0j}(l_j) \neq \psi_j u_{0j}(0). \quad (14)$$

ЛЕММА 2.1. Пусть $\ker L = \{0\}$. Тогда при любых начальных значениях $u_0 \in \mathfrak{U}$, $\varphi_j, \psi_j \in \mathbb{R}$ таких, что $u_{0j}(0) \neq 0$, $u_{0j}(l_j) \neq 0$, $u_{0j}(0) \neq \pm u_{0j}(l_j)$ и выполнены условия (14), существует единственное решение обратной задачи (1)–(4), (10)–(11).

Доказательство. В силу условий $u_{0j}(0) \neq 0$, $u_{0j}(l_j) \neq 0$, $u_{0j}(0) \neq \pm u_{0j}(l_j)$ определители систем (12)

$$\mathfrak{d}_j = u_{0j}(0)u_{0j}^3(l_j) - u_{0j}(l_j)u_{0j}^3(0) = u_{0j}(0)u_{0j}(l_j)(u_{0j}(l_j) - u_{0j}(0))(u_{0j}(l_j) + u_{0j}(0))$$

не равны нулю, если к тому же выполнены условия (14), то коэффициенты $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, поэтому в силу теоремы 1.1 решение обратной задачи существует и единственно для любого вектора $u_0 \in \mathfrak{U}$. $\square$

Рассмотрим теперь случай нетривиального ядра $\ker L$. Для выполнения условий теоремы 1.1 необходимо, чтобы решения систем (12) были все одного знака. Из (13) следует, что для того, чтобы $\alpha_j, \beta_j > 0$, должна быть выполнена одна из систем неравенств:

$$\begin{cases} \varphi_j u_{0j}^3(l_j) - \psi_j u_{0j}^3(0) > 0, \\ \psi_j u_{0j}(0) - \varphi_j u_{0j}(l_j) > 0, \\ u_{0j}(0)u_{0j}^3(l_j) - u_{0j}(l_j)u_{0j}^3(0) > 0 \end{cases} \quad (15)$$

или

$$\begin{cases} \varphi_j u_{0j}^3(l_j) - \psi_j u_{0j}^3(0) < 0, \\ \psi_j u_{0j}(0) - \varphi_j u_{0j}(l_j) < 0, \\ u_{0j}(0) u_{0j}^3(l_j) - u_{0j}(l_j) u_{0j}^3(0) < 0, \end{cases} \quad (16)$$

а для того, чтобы $\alpha_j, \beta_j < 0$ —

$$\begin{cases} \varphi_j u_{0j}^3(l_j) - \psi_j u_{0j}^3(0) > 0, \\ \psi_j u_{0j}(0) - \varphi_j u_{0j}(l_j) > 0, \\ u_{0j}(0) u_{0j}^3(l_j) - u_{0j}(l_j) u_{0j}^3(0) < 0, \end{cases} \quad (17)$$

или

$$\begin{cases} \varphi_j u_{0j}^3(l_j) - \psi_j u_{0j}^3(0) < 0, \\ \psi_j u_{0j}(0) - \varphi_j u_{0j}(l_j) < 0, \\ u_{0j}(0) u_{0j}^3(l_j) - u_{0j}(l_j) u_{0j}^3(0) > 0. \end{cases} \quad (18)$$

Обозначим через $\mathfrak{D}_j^+$ область допустимых значений φ_j, ψ_j , при которых всегда верна одна из систем неравенств (15) или (16), а через $\mathfrak{D}_j^-$ область допустимых значений φ_j, ψ_j , при которых всегда верна одна из систем неравенств (17) или (18). Введём следующие множества:

$$\mathfrak{A}_j^1 = \begin{cases} 0 < u_{0j}(0) < u_{0j}(l_j), \\ 0 < -u_{0j}(l_j) < u_{0j}(0), \\ u_{0j}(0) < u_{0j}(l_j) < 0, \\ 0 < -u_{0j}(0) < u_{0j}(l_j), \end{cases} \quad \mathfrak{A}_j^2 = \begin{cases} 0 < u_{0j}(l_j) < -u_{0j}(0), \\ u_{0j}(l_j) < u_{0j}(0) < 0, \\ 0 < u_{0j}(l_j) < u_{0j}(0), \\ 0 < u_{0j}(0) < -u_{0j}(l_j). \end{cases}$$

Легко проверить, что

$$\mathfrak{D}_j^+ = \begin{cases} \frac{u_{0j}(l_j)}{u_{0j}(0)} \varphi_j < \psi_j < \left(\frac{u_{0j}(l_j)}{u_{0j}(0)} \right)^3 \varphi_j, \text{ если } u_{0j}(0), u_{0j}(l_j) \in \mathfrak{A}_j^1, \\ \left(\frac{u_{0j}(l_j)}{u_{0j}(0)} \right)^3 \varphi_j < \psi_j < \frac{u_{0j}(l_j)}{u_{0j}(0)} \varphi_j, \text{ если } u_{0j}(0), u_{0j}(l_j) \in \mathfrak{A}_j^2, \end{cases} \quad (19)$$

$$\mathfrak{D}_j^- = \begin{cases} \left(\frac{u_{0j}(l_j)}{u_{0j}(0)} \right)^3 \varphi_j < \psi_j < \frac{u_{0j}(l_j)}{u_{0j}(0)} \varphi_j, \text{ если } u_{0j}(0), u_{0j}(l_j) \in \mathfrak{A}_j^1, \\ \frac{u_{0j}(l_j)}{u_{0j}(0)} \varphi_j < \psi_j < \left(\frac{u_{0j}(l_j)}{u_{0j}(0)} \right)^3 \varphi_j, \text{ если } u_{0j}(0), u_{0j}(l_j) \in \mathfrak{A}_j^2. \end{cases} \quad (20)$$

Для примера найдем области допустимых значений φ_j и ψ_j , при которых коэффициенты $\alpha_j, \beta_j > 0$ в случае $\mathfrak{d}_j > 0$, то есть разрешим систему (15) при некотором j . В зависимости от знаков $u_{0j}(0)$ и $u_{0j}(l_j)$ возможны следующие четыре случая.

- (i) Пусть $u_{0j}(0) > 0, u_{0j}(l_j) > 0$. Тогда $u_{0j}(0) + u_{0j}(l_j) > 0$ и для того, чтобы выполнялось $\mathfrak{d}_j > 0$ необходимо $u_{0j}(l_j) - u_{0j}(0) > 0$, то есть получился случай $0 < u_{0j}(0) < u_{0j}(l_j)$. В этом случае система (15) эквивалентна неравенству

$$\frac{u_{0j}(l_j)}{u_{0j}(0)} \varphi_j < \psi_j < \frac{u_{0j}^3(l_j)}{u_{0j}^3(0)} \varphi_j.$$

- (ii) Пусть $u_{0j}(0) > 0$, $u_{0j}(l_j) < 0$. Тогда $u_{0j}(l_j) - u_{0j}(0) < 0$ и для того, чтобы выполнялось $\mathfrak{d}_j > 0$ необходимо $u_{0j}(l_j) + u_{0j}(0) > 0$, то есть получился случай $0 < -u_{0j}(l_j) < u_{0j}(0)$. Здесь система (15) эквивалентна неравенству

$$\frac{u_{0j}(l_j)}{u_{0j}(0)}\varphi_j < \psi_j < \frac{u_{0j}^3(l_j)}{u_{0j}^3(0)}\varphi_j.$$

- (iii) Пусть $u_{0j}(0) < 0$, $u_{0j}(l_j) > 0$. Тогда $u_{0j}(l_j) - u_{0j}(0) > 0$ и для того, чтобы выполнялось $\mathfrak{d}_j > 0$ необходимо $u_{0j}(l_j) + u_{0j}(0) < 0$, то есть получился случай $0 < u_{0j}(l_j) < -u_{0j}(0)$. В этом случае система (15) эквивалентна неравенству

$$\frac{u_{0j}^3(l_j)}{u_{0j}^3(0)}\varphi_j < \psi_j < \frac{u_{0j}(l_j)}{u_{0j}(0)}\varphi_j.$$

- (iv) Пусть $u_{0j}(0) < 0$, $u_{0j}(l_j) < 0$. Тогда $u_{0j}(0) + u_{0j}(l_j) < 0$ и для того, чтобы выполнялось $\mathfrak{d}_j > 0$ необходимо $u_{0j}(l_j) - u_{0j}(0) < 0$, то есть получился случай $0 < -u_{0j}(0) < -u_{0j}(l_j)$. Здесь система (15) эквивалентна неравенству

$$\frac{u_{0j}^3(l_j)}{u_{0j}^3(0)}\varphi_j < \psi_j < \frac{u_{0j}(l_j)}{u_{0j}(0)}\varphi_j.$$

Аналогично, разрешая системы (16)–(18), получаем (19) и (20).

Введём множества $\mathfrak{D}^- = (\mathfrak{D}_1^-, \mathfrak{D}_2^-, \dots, \mathfrak{D}_j^-, \dots)$, $\mathfrak{D}^+ = (\mathfrak{D}_1^+, \mathfrak{D}_2^+, \dots, \mathfrak{D}_j^+, \dots)$ и $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^+ \cup \mathfrak{D}^-$. В контексте нашей задачи $\mathfrak{D}^-$ — множество допустимых значений векторов φ , ψ , при которых решениями систем (12) будут только отрицательные коэффициенты α_j , β_j ; $\mathfrak{D}^+$ — множество допустимых значений векторов φ , ψ , при которых решениями систем (12) будут только положительные коэффициенты α_j , β_j , а $\mathfrak{D}$ — множество допустимых значений векторов φ , ψ , при которых решениями систем (12) будут коэффициенты α_j , β_j одного знака.

Выберем в ядре $\ker L$ ортонормированный (в смысле $\langle \cdot, \cdot \rangle$) базис, т. е. $\ker L = \text{span} \{\chi_k : k = 1, 2, \dots, l\}$, и отождествим его с базисом в $\text{coker } L$.

Из всего вышесказанного следует

ТЕОРЕМА 2.1.

- (i) Пусть $\ker L = \{0\}$. Тогда при любых $u_0 \in \mathfrak{U}$, $\varphi_j, \psi_j \in \mathbb{R}$ таких, что $u_{0j}(0) \neq 0$, $u_{0j}(l) \neq 0$, $u_{0j}(0) \neq \pm u_{0j}(l)$, $\varphi_j u_{0j}^3(l) \neq \psi_j u_{0j}^3(0)$ и $\varphi_j u_{0j}(l) \neq \psi_j u_{0j}(0)$, существует единственное решение обратной задачи (1)–(4), (10)–(11).
- (ii) Пусть $\ker L \neq \{0\}$. Тогда при любых начальных данных $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_j, \dots)$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_j, \dots) \in \mathfrak{D}$ и $u_0 = (u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0j}, \dots) \in \mathfrak{U}$ таких, что

$$u_{0j}(0) \neq 0, \quad u_{0j}(l_j) \neq 0, \quad u_{0j}(0) \neq \pm u_{0j}(l_j) \quad (21)$$

и

$$\left\langle \sum_j \frac{d_j}{\mathfrak{d}_j} \int_0^{l_j} (\varphi_j u_{0j}^3(l_j) - \psi_j u_{0j}^3(0)) u_{0j} dx, \chi_k \right\rangle + \\ + \left\langle \sum_j \frac{d_j}{\mathfrak{d}_j} \int_0^{l_j} (\psi_j u_{0j}(0) - \varphi_j u_{0j}(l_j)) u_{0j}^3 dx, \chi_k \right\rangle = 0, \quad (22)$$

существует единственное решение $u \in \mathfrak{U}$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha_j \beta_j \in \mathbb{R}_+$ обратной задачи (1)–(4), (10)–(11).

Доказательство. (ii) Пусть $u_0 \in \mathfrak{U}$ и выполнены условия (21). Тогда существует единственная пара коэффициентов α_j, β_j , удовлетворяющая (12). Выполнение условий $\varphi, \psi \in \mathfrak{D}$ гарантирует условие $\alpha_j \beta_j > 0$ для всех j , причём в силу конструкции множества $\mathfrak{D}$ все коэффициенты $\alpha_j \neq 0$ и имеют тот же знак, что и все ненулевые коэффициенты β_j . Тем самым, мы находимся в условиях теоремы 1.1 (ii). Фазовое пространство

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : \langle Mu + N(u), \chi_k \rangle = 0, k = 1, 2, \dots, l\}$$

при найденных α_j и β_j имеет вид (22), поэтому существует единственное решение $u \in \mathfrak{U}$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha_j \beta_j \in \mathbb{R}_+$ обратной задачи (1)–(4), (10)–(11). $\square$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: Физматлит, 2004. — 272 с.
2. Kozhanov A. I. Composite type equations and inverse problems. — Utrecht: VSP, 1999. — 171 pp.
3. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. — М.: Физматлит, 2007. — 736 с.
4. Свиридюк Г. А. Уравнения соболевского типа на графах / В сб.: *Неклассические уравнения математической физики*. — Новосибирск: ИМ СО РАН, 2002. — С. 221–225.
5. Fedorov V. E., Urazaeva A. V. An inverse problem for linear Sobolev type equations // *J. Inv. Ill-Posed Problems*, 2004. — Vol. 12, No. 5. — P. 1–9.
6. Свиридюк Г. А., Баязитова А. А. Обратная задача для уравнений Баренблатта–Желтова–Кочиной на графе / В сб.: *Неклассические уравнения математической физики: Тр. междунар. конф. «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвящ. 100-летию со дня рождения акад. И. Н. Векуа*. — Новосибирск: ИМ СО РАН, 2007. — С. 244–250.
7. Свиридюк Г. А., Шеметова В. В. Уравнения Хоффа на графах // *Дифференц. уравнения*, 2006. — Т. 42, № 1. — С. 126–131.
8. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. — Utrecht; Boston: VSP, 2003. — 216 pp.
9. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — Волгоград: Платон, 1996. — 203 с.
10. Свиридюк Г. А. Многообразие решений одного нелинейного сингулярного псевдопараболического уравнения // *Докл. АН СССР*, 1986. — Т. 289, № 6. — С. 1315–1318.
11. Свиридюк Г. А. Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска // *Изв. вузов. Математика*, 1989. — № 2. — С. 55–61.
12. Свиридюк Г. А., Манакова Н. А. Задача оптимального управления для уравнения Хоффа // *Сиб. журн. индустр. математики*, 2005. — Т. 8, № 2. — С. 144–151.
13. Гавеский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978. — 336 с.

14. Свиридюк Г. А., Тринеева И. К. Сборка Уитни в фазовом пространстве уравнения Хоффа // *Изв. вузов. Математика*, 2005. — № 10. — С. 54–60.

Поступила в редакцию 19/I/2009;
в окончательном варианте — 19/II/2009.

MSC: 35K65

ON DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FOR THE HOFF EQUATIONS ON GRAPH

G. A. Sviridyuk, A. A. Bayazitova

South Ural State University,
76, prosp. Lenina, Chelyabinsk, 454080.

E-mails: ridyu@math.susu.ac.ru, alfiya@74.ru

The Hoff equations defined on graph describe the dynamics of H-beams construction buckling. Generalization of the direct problem which is the Cauchy problem is obtained. For the first time the inverse coefficient problem is studied which is modeling the experiment that allows with additional measurements not only to study the construction buckling dynamics but also the characteristics of beam material. The unique solution of this problem is demonstrated.

Key words: *the Hoff equations on graph, phase space, an inverse problem.*

Original article submitted 19/I/2009;
revision submitted 19/II/2009.

Sviridyuk Georgy Anatolevich, Dr. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Head of Dept. of Mathematical Physics Equations.

Bayazitova Alfiya Adygamovna, Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Physics Equations.