Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Стефанюк, И. В. Кудинов, Е. В. Ларгина, Построение приближённых аналитических решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений на основе использования дополнительных граничных условий, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 1(), 122–132

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu671>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 13:56:34

Математическое моделирование

УДК 536.2(075)

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЁННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Е. В. Стефанюк, И. В. Кудинов, Е. В. Ларгина

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: stef-kate@yandex.ru

На основе использования дополнительных граничных условий разработана методика построения приближённых аналитических решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Физический смысл применения дополнительных граничных условий заключается в выполнении исходного дифференциального уравнения в граничных точках краевой задачи. Применение итерационного метода решения позволяет выполнять это уравнение во всем диапазоне изменения независимой переменной и путём осреднения искомым неизвестных коэффициентов получать аналитические решения удовлетворительной точности.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, дополнительные граничные условия, приближённые аналитические решения.

Получение решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в случаях, когда они включают члены, содержащие искомую функцию в степенях $n \geq 3$, представляет значительные трудности не только для аналитических, но и численных методов. При достаточно больших n , когда нахождение аналитических решений вообще не представляется возможным, весьма затруднительным оказывается и получение их численных решений. Это связано с тем, что в результате конечно-разностной аппроксимации исходного дифференциального уравнения относительно искомой функции получаются большие системы алгебраических полиномов высокого порядка, методы решения которых (как численные, так и аналитические) пока ещё не разработаны.

В настоящей работе рассматривается методика получения приближённых аналитических решений краевых задач, математические постановки которых содержат нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения первого

Стефанюк Екатерина Васильевна — ассистент кафедры теоретических основ теплотехники и гидромеханики; к.т.н.

Кудинов Игорь Васильевич — студент.

Ларгина Евгения Валериевна — ассистент кафедры теоретических основ теплотехники и гидромеханики.

порядка. С целью оценки точности предлагаемой методики найдём сначала решения обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих точные аналитические решения. И, в частности, рассмотрим краевую задачу о движении фронта температурного возмущения, возникающую как промежуточный этап решения нестационарной задачи теплопроводности для бесконечной пластины при симметричных граничных условиях первого рода [1, 2]. Задача о движении фронта температурного возмущения в данном случае содержит нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка и начальное условие, характеризующее положение фронта в начальный момент времени:

$$\frac{21}{128} \frac{dq(Fo)}{dFo} = \frac{245}{64q(Fo)} \quad (0 \leq Fo \leq Fo_1; 0 \leq q(Fo) \leq 1); \quad (1)$$

$$q(0) = 0, \quad (2)$$

где $q(Fo)$ — функция, характеризующая перемещение фронта температурного возмущения по безразмерной пространственной координате $\xi = \frac{x}{R}$ ($0 \leq \xi \leq 1$) во времени $Fo = \frac{a\tau}{R^2}$ (рис. 1); Fo — число Фурье; a — коэффициент теплопроводности; τ — время; R — половина толщины пластины; x — координата; Fo_1 — время окончания первой стадии процесса — стадии нерегулярного режима теплообмена. На рис. 1: $\Theta = \frac{T-T_0}{T_{ст}-T_0}$ — относительная избыточная температура, где T_0 — начальная температура, $T_{ст}$ — температура стенки при $\xi = 0$, T — температура.

Уравнение (1) получено при нахождении решения нестационарной задачи теплопроводности в пятом приближении первой стадии процесса. Это решение имеет вид [1, 2]

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=0}^{14} A_k \left(\frac{\xi}{q} \right)^k, \quad (3)$$

где $A_0 = 1$; $A_1 = -245/64$; $A_2 = 0$; $A_3 = 455/32$; $A_4 = 0$; $A_5 = -3003/64$; $A_6 = 0$; $A_7 = 2145/16$; $A_8 = 0$; $A_9 = -35035/64$; $A_{10} = 1001$; $A_{11} = -28655/32$; $A_{12} = 455$; $A_{13} = 8085/64$; $A_{14} = 15$.

Уравнение (1) не представляет затруднений для непосредственного интегрирования, и точное аналитическое решение задачи (1), (2) имеет вид

$$q(Fo) = \frac{2}{3} \sqrt{105Fo}^{0,5}. \quad (4)$$

Рис. 1. Схема перемещения фронта температурного возмущения по координате ξ во времени Fo .

Положив $q(\text{Fo}_1) = 1$, из соотношения (4) найдём время достижения фронтом температурного возмущения координаты $\xi = 1$: $\text{Fo} = \text{Fo}_1 = 0,0214285714$.

Соотношения (3), (4) представляют решение в пятом приближении задачи теплопроводности для бесконечной пластины, полученное с помощью интегрального метода теплового баланса при использовании дополнительных граничных условий. Отличие этого решения от точного [4] не превышает 0,004 % [1].

Найдём приближённое аналитическое решение задачи (1), (2). С целью упрощения процесса получения решения введём новую независимую переменную $\eta = \frac{\text{Fo}}{\text{Fo}_1}$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{21}{128} \frac{dq(\eta)}{d(\eta)} = \frac{245\text{Fo}_1}{64q(\eta)} \quad (0 \leq \eta \leq 1; 0 \leq q(\eta) \leq 1); \quad (5)$$

$$q(0) = 0. \quad (6)$$

Для уравнения (5) должно быть выполнено также условие

$$q(1) = 1. \quad (7)$$

Решение задачи (5), (6) примем в виде

$$q(\eta) = b\eta^\lambda, \quad (8)$$

где b, λ — некоторые пока неизвестные постоянные. Отметим, что из условия (7) следует, что $b = 1$.

Для определения коэффициента λ потребуем, чтобы соотношение (8) удовлетворяло не уравнению (5), а некоторому осреднённому уравнению, т. е. уравнению (5), умноженному на $d\eta$ и проинтегрированному в пределах от $\eta = 0$ до $\eta = 1$:

$$\int_0^1 \left(\frac{21}{128} \frac{dq}{d\eta} - \frac{245}{64} \frac{\text{Fo}_1}{q} \right) d\eta = 0. \quad (9)$$

Подставляя (8) в (9), после вычисления интеграла находим

$$70\text{Fo}_1 + 3\lambda - 3 = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) содержит две неизвестные величины Fo_1 и λ . Для их определения используем ещё одно уравнение, получаемое путём введения дополнительного граничного условия. Такое условие можно найти, если потребовать, чтобы соотношение (8) удовлетворяло уравнению (5) в точке $\eta = 1$, т. е.

$$\frac{21}{128} \left[\frac{dq(\eta)}{d\eta} \right]_{\eta=1} = \frac{245\text{Fo}_1}{64q(1)}.$$

Последнее соотношение с учётом (7) приводится к следующему алгебраическому уравнению:

$$\frac{21}{128} \frac{\lambda}{\text{Fo}_1} - \frac{245}{64} = 0. \quad (11)$$

Из совместного решения уравнений (10) и (11) находим $\lambda = 0,5$; $Fo_1 = 0,02142857143$. Отметим, что полученное таким путём значение Fo_1 до одиннадцати знаков после запятой совпадает с точным его значением, а значение коэффициента λ полностью совпадает с показателем степени числа Фурье соотношения (4).

Соотношение (8) с учётом найденных значений Fo_1 и λ для независимой переменной Fo принимает вид

$$q(Fo) = kFo^{0,5}, \quad (12)$$

где $k = \frac{1}{Fo_1^{0,5}} = 6,831300513$.

Точное аналитическое решение (4) задачи (1), (2) можно представить в виде формулы (12), где $k = \frac{2}{3}\sqrt{105} = 6,831300511$. Отсюда следует, что отличие приближённого аналитического решения задачи (1), (2) от точного наблюдается лишь в девятом знаке после запятой в значении коэффициента k .

С целью применения рассмотренного выше метода для решения более сложных уравнений рассмотрим краевую задачу в следующей математической постановке:

$$(3q^4 + 37q^3 + 16q^2 - 336q)\frac{dq}{dFo} + 420q + 3360 = 0 \quad (13)$$

$$(0 \leq Fo \leq Fo_1; 0 \leq q(Fo) \leq 1);$$

$$q(0) = 0. \quad (14)$$

Задача (13), (14) возникает как промежуточный этап решения нестационарной задачи теплопроводности для бесконечного цилиндра при граничных условиях первого рода [1, 2]. Уравнение вида (13) получается при решении указанной задачи во втором приближении первой стадии процесса.

Непосредственное интегрирование уравнения (13) при начальном условии (14) приводит к соотношению

$$\frac{736}{105} \ln \left(1 + \frac{q}{8}\right) - \frac{92q}{105} + \frac{11q^2}{105} - \frac{13q^3}{1260} - \frac{q^4}{560} - Fo = 0. \quad (15)$$

Полагая $q(Fo_1) = 1$, из (15) находим время окончания первой стадии процесса: $Fo_1 = 0,042124470264$.

Соотношение (15) относительно неизвестной функции $q(Fo)$ является трансцендентным уравнением, аналитическое решение которого не представляется возможным. Численные значения q в зависимости от Fo приведены в табл. 1.

Таблица 1

q	0,142	0,323	0,462	0,571	0,665	0,749	0,828	0,902	0,972	1,0
Fo	0,001	0,005	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,04212

Для нахождения приближённого аналитического решения задачи (13), (14) приведём уравнение (13) к безразмерному виду посредством использования новой независимой переменной $\eta = \frac{Fo}{Fo_1}$. Тогда задача (13), (14) примет

вид

$$(3q^4 + 37q^3 + 16q^2 - 336q)\frac{dq}{d\eta} + 420q\text{Fo}_1 + 3360\text{Fo}_1 = 0 \quad (16)$$

$$(0 \leq \eta \leq 1; 0 \leq q \leq 1);$$

$$q(0) = 0. \quad (17)$$

Решение задачи (16), (17) примем в виде

$$q(\eta) = b\eta^{\lambda_1}. \quad (18)$$

Из условия $q(1) = 1$ находим $b = 1$.

Потребуем, чтобы соотношение (18) удовлетворяло осреднённому уравнению (16). Для этого проинтегрируем уравнение (16) в пределах от $\eta = 0$ до $\eta = 1$, т. е.

$$\int_0^1 \left[(3q^4 + 37q^3 + 16q^2 - 336q)\frac{dq}{d\eta} + 420q\text{Fo}_1 + 3360\text{Fo}_1 \right] d\eta = 0. \quad (19)$$

Подставляя (18) в (19), после вычисления интеграла получаем

$$9169(1 + \lambda_1) - 226800\text{Fo}_1 - 201600\text{Fo}_1\lambda_1 = 0. \quad (20)$$

Уравнение (20) содержит две неизвестные величины Fo_1 и λ_1 . Для их определения необходимо еще одно уравнение. В качестве такого уравнения используем дополнительное граничное условие, согласно которому в точке $\eta = 1$ должно выполняться уравнение (16), т. е.

$$\left[(3q^4 + 37q^3 + 16q^2 - 336q)\frac{dq}{d\eta} + 420q\text{Fo}_1 + 3360\text{Fo}_1 \right]_{\eta=1} = 0. \quad (21)$$

Подставляя (18) в дополнительное граничное условие (21), с учётом того, что $q(1) = 1$, относительно неизвестных Fo_1 и λ_1 получаем следующее алгебраическое линейное уравнение:

$$14\lambda_1 - 189\text{Fo}_1 = 0. \quad (22)$$

Из совместного решения уравнений (20), (22) находим $\text{Fo}_1 = 0,04212447026$; $\lambda_1 = 0,568680348566$.

Отметим, что величина Fo_1 до двенадцатого знака после запятой совпадает с точным его значением, полученным из соотношения (15).

Решение задачи (16), (17) принимает вид

$$q(\eta) = \eta^{\lambda_1}. \quad (23)$$

Переходя к независимой переменной Fo , получаем

$$q(\text{Fo}) = k_1\text{Fo}^{\lambda_1}, \quad (24)$$

где $k_1 = \frac{1}{Fo_1 \lambda_1} = 6,056500253089$.

Максимальное расхождение результатов расчётов по формуле (24) в сравнении с точным решением (15) составляет 2 %.

Для повышения точности получаемого решения применим итеративный метод, заключающийся в следующем. Решение уравнения (16) принимается в виде (18) и определяются значения $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_{10}$ для случаев, когда фронт температурного возмущения находится соответственно в точках 0,9; 0,8; 0,7; ...; 0,1 координаты ξ . Затем находится средний коэффициент (λ_{cp}) из всех полученных. Причём вклад каждого из полученных коэффициентов в определение среднего значения λ принимается различным. Вклад коэффициента λ_1 , найденного для $q(Fo) = 1$, принимается за единицу, т. к. этот коэффициент найден с учётом всего пути, проходимого фронтом температурного возмущения ($0 \leq \xi \leq 1$). Соответственно вклад коэффициента λ_2 , найденного для $q(Fo) = 0,9$ ($0 \leq \xi \leq 0,9$), принимается равным 0,9, коэффициента λ_3 , найденного для $q(Fo) = 0,8$ ($0 \leq \xi \leq 0,8$), — равным 0,8 и т. д. В итоге средняя величина коэффициента λ будет определяться по формуле

$$\lambda_{cp} = \frac{\lambda_1 + 0,9\lambda_2 + 0,8\lambda_3 + \dots + 0,1\lambda_{10}}{\mu}, \quad (25)$$

где $\mu = 1 + 0,9 + 0,8 + \dots + 0,1 = 5,5$.

Описанный выше итерационный способ получения решения введён авторами без какого-либо строгого математического обоснования. Однако его высокая эффективность показана на достаточно большом числе конкретных примеров решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 2, 5]. Такой результат можно объяснить тем, что в данном случае удастся получить решение, которое наилучшим образом удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению на всем отрезке изменения независимой переменной $0 \leq \xi \leq 1$, определяя при этом всего два неизвестных коэффициента λ_{cp} и k . Первый из этих коэффициентов характеризует кривизну кривой $q(Fo)$, а второй — её наклон.

Для определения коэффициента λ_2 применительно к уравнению (13) вводится новая независимая переменная $\eta = \frac{Fo}{Fo_2}$, где Fo_2 — время, за которое фронт температурного возмущения достигает координаты $\xi = 0,9$. Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид

$$(3q^4 + 37q^3 + 16q^2 - 336q) \frac{dq}{d\eta} + 420qFo_2 + 3360Fo_2 = 0 \quad (26)$$

$$\begin{aligned} (0 \leq \eta \leq 1; 0 \leq q(\eta) \leq 0,9); \\ q(0) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Решение задачи (26), (27) принимается в виде

$$q(\eta) = b\eta^{\lambda_2}. \quad (28)$$

Из условия $q(1) = 0,9$ получаем $b = 0,9$.

Потребуем, чтобы соотношение (28) удовлетворяло осредненному уравнению (26):

$$\int_0^1 \left[(3q^4 + 37q^3 + 16q^2 - 336q) \frac{dq}{d\eta} + 420q\text{Fo}_2 + 3360\text{Fo}_2 \right] d\eta = 0. \quad (29)$$

Подставляя (28) в (29), получаем

$$41,922927(1 + \lambda_2) - 2\text{Fo}_2(623 + 560\lambda_2) = 0. \quad (30)$$

Уравнение (30) содержит две неизвестные величины Fo_2 и λ_2 . Для нахождения ещё одного уравнения используем дополнительное граничное условие, задаваемое в точке $\eta = 1$. И, в частности, потребуем, чтобы в этой точке соотношение (28) удовлетворяло уравнению (26), т.е.

$$\left[(3q^4 + 37q^3 + 16q^2 - 336q) \frac{dq}{d\eta} + 420q\text{Fo}_2 + 3360\text{Fo}_2 \right]_{\eta=1} = 0. \quad (31)$$

Подставляя (28) в (31), с учётом того, что $q(1) = 0,9$, относительно неизвестных Fo_2 и λ_2 получаем алгебраическое линейное уравнение

$$3738\text{Fo}_2 - 234,44883\lambda_2 = 0. \quad (32)$$

Из совместного решения уравнений (30), (32) находим $\text{Fo}_2 = 0,03490821620$; $\lambda_2 = 0,5565688349$.

Аналогичный путь решения для $q(\eta) = 0,8; 0,7; 0,6; \dots; 0,1$ приводит к следующим значениям коэффициентов Fo и λ :

$$\begin{aligned} \text{Fo}_3 &= 0,02817861687; & \lambda_3 &= 0,5461082219; \\ \text{Fo}_4 &= 0,02201149563; & \lambda_4 &= 0,5370446616; \\ \text{Fo}_5 &= 0,01647827834; & \lambda_5 &= 0,5291777391; \\ \text{Fo}_6 &= 0,01164582637; & \lambda_6 &= 0,5223475478; \\ \text{Fo}_7 &= 0,007576300062; & \lambda_7 &= 0,5164253894; \\ \text{Fo}_8 &= 0,004327043073; & \lambda_8 &= 0,5113069740; \\ \text{Fo}_9 &= 0,00195048068; & \lambda_9 &= 0,5069073780; \\ \text{Fo}_{10} &= 0,0004940273676; & \lambda_{10} &= 0,5031572611. \end{aligned}$$

Для среднего значения λ , определяемого по формуле (25), имеем

$$\lambda_{\text{cp}} = 0,5405000014509.$$

Приближенное аналитическое решение задачи (13), (14) приводится к виду

$$q(\text{Fo}) = k\text{Fo}^{\lambda_{\text{cp}}}, \quad (33)$$

где $k = \text{Fo}_1^{-1} = 0,04212447026^{-1} = 5,539099039974$.

Результаты расчётов фронта температурного возмущения $q(\text{Fo})$ по формуле (33) даны на рис. 2.

Рис. 2. Перемещение фронта температурного возмущения q во времени Fo : 1 — рассчитанное по формуле (15) (точное решение); 2 — по формуле (24); 3 — по формуле (33)

Рис. 3. Изменение относительной невязки $\bar{\varepsilon}$ уравнения (13): 1 — для решения по формуле (24); 2 — по формуле (33)

На рис. 3 представлены результаты расчётов относительной невязки уравнения (13) для случаев использования в качестве приближённых аналитических решений соотношений (24) и (33). Относительная невязка определялась по формуле

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\mu - \varepsilon}{\mu} \quad (0 \leq \bar{\varepsilon} \leq 1),$$

где $\mu = 3360$ — свободный член уравнения (13); ε — невязка уравнения (13).

Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что отличие значений $q(Fo)$, найденных по формулам (24) и (33), от точных их значений, в диапазоне чисел $0,005 \leq Fo \leq Fo_1$ не превышает соответственно 2 % и 0,05 %.

Рассмотренный выше метод был применен также к решению следующей краевой задачи, имеющей точное решение:

$$\frac{dq}{dx} \left(\frac{4}{21}q - \frac{2}{112}q^2 \right) = \frac{2,5}{q} \quad (0 \leq x \leq x_1; 0 \leq q(x) \leq 1); \quad (34)$$

$$q(0) = 0, \quad (35)$$

где $q(x)$ — перемещение фронта температурного возмущения по безразмерной поперечной координате $y = \frac{\xi}{R}$ ($0 \leq y \leq 1$) в зависимости от величины

безразмерной продольной координаты $x = \frac{8\eta}{6\text{Pe}R}$ ($0 \leq x \leq x_1$); ξ — поперечная координата; η — продольная координата; R — половина ширины канала; $\text{Pe} = \frac{\omega_{\text{ср}} R}{a}$ — число Пекле; $\omega_{\text{ср}}$ — средняя скорость течения жидкости; a — коэффициент температуропроводности жидкости.

Задача (34), (35) возникает как промежуточный этап решения задачи теплообмена при ламинарном течении жидкости в плоском канале [5]. И, в частности, уравнение (34) получено при нахождении решения указанной задачи во втором приближении первой стадии процесса, которое имеет вид

$$\Theta(z, x) = 1 - \frac{5}{2} \frac{z}{q} + 5 \left(\frac{z}{q} \right)^4 + \frac{3}{2} \left(\frac{z}{q} \right)^5, \quad (36)$$

где $z = 1 - y$; $\Theta = \frac{T - T_0}{T_{\text{ст}} - T_0}$.

Интегрируя уравнение (34) при граничном условии (35), получаем

$$\frac{15}{4} q^4 - \frac{64}{3} q^3 = -840x. \quad (37)$$

Положив в (37) $q(x_1) = 1$, находим значение координаты $x_1 = 0,0209325396825$, при котором фронт температурного возмущения достигает центра канала $z = 1$ (см. рис. 1, где ξ соответствует z , а Fo — переменной x).

Соотношения (36), (37) определяют решение задачи теплообмена в жидкости во втором приближении первой стадии процесса. Неудобство формулы (37) состоит в том, что величина q (также как и в соотношении (15)) не может быть выражена в явном виде. В связи с этим, приходится использовать табличные (численные) значения q от x (см. табл. 2), что несколько снижает ценность соотношения (36) как аналитического решения.

Таблица 2

q	0,02093	0,01	0,005	0,001	0,0005	0,0001
x	1,0	0,7693	0,6039	0,3475	0,2745	0,1594

Используя рассмотренный выше метод, применительно к задаче (34), (35) на первом шаге решения получаем соотношение

$$q(x) = k_1 x^{\lambda_1}, \quad (38)$$

где $k_1 = 4,004628198$; $\lambda_1 = 0,3588435374$; $x_1 = 0,0209325396825$.

Отметим, что величина x_1 полностью совпадает с точным её значением, полученным по соотношению (37).

Более точный изложенный выше итеративный путь решения приводит к следующей формуле для $q(x)$:

$$q(x) = kx^{\lambda_{\text{ср}}}, \quad (39)$$

где $k = 3,872183095$; $\lambda_{\text{ср}} = 0,3501450457$.

Анализ полученных данных позволяет сделать вывод, что расхождение результатов расчётов по формуле (38) с точным решением, найденным по формуле (37), составляет менее 1 %. Расхождение значений $q(x)$, найденных по формуле (39), с точным решением находится в пределах 0,1 %.

Для уравнений, не имеющих точных аналитических решений, оценку точности получаемых с помощью рассмотренной выше методики приближённых аналитических решений можно выполнять путём анализа невязки исходного дифференциального уравнения. Расчёты показывают, что относительная невязка уравнения (34) при использовании решения (38) в диапазоне $0,00005 \leq x \leq x_1 = 0,02093$ составляет менее 0,05, а при использовании решения (39) — менее 0,01.

По результатам проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

1. Разработана методика получения приближённых аналитических решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, основанная на использовании дополнительных граничных условий, получаемых из исходного дифференциального уравнения путём требования его выполнения в отдельных точках диапазона изменения независимой переменной.

2. Удовлетворительная точность получаемых решений (отличие от точных менее 0,1 %) объясняется тем, что в итерационном процессе получения решения на каждом шаге итерации благодаря использованию дополнительных граничных условий исходное дифференциальное уравнение выполняется точно во всех принятых точках независимой переменной, число которых равно числу шагов итерационного процесса.

3. Ввиду того, что в рассмотренной методике решение принимается в виде степенной функции $q = kFo^\lambda$, где подлежащие определению коэффициенты k и λ характеризуют соответственно наклон кривой изменения искомой функции и её кривизну, данная методика может быть применена лишь для решения нелинейных уравнений с монотонным характером изменения искомой функции. В любых других случаях применение дополнительных граничных условий может быть полезным при условии, что искомое решение будет содержать два или несколько членов ряда [1, 2, 5].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кудинов В. А., Аверин Б. В., Стефанюк Е. В. Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях: Учебн. пособ. для вузов. — М.: Высшая школа, 2008. — 391 с.
2. Кудинов В. А., Стефанюк В. А. Задачи теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения // *Извест. АН. Энергетика*, 2008. — № 5. — С. 141–157.
3. Гудмен Т. Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена / В сб.: *Проблемы теплообмена*. — М.: Атомиздат, 1967. — С. 41–96.
4. Лыков А. В. Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967. — 600 с.
5. Кудинов В. А., Стефанюк Е. В., Антимонов М. С. Аналитические решения задач теплообмена при течении жидкостей в плоскопараллельных каналах на основе определения фронта температурного возмущения // *Инженерно-физический журнал*, 2007. — Т. 80, № 4. — С. 176–186.

Поступила в редакцию 28/I/2009;
в окончательном варианте — 03/III/2009.

MSC: 80A17, 80M25

**CONSTRUCTION OF THE APPROXIMATED ANALYTICAL
SOLUTIONS FOR NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL
EQUATIONS BASED ON APPLICATION OF ADDITIONAL
BOUNDARY CONDITIONS**

E. V. Stefanjuk, I. V. Kudinov, E. V. Largina

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100.

E-mail: stef-kate@yandex.ru

Procedure of obtaining of the approximated analytical solutions for nonlinear ordinary differential equations of the first order is developed based on application of additional boundary conditions. The physical value of application of additional boundary conditions is found in solving the initial differential equation in the boundary points of a problem. Application of iterative method allows to solve this equation in the whole range of independent variable meanings and to receive analytical solutions of satisfactory accuracy by averaging the required unknown factors.

Key words: *nonlinear equations, additional boundary conditions, approximated analytical solutions.*

Original article submitted 28/I/2009;
revision submitted 03/III/2009.

Stefanjuk Ekaterina Vasil'evna, Ph. D. (Tech.), Dept. of the Theoretical Basics of Heattechnics and Hydromechanics.

Kudinov Igor' Vasilievich, Student, Dept. of the Theoretical Basics of Heattechnics and Hydromechanics.

Largina Eugeniya Valerievna, Assist., Dept. of the Theoretical Basics of Heattechnics and Hydromechanics.